全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

新世纪高校金融学教材译丛

金融市场计量经济学

约翰·Y.坎贝尔
安德鲁·W.罗　　著
艾·克雷格·麦金雷

朱平芳　刘　弘　等　　译
唐国兴　　校



上海财经大学出版社

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

新世纪高校金融学教材译丛

金融市场计量经济学

约翰·Y. 坎贝尔
安德鲁·W. 罗 著
艾·克雷格·麦金雷

朱平芳 刘 弘 等 译

唐国兴 校

上海财经大学出版社

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

图书在版编目(CIP)数据

金融市场计量经济学/[美]坎贝尔(Campbell,J.)等著;朱平芳,刘弘等译. —上海:上海财经大学出版社,2003.4
书名原文:The Econometrics of Financial Markets
新世纪高校金融学教材译丛
ISBN 7-81049-797-9/F·682

Ⅰ.金… Ⅱ.①坎… ②朱… ③刘… Ⅲ.金融市场-计量经济学 Ⅳ.F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 067829 号

责任编辑 谷 雨
封面设计 周卫民

JINRONG SHICHANG JILIANG JINGJIXUE
金融市场计量经济学

约翰·Y.坎贝尔
安德鲁·W.罗 著
艾·克雷格·麦金雷

朱平芳 刘 弘 等 译

唐国兴 校

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)
网 址:http://www.sufep.com
电子邮箱:webmaster@sufep.com
全国新华书店经销
上海译文印刷厂印刷
上海市印刷七厂一分厂装订
2003 年 4 月第 1 版 2003 年 4 月第 1 次印刷

787mm×960mm 1/16 33.5 印张 712 千字
印数:0 001—5 000 定价:69.00 元

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

图字:09-2000-356 号

The Econometrics of Financial Markets
Copyright © 1997 by Princeton University Press
Chinese(Simplified Characters)Trade Paperback copyright © 2000
by Shanghai University of Finance & Economics Publishing House
Published by arrangement with Princeton University Press
in association with Arts & Licensing International, Inc.
ALL RIGHTS RESERVED

2003 年中文版专有出版权属上海财经大学出版社
版权所有　翻版必究

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

译者序

翻译由美国麻省理工学院的坎贝尔(Campbell)等三位著名的金融与计量经济学教授合著、普林斯顿大学出版社出版的《金融市场计量经济学》(*The Econometrics of Financial Markets*)这本集教学与研究双重功能的世界级优秀的著作，对我们这些长期在计量经济学教学与研究领域耕耘的学者来说确实不仅是一个学习和提高的好机会，也是一个不小的挑战。整整三年时间，在上海财经大学出版社的黄磊、谷雨等的支持、帮助与配合下，我们对译稿中的专业术语和复杂语句反复推敲、仔细琢磨，力争与原著在概念与意义上达到相同与接近；同时，为了确保不弄错一个公式，不漏译一个注解和一个习题，我们与上海财经大学出版社的编辑谷雨等相互反复校对。但是，我们还是不敢说书中没有错译与遗漏。在此，我们真诚地欢迎读者给我们以批评指正。

《金融市场计量经济学》出版于 1998 年，其中的内容囊括了到 1997 年为止的当代金融经济学中新的计量经济方法、杰出的研究和发现以及目前金融领域中正在进行着的令人兴奋的各种探索。我们认为这部专著一定会有助于每个认真阅读的朋友开阔视野、充实学识和启发灵感。

我国已经加入了世界贸易组织，金融市场，尤其是资本市场的开放是迟早的事情。因此，培养能够掌握和了解国际金融市场，尤其是资本市场的基本理论、基本方法和操作技能的人才刻不容缓。与此同时，我国金融与经济学术界也迫切需要超前地对金融市场的前沿理论、发展状况、前沿研究问题以及相应先进的研究方法和研究工具做充分的了解，进而为社会培养合格、有用的金融理论与应用人才，并着手选择一些有价值的课题进行深入的研究。我们认为《金融市场计量经济学》这本专著的出版一定会满足社会这一强烈的需求，它将为推动我国金融经济学理论与实践的发展产生积极的作用。

《金融市场计量经济学》这本专著与一般的著作有明显的不同。一般的著作都是作者把自己比较成熟的东西提供给读者，以供大家在研究中能够充分地引用。《金融市场计量经济学》不仅把金融市场研究中成熟的理论、方法和技能充分地告诉了大家，还把截止到 1997 年为止金融市场研究中的理论前沿、实证难题以及各种工具使用的局限等问题摆在读者面前。因此，每位认真的读者只要细心研读和思考，定会感到学到了很多东西，同时还会发现有许多极其有意义、有价值的问题可以去研究。

《金融市场计量经济学》的编写体现了两个基本的特点：

第一个特点是，在开始的章节中，对股票市场进行了专门的论述，其中关于股票市场的实证性的文献很多；同时，也讲述了适用于其他资本市场的方法，包括介绍衍生证券(第

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

9 章和第 12 章)和固定收入证券(第 10 章和第 11 章),最后一章介绍了适用于股票市场及其衍生证券的非线性方法。

第二个特点是,全书从论述资产收益的统计模型开始,然后讨论结构性很强的经济模型。例如,在第 2 章中,作者讨论了依据历史资料来预测股票收益的方法,而并没有更多地注意一般性的细节。第 3 章中讲述了股票市场的微观结构如何影响收益的短期行为。类似地,在第 4 章中讨论了个别股票收益截面样本的简单统计模型,并将这些模型运用到对事件的研究中;在第 5 章和第 6 章中讲述了资本资产定价模型和多因素模型(如套利价格理论)如何限制统计模型的各个参数;第 7 章依据变量而不是依据过去的股票收益值对股票收益的可预测性的长期事实进行了论证;第 8 章对按照预期收益产生的跨期均衡模型进行探讨;在第 10 章中,按同一原则将固定收益证券的基本处理方法进行分类;第 11 章则讨论了平衡时间结构模型。

当然,这并不是说没有遗憾。正如本书的作者在他们的序言中所说的那样,即便如此,仍有许多主题未能涉及,而许多重要的内容也只能一笔带过。例如,本书就没有涉及到近几年在金融风险管理与控制领域中运用得非常活跃的有关风险预测和控制的 VaR 方法及其应用,以及通过确定边缘分布选择合适的连接函数来确定收益的联合分布的 Coupla 这个概念和方法。同时,本书讨论的主要是美国国内的资本市场,而几乎没有涉及其他国家的资本市场,也没有力求涉及国际上的一些问题,如汇率行为或本国偏好行为(每个国家投资者都有在自己的资产组合中持有不同比例本国资产的倾向)。同时也省略了一些重要的计量经济问题,如贝叶斯分析和时间序列的频域法(frequency-domain methods)。

我们认为,任何一部优秀的著作总归有其一定的局限性,否则更好的著作就出现不了,学术进步就不可能持续。我们期望不远的将来能够看到更好、更新的类似于《金融市场计量经济学》的著作。

本书的翻译工作由朱平芳、刘弘全面负责,并对全书进行了修改和统纂。

参加其中有关章节翻译的人员为:

第 1 章　吴　谦
第 2 章　刘　弘
第 3 章　李　磊
第 4 章　刘　弘　张晓钟
第 5 章　朱平芳
第 6 章　徐剑刚
第 7 章　沈根祥
第 8 章　朱平芳
第 9 章　范龙正

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

第 10 章　徐剑刚

第 11 章　王贻志

第 12 章　夏晓燕

序言与 GMM(广义矩方法)附录　朱平芳　倪经纬

在本书的翻译过程中,受到了我们尊敬的校长谈敏教授,我们尊敬的副校长丛树海教授的积极支持与鼓励;受到了我们尊敬的老师黄树颜教授、张尧庭教授、唐国兴教授、左学金教授和英国南安普顿大学经济系高级讲师陆懋祖博士的支持、帮助与鼓励;受到了我们尊敬的师兄姜国麟副教授和美国纽约大学斯通商学院梅建平副教授的积极支持、帮助与鼓励,他们向我们提出了许多宝贵的建议与评论;受到了尊敬的上海财经大学出版社熊诗平社长、金福林副社长的支持、帮助与关心。在此,我们一并表示深深的谢意。

在本书的翻译与校对过程中,我们还得到了许多能干的学生们的帮助,他们放弃自己的休息与娱乐时间,以最大的耐心、细心和热心承担了校对译稿和索引的艰辛的任务,有力地支持了我们的工作。他们是廖远甦、徐伟明、乔居强、张伟、韩小霞、解茹、毛建萍、徐莉、刘淼等。在此,我们表示衷心的感谢。

最后,我们深深地感谢上海财经大学出版社的谷雨编辑,她的耐心、细致、高度的责任心一直贯穿本书翻译的整个过程;我们还要深深地感谢上海财经大学出版社的黄磊,他自始至终地为促成本书的成功翻译尽了最大的耐心和努力。

朱平芳　刘弘

2003 年 4 月 28 日

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

序　言

早在十五年前，也就是刚开始我们的职业生涯时，这本书的种子就已经播下了。在研究金融经济学，并开始尝试去教授它时，我们发现了几本专为金融理论而著的优秀教科书，例如达菲(1992)，华恩与利曾伯格(1988)，及因格索尔(1987)，但没有相应专为观察方法而写的教科书。

与此同时，我们参加了金融市场与货币经济学研讨会。这一研讨会由位于曼彻斯特剑桥的国家经济研究局赞助并主持。在这些会议上，吸引我们注意力的众多文章中囊括了当代金融经济学中新的计量经济方法或观察发现。我们感觉到这是金融领域中正在进行着的最令人兴奋的研究之一。为此，学生有必要尽早地了解这些资料。

1989 年，我们开始构思写作一本内容涵盖金融应用中的计量经济方法的书。该书沿用了这一领域中一些更为杰出的观察成果。我们最早于 1991 年开始写作，历时五年，几近 600 页文字，终于完成了这一艰辛的项目。尽管该书与原计划相比已显得颇长了，但最后我们还是克服了再加入一、两个新论题的诱惑，就此搁笔了。当然，在我们写作时，理论上的论著已经发展得相当快了，即使是在本书交付出版时仍是如此。尽管我们已尝试着来展现一个开阔的视野，但即便如此，仍有许多主题未能涉及，而许多其他部分我们也只能一带而过。

我们欠了很多——生活上与学识上——超出了我们所能承受的。综观我们的职业生涯，众多前辈与同仁已经贡献了许多意见、讨论、启发与友谊；我们特别要感谢安迪·艾贝尔、本·伯南基、斯蒂夫·塞克海提、约翰·考克斯、安格斯·迪顿、吉恩·法马、布鲁斯·格伦迪、杰里·豪斯曼、奇弗·华恩、默文·金、诺布·基越塔基、皮特·基利、格雷格·曼昆、鲍布·默顿、惠特尼·纳维、鲍布·希勒、基姆·托宾阿塔德·泽尔纳。

关于本书的内容与说明，许多人也向我们提出了宝贵的评论与建议。我们感谢戴维·巴克斯、尼克·巴伯理斯、戴维·巴尔、迪米·特斯、伯特·希玛斯、蒂姆·鲍勒斯利夫、乔治·康斯坦丁尼德斯、约翰·考克斯、泽维尔·加贝克斯、拉斯·汉森、坎贝尔·哈维、约翰·希顿、勒哲·汉茨切尔、罗杰·华恩、拉维·杰根纳森、高坦·考尔、丹·纳尔逊、安兰·罗伊、鲍勃·希勒、汤姆·斯托克尔、琼·勒克维拉、乔恩·万以及哈佛大学、麻省理工学院、普林斯顿大学与沃顿商学院的博士生们。由于他们，这本书经过了“市场检验”并得以精益求精。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在写作过程中，我们大量地依靠了众多能干的研究助手们，他们是皮特·阿德麦克、桑琼恩·基姆、马丁·莱陶、特伦斯·利姆、康斯坦丁·彼得罗弗、春申·周。尤其是马特·范弗拉克与刘易斯·维塞拉，他们俩承担了校对手稿与配备索引的艰巨任务。

我们十分感激斯蒂法尼·霍格在准备这份手稿的电子版本时，所表现出的非常技能与耐心。同时也感激 Archetype 的排字员为本书最终版本的成型所付出的努力。

我们感谢彼得·多尔蒂，普林斯顿大学出版社的编辑。他的耐心、鼓励与支持贯穿于这一项目始终。

在本书形成的各阶段中，几个组织向我们提供了慷慨的支持。特别地，我们要感谢 Batterymarch 金融管理部、国家经济研究局、国家自然科学基金、John M. Olin 基金、Alfred P. Sloan 基金以及设在哈佛大学、麻省理工学院、普林斯顿大学与沃顿商学院的研究中心。

最后，对于家庭的支持与爱护，我们的感激之情不胜言表。

约翰·Y. 坎贝尔(John Y. Campbell)
安德鲁·W. 罗(Andrew W. Lo)
艾·克雷格·麦金雷(A. Craig MacKinlay)

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

目　录

译者序/1
序言/1

1　导言/1
1.1　本书的组织结构/2
1.2　有用的背景知识/3
1.2.1　数学背景知识/3
1.2.2　概率与统计背景知识/4
1.2.3　金融理论背景知识/5
1.3　符号表示/5
1.4　价格、收益和复合法/6
1.4.1　定义和惯用法/6
1.4.2　收益的边际、条件及联合分布/9
1.5　市场效率/16
1.5.1　效率和迭代期望规律/17
1.5.2　市场效率的可预测性/18

2　资产收益的可预报性/20
2.1　随机游动假设/21
2.1.1　随机游动1:独立同分布增量/23
2.1.2　随机游动2:独立增量/24
2.1.3　随机游动3:不相关增量/24
2.2　随机游动1的检验:独立同分布增量/24
2.2.1　传统统计检验/25
2.2.2　顺序和反转,游程/25
2.3　随机游动2的检验:独立增量/32
2.3.1　滤波器法则/32

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

2.3.2 技术分析/33
2.4 随机游动3的检验:不相关增量/34
2.4.1 自相关系数/34
2.4.2 多用途统计量/36
2.5 长线收益/43
2.5.1 长线推断的问题/44
2.6 长期相关性检验/45
2.6.1 长期相关性的例子/46
2.6.2 赫斯特—曼德尔布罗特(Hurst-Mandelbrot)标度重定极差统计量/48
2.7 单位根检验/49
2.8 近期实证的结果/50
2.8.1 自相关/51
2.8.2 方差比/52
2.8.3 叉自相关及领先—滞后关系/57
2.8.4 利用长线收益的检验/61
2.9 结论/63

3 证券市场的微观结构/65
3.1 异步交易/66
3.1.1 一个异步交易的模型/67
3.1.2 进一步的扩展和推广/77
3.2 证券的买卖价差/78
3.2.1 出价—要价的波动/79
3.2.2 买卖价差的构成/80
3.3 交易数据建模/84
3.3.1 建模动机/85
3.3.2 取整模型和栅栏模型/89
3.3.3 次序PROBIT模型/98
3.4 近期的实证研究成果/102
3.4.1 异步交易的实证分析/103
3.4.2 有效买卖价差的估计/108
3.4.3 交易数据的模型/109
3.5 结论/116

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

4 事件研究分析/119
4.1 事件研究的概述/120
4.2 事件研究举例/122
4.3 正常绩效度量模型/122
4.3.1 常量—均值—收益模型/123
4.3.2 市场模型/123
4.3.3 其他统计模型/124
4.3.4 经济模型/125
4.4 度量和分析非正常收益/125
4.4.1 市场模型的估计/126
4.4.2 非正常收益的统计特性/126
4.4.3 非正常收益的加总/127
4.4.4 正常收益模型的敏感性/129
4.4.5 收入公告例子的 CARs/130
4.4.6 聚类推理/134
4.5 修正原假设/134
4.6 势分析/135
4.7 非参数检验/138
4.8 截面模型/140
4.9 进一步的问题/141
4.9.1 抽样区间的作用/141
4.9.2 事件日期不确定性的推理/142
4.9.3 可能的偏差/143
4.10 结论/144

5 资本资产定价模型/147
5.1 资本资产定价模型的说明/147
5.2 来自数学有效集的一些结果/149
5.3 估计和检验的统计框架/153
5.3.1 夏普和林特纳(Sharpe-Lintner)的 CAPM/153
5.3.2 布莱克的 CAPM/159
5.4 检验尺度/163
5.5 检验的功效/165
5.6 非正态和非独立同分布收益/168

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

5.7 检验的工具/170
5.7.1 实证结果的归纳/170
5.7.2 实证解释的工具/172
5.7.3 市场组合的不可观测性/173
5.8 截面回归/174
5.9 结论/175

6 多因素定价模型/177
6.1 理论背景/177
6.2 估计和检验/179
6.2.1 存在无风险资产时的投资组合因素/180
6.2.2 不存在无风险资产时的投资组合因素/181
6.2.3 宏观经济变量因素/182
6.2.4 均值—方差有效前沿上的因素投资组合/184
6.3 风险溢酬与预期报酬的估计/185
6.4 因素的选取/187
6.4.1 统计方法/187
6.4.2 因素的个数/190
6.4.3 理论方法/191
6.5 实证结果/192
6.6 偏离精确因素定价的解释/194
6.6.1 精确因素定价模型、均值—方差分析和最优正交投资组合/194
6.6.2 平方夏普比率/196
6.6.3 区分不同理论假设的意义/197
6.7 结论/201

7 现值关系/202
7.1 股利、股价、收益之间的关系/203
7.1.1 现值与不变预期收益的关系/203
7.1.2 理性泡沫/206
7.1.3 时变预期收益下现值关系的一个近似/208
7.1.4 价格和收益:一个简单的例子/211
7.2 现值关系和美国股市的价格行为/213
7.2.1 长期水平回归/213

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

7.2.2 波动性检验/219
7.2.3 向量自回归方法/223
7.3 结论/229

8 跨期均衡模型/232
8.1 随机折现因子/234
8.1.1 变易性边界/236
8.2 具有幂效用的消费导向资产定价/243
8.2.1 对数正态模型中的幂效用/244
8.2.2 幂效用和广义矩方法/250
8.3 市场摩擦/251
8.3.1 市场摩擦和雅格纳詹边界/251
8.3.2 市场摩擦和总消费数据/253
8.4 更一般的效用函数/260
8.4.1 习惯定式/261
8.4.2 偏好的心理模型/265
8.5 结论/267

9 衍生证券定价模型/269
9.1 布朗运动/270
9.1.1 布朗运动的构造/271
9.1.2 随机微分方程/274
9.2 衍生证券定价模型的简要回顾/277
9.2.1 布莱克—斯科尔斯和默顿方法/278
9.2.2 鞅定价方法/281
9.3 参数期权定价模型的实现/282
9.3.1 资产价格变动的参数估计/282
9.3.2 在布莱克—斯科尔斯模型中估计 σ/286
9.3.3 期权定价估计量精确性的计量/290
9.3.4 资产收益率可预测性效应/293
9.3.5 隐含波动率为估计量/299
9.3.6 随机波动率模型/301
9.4 用蒙特卡罗模拟对依赖于路径的衍生证券进行定价/303
9.4.1 离散时间与连续时间/304

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

9.4.2 模拟需多少次/304
9.4.3 与解析解的比较/305
9.4.4 计算的效率/307
9.4.5 拓展与局限性/309
9.5 结论/310

10 固定收益证券/313
10.1 基本概念/314
10.1.1 折现债券/314
10.1.2 附息债券/317
10.1.3 估计零息期限结构/323
10.2 解释利率期限结构/327
10.2.1 预期假说/327
10.2.2 收益率之差和利率预测/331
10.3 结论/335

11 期限结构模型/337
11.1 关联收益模型/338
11.1.1 同方差单变量模型/339
11.1.2 平方根单因素模型/344
11.1.3 二元模型/346
11.1.4 超关联收益模型/348
11.2 期限结构模型与数据集的拟合/349
11.2.1 真实利率债券、名义利率债券和通货膨胀/349
11.2.2 关联收益模型的经验证明/352
11.3 固定收入衍生证券定价/359
11.3.1 准确拟合当前期限结构/360
11.3.2 远期和期货/362
11.3.3 期限结构模型的期权定价/364
11.4 结论/366

12 金融数据中的非线性/368
12.1 单变量时间序列中的非线性结构/369
12.1.1 一些参数模型/371

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

12.1.2 非线性结构的单变量检验/374
12.2 变动易变性模型/378
12.2.1 单变量模型/379
12.2.2 多变量模型/386
12.2.3 一阶矩和二阶矩的联系/389
12.3 非参数估计/393
12.3.1 核回归/394
12.3.2 最佳窗宽选择/396
12.3.3 平均导数估计/397
12.3.4 应用：估计牌价密度/399
12.4 人工神经网络/403
12.4.1 多层次视感控器/404
12.4.2 基本径向函数/406
12.4.3 投影寻踪回归/408
12.4.4 学习网络的局限性/408
12.4.5 应用：了解布莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)公式/409
12.5 过度拟合和数据探寻/412
12.6 结论/413

GMM 附录/415
A.1 线性工具变量/415
A.2 广义矩方法/419
A.3 序列相关和异方差/421
A.4 广义矩方法和最大似然方法/423

参考文献/427
人名对照表/472
术语对照表/482

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

图目录

1.1 红利支付的时间约定/9
1.2 平稳正态密度函数的比较/14
3.1 无交易现象引起的自相关系数/75
3.2 纽约证券交易所的五只股票日价的小数部分和价格变动的直方图(1990年1月2日～1992年12月31日)/88
3.3 纽约证券交易所的五只股票日收益的相邻收益图(1990年1月2日～1992年12月31日)/90
3.4 次序 Probit 模型/100
4.1 事件研究的时间轴/125
4.2a 收益公告的市场模型的累积非正常收益图/132
4.2b 收益公告的常量—均值—收益模型的累积非正常收益图/133
4.3 拒绝非正常收益为零的原假设的事件研究检验统计量 J_1 的势值,此时公司非正常收益均方差的平方根是(a)2%和(b)4%/138
4.4 对于不同的样本时间间隔,拒绝非正常收益为零的原假设的事件研究检验统计量 J_1 的势值,此时日时间间隔的公司非正常收益平均方差的平方根为4%/142
5.1 不存在无风险资产的最小方差组合/151
5.2 存在无风险资产的最小方差组合/153
6.1 四种假设下 CAPM 之零截距检验的统计分布/200
7.1 对数实际股票价格和红利序列,1872年至1994年美国年度数据/226
7.2 对数实际股票价格和所估计的红利部分,1876年至1994年美国年度数据/227
7.3 对数红利一股价比率和所估计的红利部分,1876年至1994年美国年度数据/228
8.1a 资产收益的均值—标准差图/238
8.1b 隐含的随机折现因子标准差—均值图/239
8.2a 单个超额资产收益的均值—标准差图/241
8.2b 隐含的随机折现因子标准差—均值图/241
8.3 美国1891年到1994年的年度数据隐含的随机折现因子适用区域/242
9.1 离散时间随机游动的样本路径/272

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

9.2 无漂移布朗运动的样本路径与条件期望/274
10.1 1987 年 1 月零息收益率和远期利率曲线/315
10.2 远期交易的现金流/316
10.3 附息债券久期的计算/318
10.4 价格—收益率关系/321
10.5 1952～1991 年短期利率和长期利率/329
11.1 短期利率除以短期利率的 γ 次幂的变化图/356
11.2 利率年限/358
12.1 帐篷图/373
12.2 1926～1994 年月度美国股票超额对数收益/380
12.3 漂移的和有倾斜的绝对值函数/383
12.4 $Y_t = \mathrm{Sin}(X_t) + 0.5\varepsilon_t$ 的模拟/395
12.5 核估计/396
12.6 看涨垂直差价买卖的报酬函数及修匀/402
12.7 二元门限模型/404
12.8 亥维赛和逻辑斯蒂克激活函数比较/405
12.9 有一个隐含层的多层次视感控器/406
12.10 MLP(1,5)模型 $Y_t = \mathrm{Sin}(X_t) + 0.5\varepsilon_t$/407
12.11 典型的模拟训练路径(参数见正文)/410
12.12 四个典型非线性类的 RBF 模型/411

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表目录

1.1 1962～1994 年股票市场收益/15
2.1 随机游动和鞅假设的分类/21
2.2 漂移为 μ 的随机游动的期望游程/31
2.3 分部差分过程的自相关函数/47
2.4 每日、每周以及每月的股票指数收益自相关系数/51
2.5 周股票指数收益的方差比/53
2.6 周按规模排序组合证券收益的方差比/55
2.7 个股周收益方差比/57
2.8 按规模排序的组合证券收益的叉自相关矩阵/58
2.9 叉自相关矩阵的不对称性/60
3.1 纽约证券交易所的股票日收益的概括统计量/86
3.2 五只股票的价格相对变动频数/87
3.3a 离散偏差上界的期望值(日收益)/93
3.3b 离散偏差上界的期望值(月收益)/95
3.3c 离散偏差上界的期望值(年收益)/96
3.4 证券组合收益的自相关系数矩阵/104
3.5 日无交易概率的估计/106
3.6 周收益指数的自相关系数/107
3.7 六只股票交易数据的概括统计量/110
3.8a 次序 Probit 模型的临界分位点估计/114
3.8b 次序 Probit 模型的系数估计/114
4.1 收益公告信息内容的事件研究的非正常收益/130
4.2 拒绝非正常收益为零的原假设的事件研究检验统计量 J_1 的势值/137
5.1 使用大样本检验统计量的 Sharpe-Lintner CAPM 的有限样本检验尺度/165
5.2 利用统计量 J_1 对 Sharpe-Lintner CAPM 模型的 F 检验的功效/167
5.3 Sharpe-Lintner CAPM 检验的实证结果/172
6.1 零截距 F-检验精确因素定价的结果概述/192

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

7.1 股票对数收益对股利—股价比对数的长期水平回归/215
7.2 股票收益对数对随机去势的短期利率的长期水平回归/216
8.1 消费增长与资产收益的矩/246
8.2 对收益和消费增长的工具变量回归/249
9.1 随机微分的乘法法则/275
9.2a $\hat{\alpha}$ 的渐近标准差/289
9.2b $\hat{\sigma}^2$ 的渐近标准差/290
9.3 V_f 的比较静态折现值/292
9.4 布莱克—斯科尔斯看涨期权灵敏度估计的渐近方差/293
9.5 负自相关回报资产的期权价格/298
9.6 回望期权价格的蒙特卡罗估计/306
10.1 选定债券的麦考雷久期和修正久期/319
10.2 期限结构变量的均值和标准偏差/328
10.3 回归系数 $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\gamma}$/332

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

1. 导言

金融经济学是一门具有高度实证性的学科，也许是在经济学各个分支中，甚至是一般社会科学中最具有实证性的学科。这并不奇怪，因为金融市场不仅仅是对理论抽象化的虚构，在实践中应用也十分广泛，并且对全球经济的稳定和发展起了十分关键的作用。因此，从专业上看金融理论的某些方面可能很抽象，但它对金融模型的建立却很有实用意义，而其他可比学科的建模相对来说并不这样要求[①]。

虽然金融经济学具有实证性，但与其他社会学科一样，它几乎完全是非经验的。因此，金融经济学家进行推断的基本方法是金融计量经济学，即以模型为基础的统计推断。计量经济学是经济学最重要的分支之一，金融计量经济学区别于金融学其他分支的显著特点是不确定性在金融理论及其经验应用方面起了关键作用。每一个金融模型的出发点都是投资者面对的不确定性，基本内容都涉及到不确定性对投资者的影响。实际上，在不存在不确定性的情况下，金融计量经济学的各种问题就仅仅简化为微观经济学的基本活动。作为一门学科，金融计量经济学是在不确定性的基础上进行预测的。

不确定性对金融计量经济学具有重要的意义。运用统计理论对金融模型进行估计和检验随机游动这两方面都与模型的不确定性密切相关。例如，资产价格的鞅模型对检验诸如价格增长的自相关系数等统计问题有着十分明确的涵义（见第 2 章）。理论与实证分析之间的关系在相当一段时间内是自然科学的标志，但金融理论与实证分析之间关系的密切程度是其他社会学科无法相比的，它是金融计量经济学最有意义的方面之一，因此我们感到很有必要编写这本研究生使用的课本，将这一有重要意义的领域介绍给更多的读者。

第 1.1 节概括了在这本书中我们将讲述的主题内容，以及如何组织这些内容。我们还将介绍学习金融计量经济学或经验实证金融学课程时使用本书的方法。

---

① 伯恩斯坦（Bernstein，1992）提供了现代金融经济发展中理论与实践之间相互影响与作用的非常有趣的说明。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

第 1.2 节描述了对金融计量经济学最有用的背景知识，并对那些希望对这些知识进行复习或学习的读者建议一些参考书目。从经验来看，学生们往往在了解了背景知识是如何运用之后，就容易激发他们去学习必要的背景知识。因此，我们鼓励那些对金融计量经济学有浓厚兴趣但却有较少准备的读者仔细阅读这一章节。

在有关这方面的书籍中，具有统一的符号表示就成为不可忽视的问题。因此第 1.3 节介绍了各种符号表示法。我们要求读者能仔细阅读这部分内容，尽量减少把 $\hat{\beta}$ 错当成 β，X 误认为 $\mathbf{X}$ 等类似问题可能产生的困惑。

第 1.4 节用一些惯用的符号，对所研究的一些基本对象(如价格、收益、复利法以及概率分布)下定义，并利用这些符号作一些讨论。虽然许多内容对学金融的学生和投资专家比较熟悉，但我们认为进行简要的回顾，对许多读者来说，会有所帮助。

第 1.5 节转入了一个完全不同的课题：市场效率假设。由于在这一假设上花费过多的精力会妨碍我们研究其他更具体的问题，因此我们在这里先不讨论这个问题。许多论述涉及到经验上无法确定的理论逻辑法则，因此不属于本书的讨论范围。但为了保持书的完整性(没有任何著作可以完全不考虑市场效率问题)，第 1.5 节对这一专题进行了简要的讨论。

1.1 本书的组织结构

编写这本书时，我们遵循了两条基本原则，第一条原则是前面的章节对股票市场专门进行讲述。虽然所讨论的方法中有不少同样适用于其他资产市场，但是关于股票市场的实证性的文献很多，因此我们主要讨论股票市场，从而可使讨论更加具体。在后面的章节中，我们介绍了衍生证券(第 9 章和第 12 章)和固定收入证券(第 10 章和第 11 章)，本书的最后一章介绍了适用于股票市场及其衍生证券的非线性方法。

第二条原则是我们从论述资产收益的统计模型开始，然后讨论结构性很强的经济模型。比如第 2 章中我们讨论了依据历史资料来预测股票收益的方法，而并没有更多地注意一般性的细节。第 3 章中我们讲述了股票市场的微观结构如何影响收益的短期行为。类似地，在第 4 章中我们讨论了个别股票收益截面样本的简单统计模型，并将这些模型运用到对事件的研究中；在第 5 章和第 6 章中我们讲述了资本资产定价模型和多因素模型(如套利价格理论)如何限制统计模型的各个参数；第 7 章中讨论依据变量而不是过去的股票收益值对股票收益的可预测性的长期事实进行了论证；第 8 章对按照预期收益产生固定时间变动的动态平衡模型进行探讨；在第 10 章中，我们按同一原则将固定收入证券的基本处理方法进行分类；第 11 章讨论平衡时间结构模型。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

我们力图使每一章节都尽可能地自成体系。虽然一些章节自然而然地相互关联(如第 5 章和第 6 章及第 10 章和第 11 章),但显然没有必要将这本书从头读到尾,大部分教师会发现一学期的教学内容太多。在一学期的课程中有许多使用此书的方法。例如,教师可以在第 2、第 3 章中讨论股票短期时间序列行为,然后在第 4、第 5、第 6 章概括各种截面样本模型,接下来在第 8 章讨论样本平衡模型,最后用第 8 章和第 12 章来讨论衍生证券和非线性方法作为更深的课题。其他教师可能首先在第 2、第 7 章对股票收益的长期和短期的可预测性提供事例,然后在第 5、第 6、第 8 章中讨论静态和跨期均衡理论,最后在第 10、第 11 章中讲述固定收入证券。

在本书中我们没能涉及一些重要课题。最为明显的是我们讨论的主要是美国国内的资产市场,而几乎没有涉及其他国家的资产市场,也没有力求涉及国际上的一些问题,如汇率行为或本国偏好行为(每个国家投资者都有在自己的资产组合中持有不同比例本国资产的倾向)。我们也省略了一些重要的计量经济问题,如贝叶斯分析和时间序列的频域法(frequency-domain methods)。在许多情况下,我们选择书的题材受本书双重目的的影响,即对金融计量经济模型的方法进行解释,并介绍金融实证文献。本书主要侧重于论述涉及计量经济的主题,有时忽略了对具有同样重要性的内容——包括近期在与计量经济学联系更直接的金融领域所做大量研究工作的介绍。

1.2 有用的背景知识

学习金融计量经济学需要具备一定的背景知识,扎实的数学、概率论与数理统计以及金融理论知识的基础对从事金融计量经济研究者们来说是不可缺少的,也恰恰是这一原因,学习金融计量经济学需要付出艰苦的努力。为了帮助读者获取有关背景知识(这是学生最直接、也是最集中的问题),我们在这一章节中概括了计量经济学不可缺少的数学、概率、统计和金融理论知识。我们希望这一概述对那些求知欲强的读者自学具有指导作用,这也是本书背景知识的一部分内容。

1.2.1 数学背景知识

学习金融计量经济学最有用的数学背景知识和一般计量经济学一样,即:多元微积分、线性代数和矩阵分析。每一部分的参考书分别有:莱恩(Lang,1973),斯特朗(Strang,1976),以及麦哲纳斯和纽德克(Magnus and Neudecker,1988)。主要内容包括:

- 多元积分
- 有约束的多变量最优化

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

- 矩阵代数
- 矩阵微分的基本规则

此外，学习期权及其他衍生定价模型及连续时间的资产定价模型，需要对伊藤(Itô)积分或随机微积分有一定的了解。默顿(Merton，1990)对此进行了全面透彻的处理，默顿最早将随机微分法应用于金融经济学。更倾向于数学的读者也可以参考强恩和威廉斯(Chung and Williams，1990)的著作。

1.2.2 概率与统计背景知识

基础概率论是任何涉及不确定性学科的必备知识。虽然概率论的数学复杂程度差异很大(从投掷硬币到测度论基础)，但是也许最有用的是强调基本概率推理的直观性和技巧性的方法。运用这一方法的一本经久不衰的著作是由费勒(Feller，1968)编写的。布雷曼(Brieman，1992)也在测度论的基础上使用了类似的直观性。概率论的主要内容包括：

- 随机变量的定义
- 独立性
- 分布和密度函数
- 条件概率
- 收敛方式
- 大数定律
- 中心极限定理

统计学当然是金融计量经济学家根据数据进行推断的主要依据，有了概率论的知识后，统计学就可以在数学复杂程度不同的各个水平上讲述。而且，统计学不像概率论那样范围比较狭窄，随着其日渐成熟，范围逐步扩大，产生了许多界定明确的小分支，如多元随机变量分析、非参数分析、时间序列分析、次序统计量、方差分析、决策理论、贝叶斯统计等。金融计量经济学家在不同的情况使用不同的分支，因此很难为所有这些分支提供惟一的参考书。当然，这样的参考书也还是存在的，如斯图尔特和奥德(Stuart and Ord's，1987)的《绝技》(法语：*tour de force*)。其他与我们学习本书有关的更简要的一本参考书是西尔维(Silver，1975)写的专著。还有汉密尔顿(Hamilton，1994)写的一本关于时间序列分析的专著。主要内容包括：

- 奈曼—皮尔逊(Neyman-Pearson)假设检验
- 线性回归
- 最大似然分析
- 基础时间序列分析(静态、自回归、ARMA 过程、向量自回归、单位根等)
- 基础贝叶斯推断

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

附加一定量的随机过程对时间连续的金融模型来说是必不可少的，至少对考克斯和米勒(Cox and Miller，1965)以及霍尔、波特和斯通(Hoel，Port，and Stone，1972)的文献了解是必须的。

1.2.3 金融理论背景知识

由于金融计量经济学对金融模型的实证性运用和评价具有决定作用，因此具有扎实的金融理论背景知识是极其重要的。关于这一方面内容的著作有：达菲(Duffie，1992)，华恩和利曾伯格(Huang and Lizerberger，1988)，因格索尔(Ingersoll，1987)和默顿(Merten，1990)。重要的内容有：

- 风险转移和预期效用理论
- 均值—方差的静态资产组合理论
- 静态资本资产定价模型(CAPM)和套利定价理论(APT)
- 动态资产定价模型
- 期权定价理论

1.3 符号表示

我们发现，为一本有关这方面的书籍规定一套稳定的符号表示法是不容易的，困难来自金融计量经济学跨越了金融理论多个不同的组成部分，而每一部分都有一套惯用符号表示法。但是一种文献中的惯用符号法经常与另一种文献的惯用法互相冲突。我们不可避免地或者放弃本书不同章节符号的内部一致性，或者放弃与专业文献所使用的符号的外部一致性。本书中我们选择了放弃本书不同章节符号的内部一致性，使用以下一些惯用符号法：

- 用黑体字来表示向量和矩阵，一般字体表示非向量，可能的情况下，一般用大写黑体字母表示矩阵，小写黑体字母表示向量。如 $\mathbf{x}$ 是向量，$\mathbf{X}$ 是矩阵。
- 在可能的地方，我们用大写字母表示变量，小写字母表示相同变量的自然对数。如 P 表示资产价格，则 p 表示资产价格的自然对数。
- 对一个新变量的标准表示符号是希腊字母 $\boldsymbol{\varepsilon}$。当我们需要定义几个不同的新变量时，就用不同的希腊字母 η，ξ 及 ζ 来表示。
- 在可能的情况下，我们用希腊字母来表示参数或参数向量。
- 我们用希腊字母 ι 表示数值为 1 的向量。
- 用在字母上加帽子来表示样本估计值，所以如果 β 是一个参数，则 $\hat{\beta}$ 是 β 的估计

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

值。

当我们使用下标时，通常用大写字母来表示其上限。可能时，用相同的大写字母表示这一下标的上限。如下标 t 从 1 到 T，下标 k 从 1 到 K，等等。有一个例外就是我们令下标 i(表示资产)从 1 变化到 N，因为通常都是这样做的。我们用 t 和 τ 表示时间下标，i 表示资产下标，k、m 和 n 表示超前和滞后数的下标，j 表示一般下标。

- 按惯例，如果一个变量在 t 期末之前是知道的话就给它标上时间 t 的下标。于是，R_t 表示资产从 $t-1$ 期末到 t 期末这一时期为止的资产收益。
- 在表示方差—协方差矩阵时，我们用 $\mathbf{\Omega}$ 表示资产收益的方差—协方差矩阵，$\mathbf{\Sigma}$ 表示时间序列模型或截面样本模型的残差的方差—协方差矩阵，$\mathbf{V}$ 表示参数估计量的方差—协方差矩阵。
- 本书中有时也使用花写体字母，花写体 $\mathcal{N}$ 表示正态分布，花写体 $\mathcal{L}$ 表示对数似然函数。
- 我们还用 Pr(·)表示一事件发生的概率。

学术文献里使用了许多专业词汇。我们会不可避免地频繁使用这些专业词汇。当这些词首次出现在本书中时，我们用斜体字母表示。

1.4 价格、收益和复合法

实际上，金融经济学的每一方面都涉及到收益，因此我们主要研究收益而不是价格。这里至少有两个原因。

其一，对一般投资者而言，金融市场可能被认为接近完全竞争市场，因此投资规模不影响价格变化。由于投资“技术”是规模收益不变的，所以，收益是投资机会的一个不受规模限制的完整概括。

其二，由于以下明显的理论和实证原因，收益比价格具有更吸引人的统计特征，如平稳性和遍历性。尤其是一般动态均衡模型经常产生不稳定的价格，却产生稳定的收益[如见第 8 章和卢卡斯(Lucas，1978)]。

1.4.1 定义和惯用法

设 P_t 表示 t 期末的资产价格，并假定当期这一资产不支付红利。资产从 $t-1$ 期到 t 期的简单净收益*R*$_t$ 被定义为：

$$R_t=\frac{P_t}{P_{t-1}}-1 \tag{1.4.1}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

简单的资产总收益是 1 加上资产净收益，即 $1+R_t$。

从这一定义中可明显看出，从 $t-k$ 期到 t 期最近 k 个时期的资产总收益可记为 $1+R_t(k)$，它等于从 $t-k+1$ 到 t 这段时间内 k 个单期资产收益的乘积，即：

$$1+R_t(k)\equiv(1+R_t)\cdot(1+R_{t-1})\cdots(1+R_{t-k+1})=\frac{P_t}{P_{t-1}}\cdot\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\cdot\frac{P_{t-2}}{P_{t-3}}\cdots\frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}}=\frac{P_t}{P_{t-k}} \quad (1.4.2)$$

最近 k 个时期的净收益[记为 $R_t(k)$]等于 k 期资产总收益减 1，这些多时期的收益就称为复合收益。

虽然收益不受规模的限制，但仍应强调收益并非无单位的，它经常按时间间隔进行定义，如某个“时期”的收益率。事实上，从流量这一角度定义 R_t 为收益率，虽然比较复杂但更准确。因此，在没有确切指定收益水平时，20％的收益并不是对投资机会的完整描述。在学术文献中，收益水平通常表达得很明确。比如，人们常用“使用了 CRSP 每期收益资料”的说明作为数据描述的一部分。

然而，专业人士认为在金融出版物上，一年的收益水平通常被认为是很含蓄的。因此，如果不指明，20％的收益一般被认为是每年收益率为 20％。而且，多年收益常常进行年率化，从而可使不同水平的投资具有可比性。所以：

$$\text{年率化}[R_t(k)]=\left[\prod_{j=0}^{k-1}(1+R_{t-j})\right]^{\frac{1}{k}}-1 \quad (1.4.3)$$

由于单个时期的收益一般数量较小，因此常常用一阶泰勒展开式近似地对多年收益进行年率化：

$$\text{年率化}[R_t(k)]\approx\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}R_{t-j} \quad (1.4.4)$$

这一近似值是否合适取决于其用在什么地方。也许它可以用来对许多资产的投资效果迅速地进行大致比较。但在更精确的计算中，就必须考虑收益的易变性，此时泰勒公式展开式中的高阶项就不能忽视，近似值(1.4.4)就不合适了。这种估计法的惟一好处就是计算方便，因为算术平均比几何平均更容易计算，但是随着计算能力越来越方便和经济，这一优势就大大削弱了。

连续复合法

计算几何平均数[如表达式(1.4.3)]比较困难，因此就必须采用另一种复合收益法，这一方法虽然不是渐近的，但对资产收益模型却有着十分重要的意义，这种方法就是连续复合法。资产的连续复合收益或对数收益 r_t 被定义为总收益 $(1+R_t)$ 的自然对数。

$$r_t\equiv\log(1+R_t)=\log\frac{P_t}{P_{t-1}}=p_t-p_{t-1} \quad (1.4.5)$$

其中，$p_t\equiv\log P_t$。

当我们要强调 R_t 与 r_t 之间的区别时，R_t 是指简单收益。这时的符号表示与我们用

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

小写字母表示大写字母对数的惯用法略有不同。即，$r_t=\log(1+R_t)$而不是$r_t=\log(R_t)$。我们这样表示是为了与标准惯用法保持一致。

当我们考虑到多时期收益时，连续复合收益的优点就显而易见了。

$$\begin{aligned} r_t(k) &= \log(1+R_t(k)) = \log((1+R_t)\cdot(1+R_{t-1})\cdots(1+R_{t-k+1})) \\ &= \log(1+R_t)+\log(1+R_{t-1})+\cdots+\log(1+R_{t-k+1}) \\ &= r_t+r_{t-1}+\cdots+r_{t-k+1} \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

因此，多期连续复合收益就是单期复合收益的连续简单加总。复合法，即连乘运算，是通过取对数转化为加法运算。然而，这种简化运算不只是把乘法简化为加法(由于计算器和计算机的使用，这种简化就是次要的)，更重要的是对资产收益在一定时期的统计行为模型化，即加法运算比连乘运算更容易表现出时间序列的特征，在第二章中就可以看出。

连续复合收益存在一个缺点，即资产组合的简单收益是资产本身的简单收益的加权平均，而每一种资产的权数是这种资产在投资组合价值中的份额。如果给投资组合P的第i种资产赋一权数w_{ip}，那么资产组合在t时期的收益R_{pt}就与各种资产的收益$R_{it}(i=1,\cdots,N)$有关，$R_{pt}=\sum_{i=1}^{N}w_{ip}R_{it}$。遗憾的是，连续复合收益并不具有这一方便的特性。由于和的对数不等于对数的和，r_{pt}不等于$\sum_{i=1}^{N}w_{ip}r_{it}$。

在实际运用中，这一问题往往是次要的。当计算短期内的收益时，其近于零，投资组合的连续复合收益就接近个别资产的连续复合收益的加权平均，即$r_{pt}\approx\sum_{i=1}^{N}w_{ip}r_{it}$①。在第3章中就使用了这种估计法。然而当研究资产的截面样本时，一般使用简单收益，如第4～6章。当研究收益的短期行为时，就使用连续复合收益，如第2章和第7章。

红利支付

对于定期支付红利的资产，我们必须修正收益和复合收益的定义。D_t表示资产在时刻t的红利，并且由于惯用法，这一红利在价格为P_t时，t日以前支付的红利。因此，P_t就是第t日除息之后的价格。人们可能会用P_t表示一个时期末的资产价格，如图1.1。

那么在第t日的简单净收益可以定义为：

$$R_t=\frac{P_t+D_t}{P_{t-1}}-1 \quad (1.4.7)$$

多时期和连续复合收益可以按照不支付红利的情况计算收益。注意支付红利资产的连续复合收益$r_t=\log(P_t+D_t)-\log(P_{t-1})$，它是价格对数和红利对数的非线性函数，但当价格与红利之比不易变化时，这一函数可以通过价格对数和红利对数的线性函数进行估计，具体计算方法见第7章。

① 在极限中时间是连续的，第9章的9.1.2节中讨论的伊藤引理用来说明简单和连续的复合收益。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

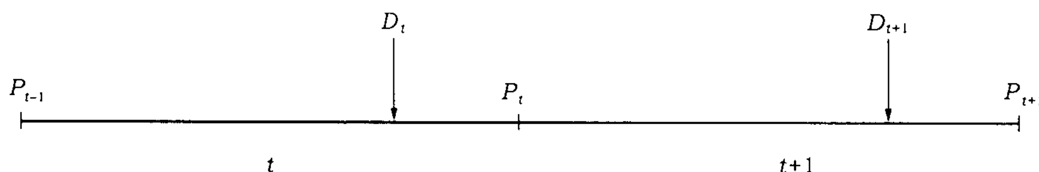


图 1.1 红利支付的时间约定

剩余收益

剩余收益可以定义为资产收益与某一参照资产收益之间的差异，有了这一概念，使得研究工作很方便。参照资产经常被认为是无风险的，而且实际上通常是短期债券收益。通过简单收益表示资产 i 的简单剩余收益为：

$$Z_{it}=R_{it}-R_{0t} \tag{1.4.8}$$

其中，R_{0t}是参照资产收益，或者也可定义为剩余资产的对数：

$$z_{it}=r_{it}-r_{0t} \tag{1.4.9}$$

剩余收益也可被定义为长期资产为 i、短期资产为参照资产、初期净投资为零的套利资产组合的报酬。由于初期投资为零，则套利资产组合的收益尚未被定义，但其美元报酬与上面定义的剩余收益成比例。

1.4.2 收益的边际、条件及联合分布

我们已对资产收益作了仔细的定义，现在开始研究各种资产在某段时期的行为。也许资产收益最重要的特征是随机性。例如，IBM 股票在下一个月的收益现在是不知道的，人们所能做的主要是对原始资料及其不确定性进行明确的模型化，据此进行分析判断。这种不确定性的特征使金融经济学区别于其他社会科学。虽然经济学和社会学的其他分支也有随机现象的模型，但不确定性对其所起的作用不如在金融资产定价中所起的作用。倘若没有不确定性，许多金融经济文献，无论是理论方面的，还是实证方面的，都是多余的。因此，一开始我们就必须明确地说明资产收益可能表现出来的各种不确定性的类型。

联合分布

考虑在时刻 t 的一组 N 个资产，第 i 个资产在时刻 t 的简单收益为 R_{it}，其中 $t=1,2,\cdots T$；$i=1,2,\cdots N$。这组简单收益数据集$\{R_{it}\}$最一般的模型是其联合分布函数：

$$G(R_{11},\cdots,R_{N1};R_{12},\cdots,R_{N2};\cdots;R_{1T},\cdots,R_{NT};\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) \tag{1.4.10}$$

其中，$\mathbf{x}$ 是状态变量的向量，这些变量反映了决定资产收益的经济环境，$\boldsymbol{\theta}$ 是惟一确定

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

G 的固定参数的向量。为了表示方便，一般情况下我们将隐去联合分布函数 G 对参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的依赖性，除非是必要的时候。

概率法则 G 限制了资产收益和 $\mathbf{x}$ 的随机行为，并表示了关于这些收益的已知信息的总和。当 G 给定，$\{R_{it}\}$ 已知时，我们就会把金融计量经济学看成是对参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的统计推断。当然表达式(1.4.10)太一般化，不适合统计推断，我们将在以后的章节中对 G 加一些限制条件。本章及以后的章节中我们将研究与推广许多资产收益的模型，表达式(1.4.10)可以作为罗列这些模型的一种方便方法。例如，第 2 章～第 6 章专门讨论 $\{R_{it}\}$ 的联合分布，在第 7、第 8 章中考虑附加的状态变量 $\mathbf{x}$，我们将这种联合分布记为 G_R。

许多资产定价模型，如第 5 章中夏普(Sharpe，1964)建立的资本资产定价模型 CAPM，以及第 5 章中考虑的林特纳(Lintner 1965a，b)及莫辛(Mossin，1966)，描述了某一时刻 t 简单收益 $\{R_{1t},\cdots,R_{Nt}\}$ 的截面样本的联合分布。为将表达式(1.4.10)简化为这些实质上是静态的结构，我们还必须假定在任何时候简单收益都是统计独立的，并且简单收益截面样本的联合分布始终是相同的。尽管这种假设似乎很极端，但是通过假设揭示了一系列定价金融资产的丰富内涵。例如，CAPM 为权衡风险和预期收益提供了明确的关系式，并提出了著名的市场安全线。

条件分布

在第 2 章中，我们对 G_R 又加了一组限制条件，从而既可使我们把重点放在个别资产收益的动态研究上，同时又可抽象出各种资产之间的截面样本关系。尤其是，对一特定资产 i，考察 $\{R_{i1},\cdots,R_{iT}\}$ 的联合分布 F，我们又经常将 F 写成以下形式：

$$F(R_{i1},\cdots,R_{iT})=F_{i1}(R_{i1})\cdot F_{i2}(R_{i2}|R_{i1})\cdot F_{i3}(R_{i3}|R_{i2},R_{i1})\cdots F_{iT}(R_{iT}|R_{iT-1},\cdots,R_{i1}) \quad (1.4.11)$$

从表达式(1.4.11)中可以明显看出 $\{R_{it}\}$ 中隐含的短期依赖性。资产收益的可预测性问题涉及到其条件分布的各个方面，尤其是条件分布随着时间的变化时。

通过对条件分布 $F_{it}(\cdot)$ 进一步添加限定条件，我们就可以估计出表达式(1.4.11)中隐含的参数 $\boldsymbol{\theta}$，并明确地检验出资产收益的可预测性，例如，限定简单收益 R_{it} 的条件分布等于其边际分布，即 $F_{it}(R_{it}|\cdot)=F_{it}(R_{it})$，就可以得到随机游动假设的一种形式。如果成立，简单收益在短期内就是独立的，因此用过去的收益值就无法预测当前的收益。通过对 $F_{it}(R_{it}|\cdot)$ 附加较弱的限定条件，就可以得到随机游动假设的一种较弱形式。

无条件分布

在资产收益的条件分布与其边际分布或无条件分布不同的情况下，很显然条件分布与有关可预测性的问题相关。但是，收益的非条件分布特性仍可能有一定的意义，尤其是在我们预计可预测性达到最小的情况下更具有意义。

资产收益最普遍的模型之一就是短期独立且具有相同分布的正态模型(IID)。这类

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

模型中收益被认为是随时间独立的(虽然截面样本之间也许是相关的)，并且服从于正态分布。CAPM 的最初公式使用了正态分布这一假设，虽然收益只是隐含地被认为是在短期属于 IID 分布(由于这是一种静态的“两阶段”模型)。最近，不对称信息的各种模型也使用了正态分布假设，如格罗斯曼(Grossman，1989)和格罗斯曼及斯蒂格里茨(Grossman and Stiglitz，1980)

尽管短期 IID 正态分布的模型容易处理，但这种模型至少存在两大缺陷。其一，大部分金融资产以有限的负债形式表现，所以投资者能够意识到的最大损失仅仅是他的全部投资。这就意味着可获取的最小净收益是－1 或－100%。但是由于正态分布的支撑是整个实轴(这里的支撑是一个数学专有名词)，因此最低下限为－1，显然违反正态性。当然，通过选择合适的均值和方差，低于－1 的概率可以任意地小，但由于受着有限负债的制约，永远不可能为零。其二，如果单一时期收益被认为是正态的，那么多时期收益就不可能是正态的，这是因为多时期收益是所有单一时期收益的乘积。即使单一时期正态收益之和是正态的，而单一时期收益之和在经济上却并没有任何意义。然而，在 1.4.1 节中我们可看到，把单一时期连续复合收益之和作为一个多时期连续复合收益来解释时，就有意义了。

对数正态分布

一种敏感的替代方法是假定连续复合的单一时期收益 r_{it} 服从 IID 正态分布，由于 $r_{it}\equiv\log(1+R_{it})$，即意味着对单一时期简单收益的加总服从 IID 对数正态变量的分布。我们可以将对数正态模型表达为：

$$r_{it}\sim\mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2) \tag{1.4.12}$$

在对数正态模型下，如果 r_{it} 的均值和方差分别是 μ_i 和 σ_i^2，那么简单收益的均值和方差的计算公式为：

$$\mathrm{E}[R_{it}]=e^{\mu_i+\frac{\sigma_i^2}{2}}-1 \tag{1.4.13}$$

$$\mathrm{Var}[R_{it}]=e^{2\mu_i+\sigma_i^2}[e^{\sigma_i^2}-1] \tag{1.4.14}$$

换一种办法，如果我们假定简单收益 R_{it} 的均值和方差分别为 m_i 和 s_i^2，那么在对数正态模型下，r_{it} 的均值和方差的计算公式为：

$$\mathrm{E}[r_{it}]=\log\frac{m_i+1}{\sqrt{1+\left(\frac{s_i}{m_i+1}\right)^2}} \tag{1.4.15}$$

$$\mathrm{Var}[r_{it}]=\log\left[1+\left(\frac{s_i}{m_i+1}\right)^2\right] \tag{1.4.16}$$

由于有限性使$(1+R_{it})$的下限为 0(当假定 r_{it} 服从正态分布时，满足 $1+R_{it}=e^{r_{it}}$)，而对数正态分布具有可加性的优点，就不会与有限性发生冲突。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

对数正态模型有一个漫长而有名的历史，最初是在法国数学家路易斯·巴彻利尔(Louis Bachelier，1900)的学术论文上提出来的，论文中包括了布朗(Brownian)运动和热传导的数学知识，比爱因斯坦(Einstein 1905)著名的论文还要早 5 年。至于其他一些原因会出现在以后章节(如第 9 章)中。总之，对数正态模型已成为金融资产定价理论的载体。

尽管对数正态模型具有吸引力，但这种模型与以往股票收益拥有的全部特性并不一致。在小范围内，以往收益表现出较弱的偏斜度和较强的剩余峰度。均值为 μ，方差为 σ^2 的随机变量 ε 的偏斜度，或标准三阶矩可定义为：

$$S(\varepsilon)\equiv \mathrm{E}\left[\frac{(\varepsilon-\mu)^3}{\sigma^3}\right] \tag{1.4.17}$$

ε 的峰度或标准四阶矩可定义为：

$$K(\varepsilon)\equiv \mathrm{E}\left[\frac{(\varepsilon-\mu)^4}{\sigma^4}\right] \tag{1.4.18}$$

正态分布与其他对称分布一样，偏斜度为 0。正态分布的峰度为 3，但尾部具有额外概率面积的厚尾分布有较高的峰度，甚至无限的峰度。

偏斜度和峰度可以通过计算样本平均数进行估计：

样本平均数为：

$$\hat{\mu}\equiv\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t \tag{1.4.19}$$

样本方差为：

$$\hat{\sigma}^2\equiv\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_t-\hat{\mu})^2 \tag{1.4.20}$$

样本偏斜度为：

$$\hat{S}\equiv\frac{1}{T\hat{\sigma}^3}\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_t-\hat{\mu})^3 \tag{1.4.21}$$

样本峰度为：

$$\hat{K}\equiv\frac{1}{T\hat{\sigma}^4}\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_t-\hat{\mu})^4 \tag{1.4.22}$$

在正态分布数据的大样本中，$\hat{S}$ 和 $\hat{K}$ 的估计值服从平均值分别为 0 和 3，方差分别为 $\frac{6}{T}$ 和 $\frac{24}{T}$ 的正态分布[见斯图尔特和奥德(Stuart and Qrd，1987)第 1 卷]。如果正态分布的峰度为 3，那么样本的剩余峰度可以定义为小于 3。美国每日的股票收益偏斜度的样本估计值对股票指数来说是负值，对个别股票来说接近零或为正数。美国每日股票收益的剩余峰度的样本估计值对指数和个别股票来说都比较大且为正值，表明收益在尾部区域有较大的面积，因此不能通过正态分布进行预测。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

平稳分布

股票市场收益的早期研究就是通过把连续复合收益的分布模型化为平稳分布类的一员(有时也称稳定巴略特—勒维分布或稳定巴略特分布),再试图求解剩余峰度。而正态分布就是该分布类的一种特例①。平稳分布是正态分布的一般形式,正如名称上所表达的。平稳分布的和是平稳的,即平稳随机变量的和还是一个平稳随机变量。但是,非正态平稳随机分布比正态分布的尾部区域的概率面积要大。实际上,非正态平稳分布的尾部很平,以至于方差和更高阶矩是无限的。这些分布的随机变量的方差或峰度的样本估计随着样本容量的增加并不收敛,而是趋于无限的增加。

平稳随机变量的密度函数的封闭表达式只是在三种情况下存在:正态分布、柯西(Cauchy)分布以及贝努里(Bernoulli)分布②。图 1.2 表达了柯西分布,密度函数为:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\gamma}{\gamma^2+(x-\delta)^2} \tag{1.4.23}$$

在图 1.2 中显示的是表达式(1.4.23)中参数 $\delta=0,\gamma=1$ 的分布密度曲线,通过与正态密度曲线的比较,很明显可看出柯西分布具有更宽平的尾部。

平稳分布在 20 世纪 60 年代和 70 年代早期应用很广泛,现在已不那么普遍了。部分原因是由于平稳分布使理论模型化很难;经典的金融理论几乎都要求收益具有有限的二阶矩,常常对更高阶的矩也有有限的要求。

平稳分布还有一些与事实相反的涵义。其一,平稳分布意味着收益的方差和更高阶矩的样本估计值随着样本容量的增加而增大,但实际上这些估计值是收敛的。

其二,平稳分布意味着长期收益与短期收益一样(由于长期收益是短期收益之和,而且这些分布相加后仍是平稳的)。但实际上,长期收益的非正态表现比短期收益要弱得

---

① 法国概率学家保罗·莱维(Paul Levy,1924)可能是第一个提出并引入稳定分布的一般研究的人,他通过对数特征函数给出了它们完备的特征。莱维(Levy,1925)还证明了稳定分布的尾部概率近似于巴略特(Pareto)分布,于是就有所谓"稳定巴略特—莱维(stable Pareto-Levy)分布"。对于应用于金融资产收益的问题,可见布拉特伯格和戈内德斯(Blattberg and Gonedes,1974);法马(Fama,1965);法马与罗尔(Fama and Roll,1971);斐森(Fielitz,1976);斐森和罗泽尔(Fielitz and Rozell,1983);格兰杰和默更斯特恩(Granger and Morgensterng, 1970);海格曼(Hargerman,1970);赫苏(Hsu,1974),米勒(Miller)和威切恩(Wichern);曼德尔布罗特和泰勒(Mandelbrout and Taylor,1967);奥费舍(Officer,1972);萨缪尔森(Samuelson,1967,1976);希姆科韦茨和比德尔斯(Simkowitz and Beedles, 1980)以及塔克(Tucker,1992)的文献。

② 同样,莱维(Levy,1925)进一步获得了平稳随机变量 X 的对数特征函数 $\varphi(t)$:

$$\log\varphi(t)\equiv\log E[e^{itX}]=i\delta t-\gamma|t|^{\alpha}\cdot\left[1-i\beta\cdot\text{sgn}(t)\cdot\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]$$

其中,$(\alpha,\beta,\delta,\gamma)$是 4 个赋予每个平稳分布特征的参数。$\delta\in(-\infty,\infty)$称为位置参数;$\beta\in(-\infty,\infty)$称为偏斜度指数;$\gamma\in(0,+\infty)$称为尺度参数;当 $\alpha\in(0,2]$时平稳分布就是指数分布族。当 $\alpha=2$ 时,平稳分布就变成正态分布。当 α 从 2 降至 0 时,平稳分布的尾部区域明显地比正态分布来得"宽厚"。当 $\alpha\in(1,2)$时,对给定的 δ,平稳分布具有有限的均值,但当 $\alpha\in(0,1)$时,平稳分布的均值就变成无限。参数 β 的作用是度量平稳分布密度曲线的对称性;当 $\beta=0$ 时,平稳分布的密度曲线就是对称的,而当 $\beta>0$(或 $\beta<0$)时,则平稳分布的密度曲线就变成右偏斜(或左偏斜)。当 $\alpha=1$ 和 $\beta=0$,平稳分布就变成柯西分布;当 $\alpha=1/2,\beta=1,\delta=0$ 以及 $\gamma=1$,我们就可以得到贝努里分布。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

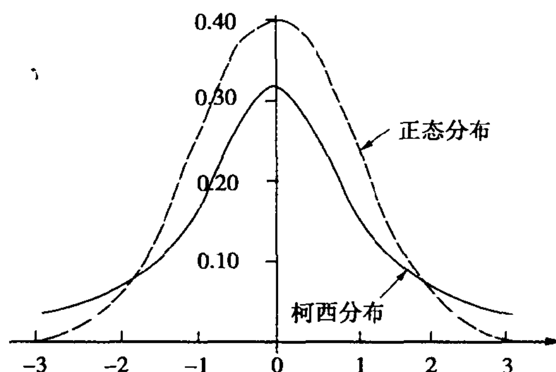


图 1.2　平稳正态密度函数的比较

多。

近期的研究中正转向把收益模型化为具有有限高阶矩的宽尾分布，如 t 分布，或者模型化为几种分布的混合分布。例如，收益可能服从条件正态分布，以方差这一参数为条件，主要是因为方差本身是随机的。那么收益的非条件分布是几种正态分布的混合形式，其中一些正态分布的条件方差较小，集中在平均值的附近，其他一些正态分布的条件方差较大，分布密度曲线的尾部面积较大，结果就产生了具有有限方差和有限高阶矩的宽尾非条件分布。既然所有的阶都是有限的，就可运用中心极限定理，并且长期收益比短期收益更接近正态分布，因此，可以很自然地将条件方差模型化成时间序列过程，我们将在第 12 章中详细进行论述。

实证说明

表 1.1 包含了一些从 1962～1994 年证券价格研究中心(CRSP)中收集的个别股票和总体股票收益的样本统计资料，这些资料说明了以前章节中讨论的一些问题。按照表达式(1.4.19)至表达式(1.4.22)中描述的方法，采用纽约证券交易所(NYSE)和美国证券交易所(AMEX)挂牌的按股票市值加权指数和按个股等加权指数以及十个个股，直接计算出一些样本矩用于股票市场收益的统计报告。使用 CRSP NYSP/AMEX 总体中所有股票在 1979 年末的市场资本化资料，根据市场资本化的十分位选取个别股票。在该总体中，国际商用机器公司(IBM)是十分位点数值最大的代表，而大陆材料公司(Continental Materials Corp)是十分位点数值最小的代表。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 1.1 **1962～1994 年股票市场收益**

股 票	均值	标准差	偏度	剩余峰度	最小值	最大值
			A 板：每日收益			
值权指数	0.044	0.82	−1.33	34.92	−18.10	8.87
等权指数	0.073	0.76	−0.93	26.03	−14.19	9.83
国际商业机械公司	0.039	1.42	−0.18	12.48	−22.96	11.72
通用信号公司	0.054	1.66	0.01	3.35	−13.46	9.43
Wrigley 公司	0.072	1.45	−0.00	11.03	−18.67	11.89
Interlake 公司	0.043	2.16	0.72	12.35	−17.24	23.08
Raytech 公司	0.050	3.39	2.25	59.04	−57.90	75.00
Ampco-Pittsburgh 公司	0.053	2.41	0.66	5.02	−19.05	19.18
Energen 公司	0.054	1.41	0.27	5.91	−12.82	11.11
General Host 公司	0.070	2.79	0.74	6.18	−23.53	22.92
Garan 公司	0.079	2.35	0.72	7.13	−16.67	19.07
大陆材料公司	0.143	5.24	0.93	6.49	−26.92	50.00
			B 板：每月收益			
值权指数	0.96	4.33	−0.29	2.42	−21.81	16.51
等权指数	1.25	5.77	0.07	4.14	−26.80	33.17
国际商业机械公司	0.81	6.18	−0.14	0.83	−26.19	18.95
通用信号公司	1.17	8.19	−0.02	1.87	−36.77	29.73
Wrigley 公司	1.51	6.68	0.30	1.31	−20.26	29.72
Interlake 公司	0.86	9.38	0.67	4.09	−30.28	54.84
Raytech 公司	0.83	14.88	2.73	22.70	−45.65	142.11
Ampco-Pittsburgh 公司	1.06	10.64	0.77	2.04	−36.08	46.94
Energen 公司	1.10	5.75	1.47	12.47	−24.61	48.36
General Host 公司	1.33	11.67	0.35	1.11	−38.05	42.86
Garan 公司	1.64	11.30	0.76	2.30	−35.48	51.60
大陆材料公司	1.64	17.76	1.13	3.33	−58.09	84.78

注：上表列出了 1962 年 7 月 3 日～1994 年 12 月 30 日整个样本时期 CRSP 等权和值权股票指数和十家公司的股票的每日和每月收益(百分比)的统计数据。选择各公司的股票来代表各种规模的股票。表达式(1.4.19)至表达式(1.4.22)对各统计数据进行了定义。

面板 A 提供了每日收益的统计数据。每日指数收益有极高的样本剩余峰度，分别为 34.9 和 26.0，显然，这是宽尾分布。虽然每日个别股票收益的剩余峰度估计值一般少于指数的剩余峰度估计值，但仍比较大，范围在 3.35～59.4。因为有 8 179 个观测值，在服从正态分布的原假设条件下，峰度估计值的标准误差是 0.054($\sqrt{24/8\ 179}$)，因此这些剩余峰度的估计值在统计上是极其显著的。每日指数收益的偏斜估计值是负值，分别为 −1.33和−0.93，但对个别股票收益来说，一般为正值，范围在−0.18～2.25 之间。当在

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

正态分布的原假设条件下，标准误差为 0.027($\sqrt{6/8\ 179}$)时，许多偏斜估计值在统计上也显著的。

面板 B 提供了每月收益的样本统计资料。这些统计数据比每日收益的偏斜度要小得多，按市值加权与按个股等加权的 CRSP 每月指数收益的剩余峰度分别仅为 2.42 和 4.14，比每日收益的剩余峰度小。由于只有 390 个观测值，峰度估计值的标准误差就更大一些，为 0.248。这就证明了研究者们使用有限高阶矩的平尾分布是由于中心极限定理适用于这些分布，并且长期收益趋于正态分布。

1.5 市场效率

效率市场假设(EMH)的起源至少可以追溯到巴彻利尔(Bachelier，1990)最早在理论上作出的贡献和科尔斯(Cowles，1933)的实证研究。经济学的现代理论是从萨缪尔森(Samuelson，1965)开始的，他所做的贡献完全可以用其题目为"合理预期价格随机波动的论证"的论文加以概括[①]。在信息有效的市场(不要与分配或 Pareto 有效市场相混淆)，如果可以合理地预期价格变动，即如果价格变动将所有市场参与者的期望和信息完全结合在一起，那么价格变动就是无法预测的。法马(Fama，1970)在他的传统调查中对这一观点进行了总结，他写到"在一个市场上，如果价格总是'完全反映'所有信息，就称这个市场是有效率的"。法马在"完全反映"这四个字上加引号表明这仅仅是一种简写形式，需要进一步全面展开。最近，麦尔基尔(Malkiel，1992)已提出了更确切的定义：

如果一个资本市场在决定证券价格时，完全正确地反映了所有有关信息，就说这个市场是有效率的。正规地说，市场对于某些信息集合而言是有效率的……如果向市场上所有的参与者解释这些信息，证券价格不会受到影响。而且，关于信息集合的有效性意味着想利用这些信息进行买卖交易来获取经济利润是不可能的。

麦尔基尔(Malkiel)的第一句话重复了法马的定义，第二句话和第三句话用两种不同的方式进行扩展。第二句话表明检验市场效率可以通过向市场参与者提供信息，并对证券价格的反映进行度量。如果信息被披露后价格未发生变动，那么市场对这一信息而言是有效率的。虽然这种说法从概念上来说是很清楚的，但要从实际上进行检验则十分困难(除非在实验室里)。

麦尔基尔(Malkiel)的第三句话揭示了通过度量利用信息进行买卖交易所获得的利润来判断市场效率的另一种方法。这一思想是几乎关于市场效率所有的实证性工作的基

① 伯恩斯坦(Bernstein)在(1992)讨论了巴彻利尔(Bachelier)，科尔斯(Cowles)，萨缪尔森和许多其他早期作者的贡献。这篇文章刊印在 1996 年罗(Lo)编写的包括最重要的论文的文献中。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

础。这一思想主要被应用于两个主要方面。第一，许多研究者努力对市场专家如共同基金管理人员所获得的利润进行度量。如果这些管理人员获得较高的收益(根据风险进行调整以后)，那么市场就管理人所获得的信息而言是无效率的。这种方法的优点就是把重点放在真正市场参与者所进行的实际交易上，缺点就是人们无法直接观察管理人员在交易战略中所使用的信息[参阅法马(Famn，1970，1991)]可以对这一理论有一个全面的了解)。

根据人们可能会提出以明确规定的信息集合为基础的假设交易能否获得较高的收益的疑问，产生了另一种替代方法。为了实施这一方法，人们必须首先选择一组信息。主要由罗伯特(Robert，1967)设计的传统的信息分类法，对市场进行了以下的划分：

弱有效：指信息集合只包括价格或收益的历史记载。

半强有效：指信息集合包括所有市场参与者知道的所有信息(可公开得到的信息)。

强效率：指信息集合包括所有市场参与者都知道的所有信息(私人信息)。

下一步就是详细叙述“正常”收益模型。这里所说的传统假设是指一种证券的正常收益在一段时间内是稳定的，但最近几年来，人们对时变正常证券收益均衡模型的兴趣与日俱增。

最后一步，非正常证券收益作为证券收益和正常收益之间的差进行计算，用所选择的信息组对非正常收益进行预测。如果非正常证券收益不可预测，从“随机性”的意义上来说，就必须使用市场有效的假设。

1.5.1 效率和迭代期望规律

有效证券的收益应具有随机性这一观点经常引起人们的困惑。许多人似乎认为有效证券的价格应是平滑的，而不是随机性的。布莱克(Black，1971)十分有效地解释了这一观点：

> 完善的股票市场应是这样一种市场：在这一市场上，对不了解公司专门信息的人来说没有利润可赚，即使对那些有专门信息的人来说也很难获利，因为当信息被市场认为是有用的同时价格会迅速进行自身调整……因此我们在连续交易的价格中可看出随机性，而不是持续性……随机性即意味着价格发生连续的小幅度的上涨(或下跌)是极不可能的。如果价格上涨，应是立即上涨，而不是小幅度的连续上涨……发生大幅度的价格变动是可能的，只要其后不是发生持续的反方向的价格变动。

基于以上理论，人们产生困惑可能是因为持有这样一种观点：即如果证券价格是由预期现金流量所决定的，那么收益就不可能是随机的。例如史密斯(Smith，1968)写到，“我怀疑即使随机过程证明了一个完美的随机性的数学论据，我还是相信从长期来看预期收

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

入影响当前价格”。

事实上，一种证券价格经贴现后的现值模型与证券收益的随机性完全一致。理解这一说法的关键是所谓的迭代期望规律。为了说明这一结果，我们将信息划分为信息集 I_t 和信息集 J_t，其中 $I_t \subset J_t$，这样集合 I_t 中所有的信息也在集合 J_t 中，但集合 J_t 的范围更大一些，因为集合 J_t 中包括更多的信息内容。我们来考虑随机变量 X 关于这些信息集的条件期望值，记为 $\mathrm{E}[X/I_t]$或 $\mathrm{E}[X/J_t]$。迭代期望规律中 $\mathrm{E}[X/I_t]=\mathrm{E}[\mathrm{E}[X/J_t]/I_t]$。用语言表述，即为如果一个人具有有限信息 I_t，那么他对随机变量 X 所作的最好预测是当他具有先验信息 J_t 时，对变量 X 所作的预测的预测，即记为 $\mathrm{E}[X-\mathrm{E}[X/J_t]/I_t]=0$，其直观含义为：人们不可能利用有限的信息 I_t 去估计当他拥有范围更广泛的先验信息 J_t 时可能产生的预测误差。

萨缪尔森(Samuelson,1965)是第一位为证券市场证明迭代期望规律合理性的人；里络伊(LeRoy,1989)对这一论点作了清晰的概述。我们将在第 7 章中详细讨论这一问题，在这里只进行简要的概述。假定在时刻 t 某一证券的价格为 P_t，则 P_t 可以被写成在时刻 t 信息 I_t 的条件下，对一些“基本价值 V^*”的合理期望，即：

$$P_t=\mathrm{E}[V^* \mid I_t]=\mathrm{E}_t V^* \tag{1.5.1}$$

该等式下一时期表示为：

$$P_{t+1}=\mathrm{E}[V^* \mid I_{t+1}]=\mathrm{E}_{t+1} V^* \tag{1.5.2}$$

但下一时期价格变化的期望为：

$$\mathrm{E}_t[P_{t+1}-P_t]=\mathrm{E}_t[\mathrm{E}_{t+1}[V^*]-\mathrm{E}_t[V^*]]=0 \tag{1.5.3}$$

因为 $I_t \subset I_{t+1}$，所以按照迭代期望规律有 $\mathrm{E}_t[\mathrm{E}_{t+1}[V^*]]=\mathrm{E}_t[V^*]$。在已知信息集 I_t 的条件下，已发生的价格改变是不可预测的。

1.5.2 市场效率的可预测性

虽然本书较全面地概括了经验方法论，但在解释其结果时仍存在一些严重的困难。其一，对效率的检验必须首先假设一个规定了一般正态证券收益的均衡模型。如果效率被忽略，可能是由于市场的确是无效率的，或者是因为假定了一个不正确的均衡模型。联合假设这一问题意味着这种市场效率永远不能被忽略。

其二，完全效率是一种不现实的基准，在实际中是不可能存在的。即使在理论上，正如格罗斯曼和斯蒂格利茨(Grossman and Stiglitz, 1980)所指出的，只要信息收集和加工需要花费成本，非正态收益就是存在的。投资者必须用收益去补偿信息收集和加工所花费的成本，当合理地考虑了这些花费后，收益就是正态的。在一个大型的流动性市场中，信息成本很可能会造成较小的非正态收益，即使可以精确地计算这些成本，也很难说出这一非正态收益的数值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

所谓相对效率，从概念上讲是一个市场被度量的效率与另一市场相比，比如，纽约证券交易所与巴黎证券交易所，期货市场与现货市场，拍卖市场与交易市场。也许它们是一个更有用的概念，而不是大部分传统的市场效率文献中提出的绝对的观点。通过类比，可以很容易看出相对效率高于绝对效率的优点。通常将转化为有用功的燃料或能量的相对比例作为基准，对物理系统赋予一个功率值。因此，一个活塞发动机的功率大概为 60%，即发动机中燃料的平均 60%是用来推动曲轴，剩余的 40%则以热、光、噪声等其他形式损失掉了。

尽管存在想像中无摩擦的理想化状态下的发动机可以达到完全的效率，然而几乎没有工程师会考虑通过统计检验来对此进行判定。但是度量相对效率(相对无摩擦的理想状态)是很平常的。事实上，我们希望能对许多家用电器，如空调、热水器、冰箱等进行这种测试。同理，有效市场也是一种理想状态，从经济的角度来看是不可能实现的，但可作为度量相对效率的有用基准。

由于以上原因，在本书中我们并不表明对市场效率的立场，而是着重讲述统计方法，这些方法可以用来检验市场效率和市场均衡的联合假设。虽然本书中论及的许多技巧主要是围绕市场效率论点展开的[对方差界限、欧拉(Euler)方程式、CAPM 和 APT 进行检验]，但我们认为这些技巧可更有利地运用于度量效率，而不是检验效率，而且如果一些市场是无效率的，那么仔细阅读本书的读者将能有准备地利用这种机会。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

2.

资产收益的可预报性

金融资产的价格是否可以预计是金融计量经济学最早且最持久的问题之一。或许是因为金融投资与博弈游戏的明显类似，金融资产定价的数学模型有着非常悠久的历史，实际上早于任何其他经济分析方法。许多杰出的数学家和科学家致力于金融证券价格的预测，这便是这一问题的魅力及其挑战性的证明。确实，现代金融学即是牢牢地基于规避市场风险的初衷，这种努力仍在当今受到关注，并在文章杂志、会议甚至鸡尾酒会上保持着热烈的讨论与争论。

本章将讨论利用资产价格的历史变化来构造其未来价格变化的预测问题。虽然将这种预测限制于历史价格变化的函数毕竟似有局限性，然而投资者是不断地受到大量不同信息的影响的，因此即便是对此简单问题的研究也会获得对资产价格变化状况的丰富认识。我们将看到在概率论及金融经济学中最重要的两个概念：鞅以及随机游动。而且，尽管本书将在第 4 章至第 9 章中提出利用附加经济变量来构造预测的更为复杂的资产价格模型，但资产的未来价格变化是否能仅用历史价格变化来进行预测的问题仍然是一个有争论的经验研究题材。

在本章第 2.1 节中，我们将回顾随机游动假设的各种表现形式，并在第 2.2 节至第 2.4 节中为每一种形式构造了检验。长线收益在检测随机游动的某种违例方面有特定作用，在第 2.5 节中我们将探讨它们的某些优势与劣势。关注长线收益，则自然会引出长期依赖性的概念，在第 2.6 节中则提出了对这一现象的一种检验。为了保持内容的完整性，我们对单位根检验作了简短的讨论，这种检验有时会与随机游动检验混淆。在第 2.8 节，我们将提出一些经验例证，纪实性地描述了近期美国股市资料所反映的对随机游动假设的重大背离。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

2.1 随机游动假设

合理组织下面将要提出的各种表现形式的随机游动和鞅模型的有效方法是考虑存在于两个时点 t 和 $t+k$ 的资产回报 r_t 和 r_{t+k} 间的相关性。为此，需定义随机变量 $f(r_t)$ 及 $g(r_{t+k})$，这里 $f(\cdot)$ 及 $g(\cdot)$ 是两个任意函数。对所有的 t 及 $k\neq0$，考虑如下情形：

$$\mathrm{Cov}[f(r_t),g(r_{t+k})]=0 \tag{2.1.1}$$

选择适当的 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$，差不多所有形式的随机游动和鞅的假设都符合表达式(2.1.1)，这可以解释为一种正交条件。

例如，若将 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 限定为任意的线性函数，则表达式(2.1.1)意味着资产回报是与序列无关的，这与下面第 2.1.3 节中描述的随机游动 3 的模型是一致的。再者，若不限定 $f(\cdot)$ 但限定 $g(\cdot)$ 是线性的，则表达式(2.1.1)与第 2.1 节描述的鞅假设是等价的。最后，若 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 为一切其他函数时，表达式(2.1.1)意味着资产回报是相互独立的，这分别与第2.1.1及第 2.1.2 节中描述的随机游动 1 和随机游动 2 的模型一致。对随机游动及鞅的假设的这种分类概括于表 2.1 中。

虽然还有好几种其他的方法来描述随机游动和鞅模型的特征，但表达式(2.1.1)和表 2.1 的描述方法对经济问题的假设来说是特别适宜的，因为几乎所有的均衡资产定价模型都可简化为一组正交条件。这一解释将在第 8 章和第 12 章中作进一步的探讨。

表 2.1　随机游动和鞅假设的分类

$\mathrm{Cov}[f(r_t),g(r_{t+k})]=0$	$g(r_{t+k})$，$\forall g(\cdot)$线性	$g(r_{t-k})$，$\forall g(\cdot)$
$f(r_t)$，$\forall f(\cdot)$线性	不相关增量，随机游动类型 3： $\mathrm{Proj}[r_{t+k}\mid r_t]=\mu$	—
$f(r_t)$，$\forall f(\cdot)$	鞅/博弈： $\mathrm{E}[r_{t+k}\mid r_t]=\mu$	独立增量，随机过程 1 和 2： $\mathrm{pdf}(r_{t+k}\mid r_t)=\mathrm{pdf}(r_{t+k})$

注："$\mathrm{Proj}[y\mid x]$"表示 y 到 x 的线性投影，"pdf$(\cdot)$"表示其自变量的概率密度函数。

鞅模型

可能最早的金融资产价格模型便是鞅模型，它起源于博弈论的发展历史和概率论的诞生。卓越的意大利数学家 Girolamo Cardano 在他 1565 年的手稿 *Liber de Ludo Aleae*(《博弈论的书》)中提出了有关博弈(投机)的基本理论。其中他写到：[①]

博弈(投机)中所有之最基本的规则简要为公平环境，比如对对手，对旁观

① 进一步的详细内容见哈尔德(Hald，1990，第 4 章)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

者，对金钱，对情景，对骰子筒，以及对骰子本身。背离了公平，如果这种背离有利于你的对手，那么你就是个傻瓜；而如果有利于你自己，那你就是不公正的。

这段话明显地包含了公平游戏的观念，是一种既不利于你自己又不利于对手的游戏，而这正是鞅的本质。对于一个随机过程$\{P_t\}$也就是要满足下列条件：

$$E[P_{t+1} \mid P_t, P_{t-1}, \cdots] = P_t \tag{2.1.2}$$

或，等价地：

$$E[P_{t+1} - P_t \mid P_t, P_{t-1}, \cdots] = 0 \tag{2.1.3}$$

若记P_t为t时期某人从某种机会游戏中各期所挣的累计财富收入，那么公平游戏便是这样一种游戏，即在全部历史收入的条件下，下期的期望收入就简单地等于本期的收入（见表达式(2.1.2)）。或者可以这么说，对于公平游戏，在全部历史收入的条件下，各期收入增长量的期望均为零（见表达式(2.1.3)）。

若将P_t看作t期的某种资产价格，那么给定资产的全部历史价格，鞅假设便可陈述为明天的资产期望价格就等于今天的资产价格。换句话说，给定资产的历史价格，资产价格变化的期望为零。因此资产价格的上升就好比价格的下降一样是机会均等的。从价格预测的观点来看，鞅假设意味着对明天的资产价格“最好”的预测值就是今天的价格，这里“最好”的意思是使预测的均方误差最小（见第 7 章）。

鞅假设的另一方面就是对所有时序上的前置和后滞，不重合的价格变化量之间是不相关的。这也意味着仅仅基于历史价格基础上的对未来价格变化的线性预测是无效的。来自像式(2.1.2)这样的简单模型可有如此概括性涵义的事实预示着鞅假设在资产价格动态建模中将扮演重要角色。（见下面及第 7 章的讨论）

事实上，鞅很早就被认为是有效资产市场的必要条件。在有效资产市场中，资产的过去价格所含的信息被即刻、充分且永久地反映到资产的现期价格中[①]。如果一个市场是有效的，那么按照资产的历史价格信息进行交易而获利是不可能的。因此，基于历史价格的资产，其未来价格变化的条件期望既不为正也不为负（若是卖空，则有可能），只能为零。这种有效性的理念对一个市场具有一种很好的反直觉而且表面上又矛盾的意味，即市场越有效，则由这一市场所产生的价格变化序列的随机性越强；而对一个最有效的市场而言其价格的变化则是纯随机的而无法预测。

但是，现代金融经济学的一条重要原则是在风险和期望收益之间必须存在某种置换。尽管鞅假设对期望收益是一种制约，但这一点也说明不了风险。特别地，如果某一资产的价格变化期望是正的，则其报酬就足以吸引投资者持有该种资产，那么风险也会随之产生。因此，不管公平游戏的解释具有什么样的直观吸引力，鞅特性对于由理性决定的资产价格来说是

---

① 见萨缪尔森（Samuelson，1965，1972，1973）。罗伯茨（Roberts，1967）称鞅假设为弱态有效市场。基于全部公共信息可得性及全部公共及私有信息可得性两种情形，他同时也分别定义了当未来价格变化的条件期望为零时资产市场的半强态和强态有效性。这些概念的进一步讨论见第 1 章。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

既不必要又不充分的条件。[例如，见里络伊(Leroy，1973)，卢卡斯(Lucas，1978)，以及第 8 章]

然而，鞅已经成为概率和统计的有力工具并且在现代资产价格理论中也有重要应用。例如，一旦资产回报对风险作了适当的调节，那么它就确实具有鞅特性[见卢卡斯(Lucas，1978)]，考克斯和罗斯(Cox and Ross，1976)，哈里森和克雷普斯(Harrison and Kreps，1979)。

特别地，我们在第 8 章将会看到以边际效用加权的资产价格在非常一般的条件下确实遵从鞅特性。这种风险调节的鞅特性给复杂金融工具的定价带来了名副其实的革命，比如期权、互惠信贷以及其他衍生证券的定价[例证见第 9 章、第 12 章及默顿(Merton，1990)]。进一步地，鞅带来了一个与之密切相关的模型的发展，即：随机游动假设，它已成为任何研究动态系统科学规律的基本内容。

2.1.1 随机游动 1：独立同分布增量

随机游动假设最简单的形式可能就是独立同分布增量(IID)的情形。动态序列$\{P_t\}$由下式给出：

$$P_t=\mu+P_{t-1}+\varepsilon_t\,,\quad \varepsilon_t\sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2) \tag{2.1.4}$$

这里μ是价格变化的期望，或称位移，$\mathrm{IID}(0,\sigma^2)$表明ε_t为独立同分布随机变量，具有零均值，方差为σ^2。$\{\varepsilon_t\}$增量的独立性意味着随机游动也是一种公平游戏，只不过它比鞅的条件要强得多；独立性不仅意味着增量本身是不相关的，而且意味着增量的非线性函数也是不相关的。我们称这为随机游动模型 1，或记为 RW1。

从直观上看 RW1，考虑它的t时期的条件均值与条件方差，条件为 0 时期的某个初始值P_0：

$$\mathrm{E}[P_t\,|\,P_0]=P_0+\mu t \tag{2.1.5}$$

$$\mathrm{Var}[P_t\,|\,P_0]=\sigma^2 t \tag{2.1.6}$$

上式可结合独立同分布假定从表达式(2.1.4)中通过递归迭代得到。从(2.1.5)式及(2.1.6)式可明显地看到随机游动是非平稳的并且其条件均值和方差在时序上都是线性的。这些性质对下面要描述的另外两种形式的随机游动假设(RW2 和 RW3)也都成立。

对增量ε_t的分布最通常的假定可能就是正态分布。若诸ε_t为 $\mathrm{IID}\,\mathcal{N}(0,\sigma^2)$，则(2.1.4)式等价于规范取值在单位区间内的算术布朗运动(见第 9 章第 9.1 节)。这一分布假定简化了许多有关随机游动的运算，但资产回报的正态分布同样也是一个令人困扰的问题，即它引起有限责任的违背。也就是说，如果P_t的条件分布是正态的，那么对$P_t<0$将始终存在一个非零的概率。

为避免违背有限责任，我们可用第 1.4.2 节中同样的方法，也就是设资产价格的自然对数$p_t\equiv\log(P_t)$遵从具有正态分布增量的随机游动；因此有：

$$p_t=\mu+p_{t-1}+\varepsilon_t\,,\quad \varepsilon_t\,\mathrm{IID}\,\mathcal{N}(0,\sigma^2) \tag{2.1.7}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这意味着连续的混合收入是独立同分布的正态变量，其均值为μ，方差为σ^2。这也就产生了巴彻利尔(Bachelier，1900)和爱因斯坦(Einstein，1905)的对数正态模型。我们将在第 9 章第 9.1 节中再来讨论这一问题。

2.1.2 随机游动 2：独立增量

不管 RW1 的形式如何简单完美，但同分布增量的假定对金融资产的长期价格来说是说不通的。例如，在纽约证券交易所二百多年的历史中，决定股票价格的经济、社会、技术、制度及法规等都有数不清的变化。所以认为这二百多年的日常股票交易收入有相同的概率分布规律显然是说不通的。因此，我们对 RW1 的假定放宽到包括独立但不同分布的增量过程，并称为随机游动模型 2，记为 RW2。RW2 显然不仅包含作为其特例的 RW1，而且还包括许多更为一般的资产价格随机过程。例如，RW2 允许诸ε_t具有非条件异方差的情形。这一特性对许多依时序变化的金融资产的收益序列是特别有用的(见第 12 章第 12.2 节)。

尽管 RW2 的条件较 RW1 要弱，但它仍然保持了独立同分布随机游动所体现的最有趣的经济性质：过去价格增量的任意函数转换形式是不能用来预测未来价格增量的任意转换形式的。

2.1.3 随机游动 3：不相关增量

一个在近期的经验文献中经常用作检验的关于随机游动假设的一个更为一般的形式可通过对 RW2 放宽独立性假设来得到，其包含了非独立但不相关的增量过程。这是随机游动假设最弱的一种形式，称为随机游动模型 3，记为 RW3，包括了作为其特例的 RW1 和 RW2。满足 RW3 的假定而不满足 RW1 和 RW2 的随机过程的一个简单例子便是对任一过程有 $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-k})=0$，对一切 $k\neq0$，但 $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t^2,\varepsilon_{t-k}^2)\neq0$，对某些 $k\neq0$。这种随机过程具有不相关增量，但显然又是不独立的，因为其增量平方是相关的(对此特例见第 12 章第 12.2 节)。

2.2 随机游动 1 的检验：独立同分布增量

尽管优先考虑理论的 RW1 在实际上有些说不通，但对 RW1 的检验仍可提供许多了解随机游动特性的直觉。例如，在第 2.2.2 节可看到对随机游动的一个位移如果说明不当有时就会误认为序列的可预测性。在转向讨论这些问题之前在第 2.2.1 节中我们先简

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

要回顾一下对独立同分布假定的传统统计检验方法。

2.2.1 传统统计检验

由于独立同分布(IID)假定对传统统计推断是十分重要的，因此对这两个假定的检验在统计学上无疑具有悠久而著名的历史，它比随机游动具有更广泛的应用。由于这一检验的广泛性，系统地列出对 IID 的全部检验方法几乎是不可能的，所以我们仅提及一些特别著名的检验。

由于独立同分布(IID)并非某一特定参数分布族的随机变量的特性，许多此类检验属非参数检验。例如，斯皮尔曼(Spearman)秩相关检验、斯皮尔曼步律检验、肯达尔(Kendall)τ 相关检验，还有一些检验是基于秩或者 R 统计量[见伦德尔斯和乌尔夫(Randles and Wolfe,1979)及瑟夫琳(Serfling,1980)]的线性组合的。运用独立地包含于观测值中的秩的信息，即可构造对 IID 的检验，检验结果对各类参数族具有稳健性并且对计量单位的变化具有不变性。此类检验统计量的样本精确分布理论一般不难得到，但比较麻烦，其包括了对秩的有序排列的(离散)均匀分布变换。但是，对于大多数此类检验统计量的样本分布，我们都使用正态渐近近似[见瑟夫琳(Serfling,1980)]。

近来，基于样本资料的经验分布函数也被用于构造 IID 检验。这类检验通常对资料产生过程的联合分布函数和边际分布函数有略强的假定；因此他们属于半参数类检验。典型地，这类检验往往形成对联合经验分布函数及边际经验分布函数的直接比较或者利用两者的分位数进行的非直接比较。对于这类检验统计量，其样本精确分布一般无法得到，我们必须依赖渐近近似来实施这类检验[见休拉克和韦尔纳(Shorack and Wellner,1986)]。

在参数性假定下，IID 检验一般比较容易构造。例如，要检验联合分布为正态的 k 个向量之间的独立性，就有许多统计量可供使用：似然比统计量法，正则相关性法，协方差矩阵特征值法，等等[见缪俄希德(Muirhead,1983)]。当然，这类检验的易处理性须和其对特定参数假定的依赖性进行折衷权衡。即便这类检验与其对等的非参数检验相比更为有效，但是在有限样本的情形下假定的参数族与未知的总体参数真值间的很小偏离都会导致检验结果的巨大差异。

2.2.2 顺序和反转，游程

早期对随机游动假设的检验很大程度上都是检验 RW1 和 RW2。虽然这些检验现在看来主要已成为历史，但是从这些检验中仍然可以学到很多有关随机游动的性质。此外，个别近期发展起来的计量经济检验工具严重依赖 RW1 假定(如第 2.5 节和第 2.6 节)，因

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

此讨论这些检验同样为我们提供了日后需要掌握的某些问题的处理手法的机会。

顺序和反转

我们从 RW1 的对数形式或者几何布朗运动开始讨论。这里价格的对数 p_t 假设为无漂移的独立同分布(IID)随机游动：

$$p_t = p_{t-1} + \varepsilon_t\,,\quad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2) \qquad (2.2.1)$$

且记 I_t 为随机变量，其定义为：

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{假设 } r_t \equiv p_t - p_{t-1} > 0 \\ 0 & \text{假设 } r_t \equiv p_t - p_{t-1} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

与古典贝努里硬币抛掷概型十分类似，I_t 表明不管时刻 t 如何连续组合变化，收益 r_t 可为正或负。事实上当很多 RW1 的初始检验是基于简单的硬币抛掷概型假设时，那么这种硬币抛掷模拟是相当合适的。

RW1 的一个最初的检验是科尔斯和乔恩斯(Cowles and Jones,1937)提出的，它包括对股票历史收益的顺序及反转频率的比较。其中前者是符号相同的不间断的收益数据对，而后者是符号相反的不间断的收益数据对。特别地，给定一组含 $n+1$ 个收益 $r_1, \cdots, r_{n+1}$ 的样本，顺序数 N_s 和反转数 N_r 可表示为诸 I_t 的简单函数：

$$N_s \equiv \sum_{t=1}^{n} Y_t\,,\quad Y_t \equiv I_t I_{t+1} + (1 - I_t)(1 - I_{t+1}) \qquad (2.2.3)$$

$$N_r \equiv n - N_s \qquad (2.2.4)$$

若价格的对数遵从无漂移的独立同分布(IID)随机游动(2.2.1)，且若再增加增量 ε_t 的分布是对称的这一限定，那么不论 r_t 是正或负都是等可能的，就像是每个基本结果的概率都为二分之一的硬币抛掷概型一样。这就意味着对任意不间断的收益，其顺序和反转都是同等可能的；因此科尔斯—乔恩斯比率(Cowles-Jones ratio)$\widehat{\mathrm{CJ}} \equiv N_s/N_r$ 应该近似地等于 1。更规范地，这一比率可解释为顺序概率 π_s 和反转概率 $1-\pi_s$ 的比率 CJ 的一致估计。因为：

$$\widehat{\mathrm{CJ}} \equiv \frac{N_s}{N_r} = \frac{N_s/n}{N_r/n} = \frac{\hat{\pi}_s}{1-\hat{\pi}_s} \xrightarrow{pr} \frac{\pi_s}{1-\pi_s} = \mathrm{CJ} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

这里“$\xrightarrow{pr}$”表示依概率收敛。许多历史股票收益序列的这一比率大于 1 的事实使得科尔斯和乔恩斯(Cowles and Jones,1937)得出结论：这一事实便是“代表了股票价格内在结构的不容置疑的证据”。①

然而，无漂移的假设对 CJ 取值的判定是带决定性的。典型地，对有漂移的 IID 随机

① 在日后的研究中，科尔斯(Cowles,1960)校正了时序平均价格资料中的偏差，但发现 CJ 比数仍然超过 1。然而科尔斯的结论多少还是很谨慎的：“……各种研究都揭示出股票价格的变动有一种持续的趋势，在支付了佣金成本后就不足以提供微小的利润。”

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

游动来说 CJ 值会超过 1，因为不管是正的还是负的漂移都显然会使序列更有可能出现顺序。为此，假定价格的对数遵从有漂移的正态随机游动，比如：

$$p_t=\mu+p_{t-1}+\varepsilon_t,\quad \varepsilon_t\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

那么，示性变量 I_t 便不再表示一个均匀的硬币抛掷概型，而是在漂移的方向上存在偏差，例如：

$$I_t=\begin{cases}1 & \text{具有概率}\quad \pi\\ 0 & \text{具有概率}\quad 1-\pi\end{cases}\tag{2.2.5}$$

这里：

$$\pi\equiv\Pr(r_t>0)=\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\tag{2.2.6}$$

若漂移 μ 为正，则 $\pi>\frac{1}{2}$；若 μ 为负，则 $\pi<\frac{1}{2}$。在这种更为一般的规范下，π_s 与 $1-\pi_s$ 的比率可由下式给出：

$$\mathrm{CJ}=\frac{\pi^2+(1-\pi)^2}{2\pi(1-\pi)}\geqslant 1$$

只要漂移是非零的，那么顺序的可能性始终大于反转，因为一个非零的漂移量给整个过程带来了一种趋势。仅在 $\pi=\frac{1}{2}$ 的这种“公平游戏”的情形下，CJ 比数才会达到其为 1 的下界。

为考察一个非零的漂移会给 CJ 系数带来多大的影响，假设 $\mu=0.08$ 且 $\sigma=0.21$，这两个值大约对应了在过去的半个世纪以来美国年度股票收益指数的情形。由此可得 π 的估计如下：

$$\hat{\pi}=\Phi\left(\frac{0.08}{0.21}\right)=0.6484$$

$$\hat{\pi}_s=\hat{\pi}^2+(1-\hat{\pi})^2=0.5440$$

$$\widehat{\mathrm{CJ}}=1.19$$

此值非常接近于 1.17，该值是科尔斯和乔恩斯（Cowles and Jones，1937，表 1）对 1835～1935 年铁路股票价格指数年收益进行研究后得出的结果。我们接下来所关心的是这种差异在统计上是否显著。

为对 1.19 和 1.17 这两个值的差异的显著性作一个正式的统计检验，我们需用 $\widehat{\mathrm{CJ}}$ 估计量的抽样分布。注意到(2.2.3)式中估计量 N_s 是一个二项分布的随机变量，也就是说它是 n 个贝努里随机变量 Y_t 的和，由此可获得关于 $\widehat{\mathrm{CJ}}$ 估计量的样本分布。这里：

$$Y_t=\begin{cases}1 & \text{具有概率}\quad \pi_s=\pi^2+(1-\pi)^2\\ 0 & \text{具有概率}\quad 1-\pi_s\end{cases}$$

因此，对较大的 n，可用具有均值 $\mathrm{E}[N_s]=n\pi_s$ 及方差 $\mathrm{Var}[N_s]$ 的正态分布来近似 N_s

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的分布。由于各对邻近的 Y_t 之间是不独立的[①]，N_s 的方差便不是通常的二项分布随机变量的方差 $n\pi_s(1-\pi_s)$，而是：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[N_s]&=n\pi_s(1-\pi_s)+2n\mathrm{Cov}[Y_t,Y_{t+1}]\\&=n\pi_s(1-\pi_s)+2(\pi^3+(1-\pi)^3-\pi_s^2)\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

将一阶泰勒近似展开式或者戴尔塔方法(delta method，见附录 A.4)应用于式 $\widehat{\mathrm{CJ}}=N_s/(n-N_s)$，并以渐近正态作 N_s 分布的近似，可得：

$$\widehat{\mathrm{CJ}}\overset{a}{\sim}\mathcal{N}\left(\frac{\pi_s}{1-\pi_s},\frac{\pi_s(1-\pi_s)+2(\pi^3+(1-\pi)^3-\pi_s^2)}{n(1-\pi_s)^4}\right)\tag{2.2.8}$$

这里"$\overset{a}{\sim}$"表明分布是渐近的。因由科尔斯和乔恩斯(Cowles and Jones，1937)从 n 为 99 的股票收益样本资料中估计的 $\widehat{\mathrm{CJ}}=1.17$ 可得 $\hat{\pi}_s=0.5392$ 及 $\hat{\pi}=0.6399$，这样(2.2.8)式意味着 1.17 估计值的近似标准误差为 0.2537。因此，1.17 估计值与 1.19 估计值的差异在统计上是不显著的。此外，在 $\pi=\frac{1}{2}$ 的原假设下，$\widehat{\mathrm{CJ}}$ 具有均值为 1 且标准差为0.2010；因此不管是1.17还是 1.19 在统计上都显著地区别于 1。这为随机游动假设提供了少许证据。

另一方面，假定随机游动假设为不真，那么利用 CJ 统计量是否可对此作出检测？为观察怎样偏离随机游动可对 CJ 比产生影响，令示性变量 I_t 为如下的两状态马尔可夫链：

$$\begin{array}{cc} & I_{t+1} \\ & \begin{array}{cc}1 & 0\end{array} \\ I_t\ \begin{array}{c}1\\0\end{array} & \begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}\end{array}\tag{2.2.9}$$

这里，α 是 r_t 为正的条件下 r_{t+1} 为负的条件概率，β 是 r_t 为负的条件下 r_{t+1} 为正的条件概率。若 $\alpha=1-\beta$，上式就简化为我们上面研究过的情形(令 $\pi=1-\alpha$)：有漂移的 IID 随机游动。只要 $\alpha\neq1-\beta$，则 I_t(从而 r_t)将是序列相关的，这也就违背了 RW1。这种情形下 CJ 比的理论值由下式给出：

$$\mathrm{CJ}=\frac{(1-\alpha)\beta+(1-\beta)\alpha}{2\alpha\beta}\tag{2.2.10}$$

其可取任意非负实值，如下所示：

① 事实上，Y_t 是两状态的马尔可夫链，具有概率 $\Pr(Y_t=1|Y_{t-1}=1)=(p^3+(1-p)^3)/p_s$ 及 $\Pr(Y_t=0|Y_{t-1}=0)=1/2$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

α \ β	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
0.10	9.00	6.50	5.67	5.25	5.00	4.83	4.71	4.63	4.56	4.50
0.20	6.50	4.00	3.17	2.75	2.50	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00
0.30	5.67	3.17	2.33	1.92	1.67	1.50	1.38	1.29	1.22	1.17
0.40	5.25	2.75	1.92	1.50	1.25	1.08	0.96	0.87	0.81	0.75
0.50	5.00	2.50	1.67	1.25	1.00	0.83	0.71	0.63	0.56	0.50
0.60	4.83	2.33	1.50	1.08	0.83	0.67	0.55	0.46	0.39	0.33
0.70	4.71	2.21	1.38	0.96	0.71	0.55	0.43	0.34	0.27	0.21
0.80	4.63	2.13	1.29	0.87	0.63	0.46	0.34	0.25	0.18	0.12
0.90	4.56	2.06	1.22	0.81	0.56	0.39	0.27	0.18	0.11	0.06
1.00	4.50	2.00	1.17	0.75	0.50	0.33	0.21	0.12	0.06	0.00

当α和β都逼近1，反转的似然性增加，则CJ逼近于0。当α或β逼近0，顺序的似然性增加，则CJ将无限增大。在这些情形下，CJ显然是对偏离RW1的一个合理的指针。但是，注意到有使$\alpha \neq 1-\beta$且$\mathrm{CJ}=1$成立的这种(α,β)组合的存在，比如，$(\alpha,\beta)=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{8}\right)$，因此CJ统计量就无法从RW1中区分这些情形（进一步讨论见本章习题2.3）。

游程

RW1的另一个常用检验是游程检验，其将不间断的正或负的收益的顺序数，或称游程，与在随机游动假设下的样本分布进行列表比较检验。例如，利用(2.2.2)式中定义的示性变量I_t，10个收益资料的特定顺序可能表示为1001110100，其中包含了三个1游程（游程长度分别为1，3和1）和三个0游程（长度分别为2，1和2），一共六个游程。不同的是对于顺序0000011111虽然其含有的0和1的数目与上例相同，但其只含2个游程。通过对样本资料中的游程数与RW1假设下的期望游程数相比较，即可构造对IID随机游动假设的检验。为实施游程检验，对容量为n的样本我们需掌握其游程总数N_{runs}的样本分布。对此，穆德(Mood，1940)首次提出了游程的综合分析法。这里我们将对该方法的一般结论作一简短的总结。

假设n个IID样本资料分别以概率$\pi_i, i=1,\cdots,q$（因此$\sum_i \pi_i = 1$）在q个可能值中取值。如在(2.2.2)式中所定义的示性变量I_t的情形下，q即等于2；记$N_{\mathrm{runs}}(i)$为i类游程（任意长度）的总数，$i=1,\cdots,q$；因此游程总数$N_{\mathrm{runs}} = \sum_i N_{\mathrm{runs}}(i)$。利用联合自变量及其多项分布的性质，穆德(Mood，1940)导出了$N_{\mathrm{runs}}(i)$的离散分布并由此计算了下列特征

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

数(矩)：

$$E[N_{runs}(i)]=n\pi_i(1-\pi_i)+\pi_i^2 \tag{2.2.11}$$

$$\text{Var}[N_{runs}(i)]=n\pi_i(1-4\pi_i+6\pi_i^2-3\pi_i^3)+\pi_i^2(3-8\pi_i+5\pi_i^2) \tag{2.2.12}$$

$$\text{Cov}[N_{runs}(i),N_{runs}(j)]=-n\pi_i\pi_j(1-2\pi_i-2\pi_j+3\pi_i\pi_j)-\pi_i\pi_j(2\pi_i+2\pi_j-5\pi_i\pi_j) \tag{2.2.13}$$

而且，穆德(Mood，1940)指出经适当的正态性变换，游程数的分布渐近地收敛于正态分布。特别地，有：

$$x_i\equiv\frac{N_{runs}(i)-n\pi_i(1-\pi_i)-\pi_i^2}{\sqrt{n}} \overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,\pi_i(1-\pi_i)-3\pi_i^2(1-\pi_i)^2) \tag{2.2.14}$$

$$\text{Cov}[x_i,x_j]\overset{a}{=}-\pi_i\pi_j(1-2\pi_i-2\pi_j+3\pi_i\pi_j) \tag{2.2.15}$$

$$x\equiv\frac{N_{runs}-n(1-\sum_i\pi_i^2)}{\sqrt{n}} \overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,\sum_{i=1}^{k}\pi_i^2(1+2\pi_i)-3(\sum_{i=1}^{k}\pi_i^2)^2) \tag{2.2.16}$$

这里“$\overset{a}{=}$”表示渐近相等。这样便可利用(2.2.14)式或(2.2.16)式的渐近近似来进行RW1的检验，其中概率π_i可直接由比率$\hat{\pi}_i\equiv n_i/n$来估计，这里n_i是容量为n的样本的第i类游程数，因而有$n=\sum_i n_i$。

为理解游程总数的特性，考虑$k=2$的贝努里试验的情形，其对应于第2.2.2节中(2.2.2)式所定义的示性变量I_t，其中记π为$I_t=1$的概率。此时，游程数的期望为：

$$E[N_{runs}]=2n\pi(1-\pi)+\pi^2+(1-\pi)^2 \tag{2.2.17}$$

我们注意到，对任意$n\geqslant1$，(2.2.17)式是π在[0,1]上的凹二次函数，当$\pi=\frac{1}{2}$时达到最大值$(n+1)/2$。因此，对任意固定的样本容量n，无漂移的随机游动可使期望游程总数达到最大，换句话说，正/负漂移的出现均会降低期望游程总数。

为考察$E[N_{runs}]$对于漂移的灵敏度，在表2.2中我们给出了增量为正态分布、漂移$\mu=0\%,\cdots,20\%$、标准差$\sigma=21\%$(已调整为符合美国年度股票指数收益的水平)的样本容量为$n=1\,000$的几何随机游动的期望游程总数；因此$\pi=\Phi(\mu/\sigma)$。从表2.2中可见，当漂移量增大时，期望游程总数明显下降，从零漂移时的500.5下降到漂移为20%时的283.5。但是，所有这些值都仍然符合随机游动假设。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 2.2 漂移为 μ 的随机游动的期望游程

n	μ	π	$\mathrm{E}[N_{\text{runs}}]$
1 000	0	0.500	500.5
1 000	2	0.538	497.6
1 000	4	0.576	489.1
1 000	6	0.612	475.2
1 000	8	0.648	456.5
1 000	10	0.683	433.6
1 000	12	0.716	407.2
1 000	14	0.748	378.1
1 000	16	0.777	347.3
1 000	18	0.804	315.5
1 000	20	0.830	283.5

注：上表为具有漂移 $\mu=0\%,\cdots,20\%$，标准差 $\sigma=21\%$ 的高斯几何布朗运动中表示正/负连续组合收益的容量为 n 的独立贝努里试验中游程总数的期望值。

为检验贝努里情形下的随机游动，可计算如下统计量：

$$z=\frac{N_{\text{runs}}-2n\pi(1-\pi)}{2\sqrt{n\pi(1-\pi)[1-3\pi(1-\pi)]}}\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$$

并进行通常的显著性检验。由于 N_{runs} 取整数，因而在区间 $[N_{\text{runs}},N_{\text{runs}}+1)$ 上的概率应是不变的。当正态近似对在区间 $[N_{\text{runs}},N_{\text{runs}}+1)$ 上的实现产生不同概率时就需对此统计量略加调整。由此，z 统计量中加入了一个连续性修正项，以使其取值于区间的中点（见沃利斯和罗伯茨[Wallis and Roberst，1956]）；因此有：

$$z=\frac{N_{\text{runs}}+\frac{1}{2}-2n\pi(1-\pi)}{2\sqrt{n\pi(1-\pi)[1-3\pi(1-\pi)]}}\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$$

游程的一些其他特性也曾用于检验 IID 随机游动，比如游程的长度及符号的分布。确实，穆德（Mood，1940）的开创性论文对游程的性质作了彻底的研究，包括精确的边际分布及联合分布，阶乘矩，中心矩以及渐近近似等。对这些研究结果的一个很好的总结以及与此相关的概率统计问题都包含在了戴维和巴顿（David and Barton，1962）的成果中。法马（Fama，1965）对美国 1956～1962 年间每 1 天、4 天、9 天及 16 天的股票收益序列的游程进行了大量的经验分析，作出的结论是“……从投资或统计的观点来看，没有证据显示这些收益资料之间存在有严重的相关性。”

对马尔可夫链分析的最近的进展将游程理论推广到了非 IID 序列，并且通过比如将

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

游程作为一个排列组的因子等模式的复位，十分复杂的模式的概率可利用定义在排列组上的随机过程的首段落(first-passage)或撞击(hitting)时间来明确计算。有关这些最近的研究成果，见阿尔德斯(Aldous,1989)，阿尔德斯和戴尔科尼斯(Aldous and Diaconis,1986)，以及戴尔科尼斯(Diaconis,1988)。

2.3 随机游动 2 的检验:独立增量

增量同分布的限定显然是不合情理的，特别是应用于跨越几十年的金融资料。然而，在不假定同分布的情况下来检验独立性是十分困难的，尤其是针对时间序列资料。如果对样本的边际分布在时间上的改变不加任何限制，那么连最基本的统计量的抽样分布都无法导出，统计推断就变得完全不可能。

在第 2.2.1 节中曾提到的一些非参数方法，比如秩相关，确实不需要同分布即可检验独立性。但是，特性边际分布的数目往往是一个较小的有限数，例如：对智商分(IQ Scores)与学习成绩的独立性检验就包含两个特性边际分布：一个针对智商而另一个针对学习成绩。对每一边际分布的抽样形成多维的样本观察资料对，并且可构造许多非参数方法来检验各边际分布的乘积是否等于观察资料对的联合分布。如果对智商与学习成绩的每一观察值都假定惟一的边际分布，那么这种方法显然是不能成功的。

不过有两条可看作对 RW2 的一种“经济”检验的经验研究路线：滤波器法则(Filter Rule)和技术分析(Technical analysis)。虽然两种方法都未太多使用正式的统计推断，但两者出于实用都抓住了金融的共性。这并不是说统计推断不能用于这种分析模式，而是在文献中检验所依据的标准有着十分不同的发展方向。因此对这些技术我们只能作一粗略的回顾。

2.3.1 滤波器法则

为检验 RW2，亚历山大(Alexander,1961,1964)采用了一种滤波器法则，其当一种资产的价格预期增长 $x\%$时买入，而(短期内)当价格预期下跌 $x\%$时卖出。这一法则称为 $x\%$滤波器，是亚历山大(1961)基于下述原因提出的：

> 假设我们试验性地假定股票市场的价格存在有趋势，并且相信这种趋势被市场的波动所掩盖。这时可能就需要滤掉所有小于某一特定量的变动而只考察剩余的变动。

这种动态组合投资策略的全部回报被认为是衡量资产收益可预见性的尺度。对道·琼斯工业指数、标准普尔工业指数及普尔工业指数的全部收益与从购买并持有(buy-and-

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

hold)策略中所获收益的比较使亚历山大得出结论："……股票市场价格存在某些趋势……"。

法马(Fama，1965)、法马和布鲁姆(Fama and Blume，1966)对滤波器法则提出了一个更为详细的经验分析，对红利及交易成本作了修正，结果认为该法则不如购买并持有策略好。在没有交易成本的情况下，很小的滤波器阈值[亚历山大(Alexander，1964)]提出的1%及法马和布鲁姆(Fama and Blume，1966)提出的介于0.5%～1.5%之间)确实有更高的收益，但很小的滤波器阈值会大大提高交易的频度。法马和布鲁姆(Fama and Blume，1966)的研究表明，即便是0.1%的来回交易成本就足以抵消采用该法则所获的利润。

2.3.2 技术分析

作为资产收益可预见性的一种度量，滤波器法则具有现实实用的优点，它是一种特殊而易于操作的交易策略，成功的度量标准是交易的全部收益。滤波器法则只是大量从技术分析或图标法中产生的一种方法。技术分析是一种基于确信历史价格序列、交易量以及其他市场统计指针都呈现出一定规律性的投资管理方法。这种规律性通常(并不总是)在外形上呈现出某种几何模式，比如双层底(double bottoms)、头肩差(head-and-shoulders)以及支撑(support)和阻力(resistance)等，有益于用来外推未来价格的变动(可参见埃德华兹和麦哲(Edwards and Magee，1966)以及墨菲(Murphy，1986)的文献)。技术分析用埃德华兹和麦哲的话来说就是：

> 技术分析是一种通常以图像方式对特定股票或市场平均的实际历史交易(价格变化，交易量等)进行记录并从历史图像上推断其可能的未来趋势的技术。

历史上，技术分析曾是金融学术界的"害群之马"，被很多学者认为是介于占星术和西非原始的伏都教之间的东西。技术分析从来就没有得到过像传统的基础分析这样的认同度。这种状态持续至今，尽管现在技术分析与基础分析的区别正在逐渐变模糊。[①]

对技术分析的某些偏见可归因于语义学。由于基础分析是基于许多金融学家所熟悉的量——例如：收入、红利及其他资产负债表、收入申报表等，它与学术研究之间存在着天然的沟通桥梁。相反，技术分析一词对学术界来说完全是异物，而对公众来说常常又很神秘。例如，考虑下列可在近期任何金融学术期刊上看到的陈述：

> 前十二个自相关衰减的形式与幅度以及鲍克斯—彼尔斯(Box-Pierce)Q统计量表明了股票收益资料中存在的高频可预测成分。

与此对照的陈述为：

① 例如，许多技术分析不再仅根据历史价格和交易量进行预测工作，而是同样利用了收入、红利及其他"基础"资料；与此同时，基础分析除了使用许多传统资料变量外，目前也关注历史价格和交易方式。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

可明确识别的支撑和阻力水平，及此价格区间内伴随的三分之一的回档量表明近期存在很强的买入与卖出机会。

两种陈述含有相同的寓意，即利用历史价格资料，在短期内我们可在一定程度上预测其未来价格。但由于两种陈述都充满了行话以至于其所引发的结果很大程度上取决于人们各自对它的理解。

尽管存在专业术语上的区别，近期的经验实证表明技术分析与较传统的金融分析可能有许多共同之处（特别地，见第 2.8 节）。布鲁姆、埃斯利、奥哈拉（Blume，Easley，O'Hara，1944），莱伯罗恩（LeBaron，1996），纳夫特西（Neftci，1991），庖（Pau，1991），泰勒和爱伦（Taylor and Allen，1992），特雷诺和费格森（Treynor and Ferguson，1985）等人近期的研究表明，金融学术界对技术分析的兴趣正在增加，技术分析有望在不久的将来成为一个非常活跃的研究领域。

2.4 随机游动 3 的检验：不相关增量

对单个时间序列的随机游动及鞅假设最直接与直观的检验是检查其序列相关性，即同一序列不同时点上的两个观察值间的相关性。对 RW3 这种最弱的随机游动形式，增量或序列各水平的一阶差分对任意时点的前置或后滞都是不相关的。因此，我们可以在对任意滞后其一阶差分的自相关系数均为零的原假设下来检验 RW3。

这一看上去简单的方法其实是随机游动的大量检验方法的基础，本章我们也将对这些检验作出介绍。例如，随机游动的检验可基于其自身的自相关系数（第 2.4.1 节），通过自相关系数的平方和还可构造功效更大的检验（第 2.4.2 节），自相关系数的线性组合在检测对随机游动的某种偏离性方面有一定优势（第 2.4.3 及第 2.4.5 节）。因此，在下面的几节中我们将对自相关系数的性质给予很大的关注。

2.4.1 自相关系数

自相关系数是众所周知的两变量 x 和 y 之间的相关系数在自然时间序列上的扩展。

$$\mathrm{Corr}[x,y]\equiv\frac{\mathrm{Cov}[x,y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[x]}\sqrt{\mathrm{Var}[y]}} \tag{2.4.1}$$

给定协方差平稳的时间序列 $\{r_t\}$，k 阶的自协方差和自相关系数 $\gamma(k)$ 和 $\rho(k)$ 分别定义如下[①]：

---

① 协方差平稳的要求主要是为了记号上的方便，否则 $r(k)$ 及 $\rho(k)$ 将是 t 的及 k 的函数，且若二阶矩为非有限的话，这就没有很好的定义。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\gamma(k) \equiv \mathrm{Cov}[r_t, r_{t+k}] \tag{2.4.2}$$

$$\rho(k) \equiv \frac{\mathrm{Cov}[r_t, r_{t+k}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[r_t]}\sqrt{\mathrm{Var}[r_{t+k}]}} = \frac{\mathrm{Cov}[r_t, r_{t+k}]}{\mathrm{Var}[r_t]} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \tag{2.4.3}$$

这里(2.4.3)式中的第二个等式源于$\{r_t\}$是协方差平稳的。对给定的样本$\{r_t\}_{t=1}^{T}$，自协方差和自相关系数可自然地通过用总体矩替换样本相应矩的方法进行估计：

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}(r_t - \bar{r}_T)(r_{t+k} - \bar{r}_T), 0 \leqslant k \leqslant T \tag{2.4.4}$$

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} \tag{2.4.5}$$

$$\bar{r}_T \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t \tag{2.4.6}$$

当然，$\hat{\gamma}(k)$和$\hat{\rho}(k)$的样本分布取决于$\{r_t\}$的资料产生过程。例如，若r_t是有限阶的移动平均过程，则：

$$r_t = \sum_{k=0}^{M} \alpha_k \varepsilon_{t-k}$$

其中，$\{\varepsilon_t\}$是一具有 0 均值，方差为σ^2，四阶矩为$\eta\sigma^4$，六阶矩有限的独立序列。弗勒(Fuller，1976，定理 6.3.5)阐明了自协方差系数的估计向量的分布是渐近多元正态：

$$\sqrt{T}[\hat{\gamma}(0)-\gamma(0) \quad \hat{\gamma}(1)-\gamma(1) \cdots \hat{\gamma}(m)-\gamma(m)]' \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, \mathbf{V}) \tag{2.4.7}$$

其中：

$$\mathbf{V} = [v_{ij}]$$

$$v_{ij} \equiv (\eta - 3)\gamma(i)\gamma(j) + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}[\gamma(\ell)\gamma(\ell - i + j) + \gamma(\ell + j)\gamma(\ell - i)] \tag{2.4.8}$$

在同样的假定下，弗勒(Fuller，1976，见第 6.3.5.1 的推论)指出了自相关系数估计向量的渐近分布也是多元正态：

$$\sqrt{T}[\hat{\rho}(0)-\rho(0) \quad \hat{\rho}(1)-\rho(1) \quad \cdots \quad \hat{\rho}(m)-\rho(m)]' \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, \mathbf{G}) \tag{2.4.9}$$

其中：

$$\mathbf{G} = [g_{ij}]$$

$$g_{ij} \equiv \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}[\rho(\ell)\rho(\ell - i + j) + \rho(\ell + j)\rho(\ell - i) - 2\rho(j)\rho(\ell)\rho(\ell - i) - 2\rho(i)\rho(\ell)\rho(\ell - j) + 2\rho(i)\rho(j)\rho^2(\ell)] \tag{2.4.10}$$

为检验所有总体自协方差均为零的随机游动假设，这些渐近近似要简化到较简单的形式且更多地提到的是其有限样本的均值和方差。特别地，若$\{r_t\}$满足 RW1，且方差为σ^2，六阶矩与σ^6成比例，则：

$$\mathrm{E}[\hat{\rho}(k)] = -\frac{T-k}{T(T-1)} + O(T^{-2}) \tag{2.4.11}$$

$$\mathrm{Cov}[\hat{\rho}(k), \hat{\rho}(\ell)] = \begin{cases} \dfrac{T-k}{T^2} + O(T^{-2}) & 若\ k = \ell \neq 0 \\ O(T^{-2}) & 其他 \end{cases} \tag{2.4.12}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

由(2.4.11)式可见，在 RW1 下，其中 $\rho(k)=0$ 对一切 $k>0$，样本自相关系数 $\hat{\rho}(k)$ 是负偏的。这种负偏来源于下述事实，即自相关系数是 r_t 与其均值的离差的叉积和的大小，且如果均值未知，就必须估计，通常就使用样本均值(2.4.6)式。然而在构造上 r_t 与样本均值的离差和为零；因此平均起来正离差最后必须跟有负离差，反之亦然。由此，离差交叉积的均值是负的。

对较小的样本，这种效应是很显著的：样本容量为 10 时 $\hat{\rho}(1)$ 的均值将为 −10%。在 RW1 下，弗勒(Fuller，1976)提议使用下述偏差修正估计量 $\tilde{\rho}(k)$：[①]

$$\tilde{\rho}(k)=\hat{\rho}(k)+\frac{T-k}{(T-1)^2}(1-\hat{\rho}^2(k)) \tag{2.4.13}$$

加之其六阶矩均匀有界，弗勒(Fuller，1976)指出样本自相关系数是渐近独立的且具有如下正态分布：

$$\sqrt{T}\hat{\rho}(k)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,1) \tag{2.4.14}$$

$$\frac{T}{\sqrt{T-k}}\tilde{\rho}(k)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,1) \tag{2.4.15}$$

这些结果产生了多种基于自相关函数的对随机游动 RW1 的检验。

罗和麦金雷(Lo and MacKinlay，1988)，理查德森和史密斯(Richardson and Smith，1994)以及罗马诺和托姆斯(Romano and Thombs，1996)等人在更弱的条件下，即不相关的弱从属观察值情形下，导出了样本自相关系数分布的渐近近似。这些结果可用于构造对 RW2 和 RW3 的检验(见下面第 2.4.3 节)。

2.4.2 多用途统计量

因 RW1 意味着所有的自相关系数均为零，一个对很多备选假设都具功效的 RW1 的简单检验统计量是源于鲍克斯和皮尔斯(Box and Pierce，1970)的 Q 统计量：

$$Q_m \equiv T\sum_{k=1}^{m}\rho^2(k) \tag{2.4.16}$$

在 RW1 的原假设下，并利用(2.4.14)式，很容易看出 $\hat{Q}_m \equiv T\sum_{k=1}^{m}\hat{\rho}^2(k)$ 的渐近分布为 χ^2_m。卢恩和鲍克斯(Ljung and Box，1978)证明了对于小样本下述有限样本修正统计量对 χ^2_m 的拟合更好，则：

$$Q'_m \equiv T(T+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\rho^2(k)}{T-k} \tag{2.4.17}$$

通过自相关函数的平方和，博克斯—皮尔斯 Q 统计量意在任意方向及所有滞后长度

① 并非 $\tilde{\rho}(k)$ 是无偏的；“偏差修正”一词是针对 $\mathrm{E}[\tilde{\rho}(k)]=O(T^{-2})$ 而言的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

上检测其对零自相关的偏离。因此，其对随机游动的相当广泛的一类备选假设具有检验功效。但是，自相关阶数 m 的选择需要注意。如果定得太少，存在的高阶自相关就会被遗漏；如果定得太多，则会因高阶自相关的不显著而削弱检验的功效。因此，虽然这种多用途统计量确实有一定魅力，但当能够识别特定的备选假设时，对随机游动假设还可有更好的检验方法。下一节我们就转向这类例子。

所有三种随机游动假设的一个重要性质是随机游动增量的方差必须是时间段的线性函数[①]。例如，股票价格对数的 RW1 过程，其连续组合收益 $r_t \equiv \log P_t - \log P_{t-1}$ 是 IID 的，则 $r_t + r_{t-1}$ 的方差必须是 r_t 方差的两倍。因此，随机游动模型的似真性可通过将 $r_t + r_{t-1}$ 的方差与两倍的 r_t 方差进行比较来检验[②]。当然，在实用上即使随机游动假设为真，这些数字也不会完全相同，但是它们的比在统计上应与 1 没什么差异。因此，为利用方差比构造随机游动假设的检验统计量，就必须在随机游动的原假设下掌握其抽样分布。

方差比的总体性质

在推导这种方差比的样本分布之前，我们先在各种场合下对方差比统计量的总体取值说明一些直觉性的东西。考虑两期的连续组合收益 $r_t(2) \equiv r_t + r_{t-1}$ 的方差比两倍于单期收益 r_t 的方差，并且目前除了平稳性外我们对收益的时间序列不作任何其他假定。这样方差比，记为 VR(2)，可简化为：

$$\mathrm{VR}(2) = \frac{\mathrm{Var}[r_t(2)]}{2\mathrm{Var}[r_t]} = \frac{\mathrm{Var}[r_t + r_{t-1}]}{2\mathrm{Var}[r_t]} = \frac{2\mathrm{Var}[r_t] + 2\mathrm{Cov}[r_t, r_{t-1}]}{2\mathrm{Var}[r_t]}$$

$$\mathrm{VR}(2) = 1 + 2\rho(1) \tag{2.4.18}$$

其中，$\rho(1)$ 是收益序列 $\{r_t\}$ 的一阶自相关系数。对任意平稳时间序列，方差比统计量 VR(2) 的总体取值即为 1 加上一阶自相关系数。特别需指出的是，在 RW1 下所有的自相关均为零，因此正如我们所预料的，在这一情形下有 VR(2)＝1。

在存在有正的一阶自相关的情形下，VR(2) 将大于 1。若收益是正自相关的，那么两个单期收益的和的方差将大于单期收益方差的和；因此方差的增长快于线性增长。相反，在存在有负的一阶自相关的情形下，那么两个单期收益的和的方差将小于单期收益方差的和，因此方差的增长慢于线性增长。

除了单期和两期收益的比较以外，便要开始考虑高阶自相关。特别需指出的是，有一个相似的结论表明一般地 q 期方差比统计量 VR(q) 满足下列关系式：

---

① 这种线性性质在 RW2 和 RW3 的情形下很难确定，因为增量的方差可能随时间的变化而变化。然而，即使在这些情形下，和的方差也必须等于方差的和，这也就是方差比检验所揭示的线性性质。我们下面将针对所有三种假设来构造检验。

② 在设计有关资产回报可预见性的检验的许多研究都揭示了随机游动假设的这一性质。近期的研究例子包括坎贝尔和曼昆(Campbell and Mankiw, 1987)，柯克雷恩(Cochrane, 1988)，浮士德(Faust, 1992)，罗和麦金雷(Lo and MacKinly, 1988)，波特巴和萨默斯(Poterba and Summers, 1988)，理查德森(Richardson, 1993)及理查德森和斯托克(Richardson and Stock, 1989)的文献中。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\mathrm{VR}(q) \equiv \frac{\mathrm{Var}[r_t(q)]}{q \cdot \mathrm{Var}[r_t]} = 1 + 2\sum_{k=1}^{q-1}\left(1 - \frac{k}{q}\right)\rho(k) \tag{2.4.19}$$

其中，$r_t(k) \equiv r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}$ 且 $\rho(k)$ 为 $\{r_t\}$ 的第 k 阶自相关系数。此式表明 VR(q) 是典型的序列 $\{r_t\}$ 前 $k-1$ 个自相关系数的线性组合，并具有线性衰减权数。

在 RW1 下，(2.4.19)式表明对一切 q 有 VR(q)＝1，因为在此情形下有 $\rho(k)=0$，这里，$k>1$。而且，即使在 RW2 和 RW3 下，VR(q)必须仍然为 1，只要 r_t 的方差有限且"平均方差"$\sum_{t=1}^{T}\mathrm{Var}[r_t]/T$ 收敛到一个有限正数。但是(2.4.19)式对随机游动的备选情形提供了更多的信息，因为其将 VR(q)的特性与相应备选情形下 $\{r_t\}$ 的自相关函数联系在了一起。例如，在 AR(1)的备选情形下，有 $r_t = \phi \cdot r_{t-1} + \varepsilon_t$，则(2.4.19)式便意味着：

$$\mathrm{VR}(q) = 1 + 2\sum_{k=1}^{q-1}\left(1 - \frac{k}{q}\right)\phi^k = 1 + \frac{2}{1-\phi}\left[\phi - \frac{\phi^q}{q} - \frac{\phi - \phi^q}{q(1-\phi)}\right]$$

上述这些关系对使方差比检验处处都具功效的备选假设的构造是很关键的，下面我们还将回到这一议题上。

RW1 下 $\widehat{\mathrm{VR}}(q)$ 及 $\widehat{\mathrm{VR}}(q)$ 的样本分布

为对 RW1 构造统计检验，我们按罗和麦金雷(Lo and MacKinly，1988)提出的方法，并从提出原假设 H_0 开始，从而导出检验统计量的样本分布[①]。记 p_t 为价格过程的对数，且记 $r_t \equiv p_t - p_{t-1}$ 为连续组合收益。

这一节中我们考虑的原假设是：[②]

$$H_0: r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t\ \mathrm{IID}\ \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

设样本由对数价格 $\{p_0, p_1, \cdots, p_{2n}\}$ 这 $2n+1$ 个观察值组成，且考虑 μ 和 σ^2 的估计如下：

$$\hat{\mu} \equiv \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(p_k - p_{k-1}) = \frac{1}{2n}(p_{2n} - p_0) \tag{2.4.20}$$

$$\hat{\sigma}_a^2 \equiv \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(p_k - p_{k-1} - \hat{\mu})^2 \tag{2.4.21}$$

$$\hat{\sigma}_b^2 \equiv \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(p_{2k} - p_{2k-2} - 2\hat{\mu})^2 \tag{2.4.22}$$

等式(2.4.20)和等式(2.4.21)即为样本均值与方差通常的估计量。它们同样也是 μ 和 σ^2 的极大似然估计量(见第 9 章第 9.3.2 节)。σ^2 的第二个估计量 $\hat{\sigma}_b^2$ 则是利用了 p_t 的随机游动属性：在 RW1 下增量的均值和方差在增量区间内是线性的，因此 σ^2 也可通过偶

---

① 可选的研究文献见坎贝尔和曼昆(Campbell and Mankiw，1987)，柯克雷恩(Cochrane，1988)，浮士德(Faust，1992)，波特巴和萨默斯(Poterba and Summers，1988)，理查德森(Richardson，1993)及理查德森和斯托克(Richardson and Stock，1989)。

② 我们假设正态性只是为了说明上的方便——这一节的结果一般更适用于对数价格过程这种具有有限四阶距的 IID 增量过程。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

数项观察值$\{p_0, p_2, p_4, \cdots, p_{2n}\}$的增量的方差的一半来估计。

由标准的渐近理论，所有这三个估计量都具有强一致性，即设其他参数不变，当样本观察值总数 $2n$ 无限增大时，估计量几乎肯定收敛到其总体真值。而且，众所周知 $\hat{\sigma}_a^2$ 和 $\hat{\sigma}_b^2$ 具有下列正态极限分布(例子见斯图尔特和奥德(Stuart and Ord,1987)：

$$\sqrt{2n}(\hat{\sigma}_a^2 - \sigma^2) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 2\sigma^4) \tag{2.4.23}$$

$$\sqrt{2n}(\hat{\sigma}_b^2 - \sigma^2) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 4\sigma^4) \tag{2.4.24}$$

然而，我们是要寻找方差比的极限分布。虽然容易看出在 RW1 下这一比率也是均值为 1 的渐近正态，但极限分布的方差却并非显而易见，因为很明显，两个方差估计量并非渐近不相关。

但因估计量 $\hat{\sigma}_a^2$ 在原假设 RW1 下是渐近有效的，我们可利用豪斯曼(Hausman,1978)的结论，即一个一致估计与一个渐近有效估计的差的渐近方差即为相应的渐近方差的差①。

若定义差估计量的方差为$\widehat{\mathrm{VD}}(2) \equiv \hat{\sigma}_b^2 - \hat{\sigma}_a^2$，则由(2.4.23)式，(2.4.24)式及豪斯曼的结论有：

$$\sqrt{2n}\widehat{VD}(2) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 2\sigma^4) \tag{2.4.25}$$

这样，利用(2.4.25)式及 $2\sigma^4$ 的任意一致估计量 $2\hat{\sigma}^4$(例如，$2(\hat{\sigma}_a^2)^2$)即可检验原假设 H_0 构造在 RW1 下极限分布为标准正态的标准化统计量$\widehat{\mathrm{VD}}(2)/\sqrt{2\hat{\sigma}^4}$，若该统计量的值在区间(−1.96,1.96)之外，则可在 5%显著水平下拒绝原假设。

利用一阶泰勒展开近似或 Delta 方法(见附录 A.4 节)可直接导出两期收益的方差比统计量$\widehat{\mathrm{VR}}(2) = \hat{\sigma}_b^2/\hat{\sigma}_a^2$ 的渐近分布：②

$$\widehat{\mathrm{VR}}(2) \equiv \frac{\hat{\sigma}_b^2}{\hat{\sigma}_a^2}, \quad \sqrt{2n}(\widehat{\mathrm{VR}}(2) - 1) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 2) \tag{2.4.26}$$

计算具渐近标准正态分布的标准化统计量$\sqrt{2n}(\widehat{\mathrm{VR}}(2) - 1)/\sqrt{2}$的值即可检验原假设 H_0。若该值在区间(−1.96,1.96)之外，则可在 5%显著水平下拒绝 RW1。

虽然方差比检验要首选于方差差检验，因为比率是没有量纲的，但注意到若用 $2(\hat{\sigma}_a^2)^2$

---

① 豪斯曼(Hausman,1978)简要地揭示了参数 θ 的任意渐近有效估计，比如 $\hat{\theta}_e$，必须具有与差值 $\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_e$ 渐近不相关的性质，其中 $\hat{\theta}_a$ 是 θ 的另一估计。如果不是，则就存在 $\hat{\theta}_e$ 和 $\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_e$ 的一个线性组合，其比 $\hat{\theta}_e$ 更有效，这与 $\hat{\theta}_e$ 的有效性假设相违背。因此，直接有如下结论：

$$\mathrm{aVar}[\hat{\theta}_a] = \mathrm{aVar}[\hat{\theta}_e + \hat{\theta}_a - \hat{\theta}_e] = \mathrm{aVar}[\hat{\theta}_e] + \mathrm{aVar}[\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_e]$$

$$\Rightarrow \mathrm{aVar}[\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_e] = \mathrm{aVar}[\hat{\theta}_a] - \mathrm{aVar}[\hat{\theta}_e]$$

这里 aVar[·]代表渐近方差操作数。

② 特别地，将 Delta 方法应用于 $f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \equiv \hat{\theta}_1/\hat{\theta}_2$，其中 $\hat{\theta}_1 \equiv \hat{\sigma}_b^2 - \hat{\sigma}_a^2$，$\hat{\theta}_2$ 相当于 $\hat{\sigma}_a^2$，并注意到 $\hat{\sigma}_b^2 - \hat{\sigma}_a^2$ 与 $\hat{\sigma}_a^2$ 是渐近不相关的，因为 $\hat{\sigma}_a^2$ 是有效估计。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

去估计 $2\sigma^4$，那么用差方法对 VD=0 的标准显著性检验将与用比方法对 VR−1=0 的检验产生相同的推断，因为：

$$\frac{\widehat{\mathrm{VD}}(2)}{\sqrt{2\hat{\sigma}_a^4}}=\frac{\hat{\sigma}_b^2-\hat{\sigma}_a^2}{\sqrt{2}\hat{\sigma}_a^2}=\frac{\widehat{\mathrm{VR}}(2)-1}{\sqrt{2}}\sim\mathcal{N}(0,1) \tag{2.4.27}$$

因此，在这一简单的情形下两种检验统计量是等价的。然而，有另外的理由使方差比统计量更具吸引力，这在柯克伦(Cochrane，1988)，浮士德(Faust，1992)以及罗和麦金雷(Lo and MacKinlay，1988，1989)的文献中有讨论。

方差差和方差比统计量可很容易地推广到多期收益的场合中。设样本含 $nq+1$ 个观察值 $\{p_0,p_1,\cdots,p_{nq}\}$，其中 q 是任意大于 1 的整数，定义如下估计量：

$$\hat{\mu}\equiv\frac{1}{nq}\sum_{k=1}^{nq}(p_k-p_{k-1})=\frac{1}{nq}(p_{nq}-p_0) \tag{2.4.28}$$

$$\hat{\sigma}_a^2\equiv\frac{1}{nq}\sum_{k=1}^{nq}(p_k-p_{k-1}-\hat{\mu})^2 \tag{2.4.29}$$

$$\hat{\sigma}_b^2(q)\equiv\frac{1}{nq}\sum_{k=1}^{n}(p_{qk}-p_{qk-q}-q\hat{\mu})^2 \tag{2.4.30}$$

$$\widehat{\mathrm{VD}}(q)\equiv\hat{\sigma}_b^2(q)-\hat{\sigma}_a^2,\ \widehat{\mathrm{VR}}(q)\equiv\frac{\hat{\sigma}_b^2(q)}{\hat{\sigma}_a^2} \tag{2.4.31}$$

利用相同的原理，在 RW1 原假设下 $\widehat{\mathrm{VD}}(q)$ 和 $\widehat{\mathrm{VR}}(q)$ 的渐近分布为：

$$\sqrt{nq}\,\widehat{\mathrm{VD}}(q)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,2(q-1)\sigma^4) \tag{2.4.32}$$

$$\sqrt{nq}\,(\widehat{\mathrm{VR}}(q)-1)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,2(q-1)) \tag{2.4.33}$$

上述统计量的两个重要的改进可极大地改善其有限样本的性质。第一是在方差的估计中用 q 期收益的交叠(overlapping)，定义 σ^2 的一个可选估计量如下：

$$\hat{\sigma}_c^2(q)=\frac{1}{nq^2}\sum_{k=q}^{nq}(p_k-p_{k-q}-q\hat{\mu})^2 \tag{2.4.34}$$

这一估计量含 $nq-q+1$ 项，而估计量 $\hat{\sigma}_b^2(q)$ 仅含 n 项。利用交叠，q 期的收益产生了更为有效的估计，因而也是一个更有功效的检验。

第二个改进是在 $\hat{\sigma}_a^2$ 和 $\hat{\sigma}_c^2$ 的估计量中包含了偏差修正。记无偏估计量为 $\bar{\sigma}_a^2$ 及 $\bar{\sigma}_c^2(q)$，其中：

$$\bar{\sigma}_a^2=\frac{1}{nq-1}\sum_{k=1}^{nq}(p_k-p_{k-1}-\hat{\mu})^2 \tag{2.4.35}$$

$$\bar{\sigma}_c^2=\frac{1}{m}\sum_{k=q}^{nq}(p_k-p_{k-q}-q\hat{\mu})^2$$

$$m\equiv q(nq-q+1)\left(1-\frac{q}{nq}\right) \tag{2.4.36}$$

并且定义统计量：

$$\overline{\mathrm{VD}}(q)\equiv\bar{\sigma}_c^2(q)-\bar{\sigma}_a^2,\quad \overline{\mathrm{VR}}(q)\equiv\frac{\bar{\sigma}_c^2(q)}{\bar{\sigma}_a^2} \tag{2.4.37}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

上式形成了一个方差差的无偏估计量，但方差比估计量仍然是有偏误的(源于杰森(Jensen)不等式)。然而，罗和麦金雷(Lo and MacKinly，1989)进行的模拟试验结果表明 $\overline{\text{VR}}(q)$ 在有限样本下的特性比 $\widehat{\text{VR}}(q)$ 更接近其相应的渐近极限。

在原假设 H 下，方差差和方差比的渐近分布给定如下：

$$\overline{\text{VD}}(q) \overset{a}{\sim} \text{N}\left(0, \frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}\sigma^4\right) \tag{2.4.38}$$

$$\sqrt{nq}(\overline{\text{VR}}(q)-1) \overset{a}{\sim} \text{N}\left(0, \frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}\right) \tag{2.4.39}$$

这些统计量可按常规进行标准化以便形成标准正态检验统计量。如前所述，若在标准化的方差差统计量中以 $\bar{\sigma}_a^4$ 估计 σ^4，则其检验结果与标准化的方差比统计量相同，即：

$$\begin{aligned}\psi(q) &\equiv \sqrt{nq}(\overline{\text{VR}}(q)-1)\left(\frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{\sqrt{nq}\overline{\text{VD}}(q)}{\sqrt{\bar{\sigma}_a^4}}\left(\frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}\right)^{-1/2} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,1)\end{aligned} \tag{2.4.40}$$

RW3 下 $\overline{\text{VR}}(q)$ 的样本分布

由于在金融学家中存有日渐成长的公认，认为市场的涨落变化是随时间而变化的(见第 12 章第 12.2 节)，因而由于异方差而引起的对随机游动假设的拒绝将是无足轻重的。因此，我们寻找 RW3 的检验。只要各期收益是不相关的，那么即使存在异方差，当观察值数目无限增大时方差比必须仍然接近 1，因为不相关的增量的和的方差必须仍然等于各增量方差的和。但是，方差比的渐近方差显然取决于当前异方差的类型与程度。

一种方法是像第 12 章第 12.2 节中所述精确地模拟异方差，并在此原假设下计算 $\overline{\text{VR}}(q)$ 的渐近方差。但是，为考虑异方差的更为一般的形式，我们遵循罗和麦金雷(Lo and MacKinly，1988)所用的方法，其依赖于异方差调和(Heteroskedasticity-consistent)的怀特(White，1980)及怀特和多莫维茨(White and Domowitz，1984)方法。与前述 IID 正态增量过程相比，这一方法可应用于更广泛的一类对数价格随机过程 $\{p_t\}$，尤其是关注像表 1.1 所示的美国股票的收益。[①] 特别地，令 $r_t = \mu + \epsilon_t$，并定义如下复合原假设 H_0^*：

(**H1**) 对一切 t，$\text{E}[\epsilon_t]=0$，且 $\text{E}[\epsilon_t\epsilon_{t-\tau}]=0$ 对任意 $\tau \neq 0$

(**H2**) $\{\epsilon_t\}$ 含 $r/(2r-1)$ 个 ϕ 的混合系数 $\phi(m)$ 或 $r/(r-1)$ 个 α 的混合系数 $\alpha(m)$，其中 $r>1$，如此对一切的 t 及任意的 $\tau \geqslant 0$，存在 $\delta>0$ 使得 $\text{E}[|\epsilon_t\epsilon_{t-\tau}|^{2(r+\delta)}]<\Delta<\infty$

(**H3**) $\lim_{nq\to\infty} \frac{1}{nq}\sum_{t=1}^{nq}\text{E}[\epsilon_t^2] = \sigma^2 < \infty$

---

① 当然，二阶矩仍然假定为有限的；否则方差比的定义就不再是适当的。其排除了有限方差的分布，比如曼德尔布罗特(Mandelbrot，1963)和法马(Fama，1965)提出的稳定佩瑞多—列维(Pareto—Levy)分布族(具特征指数小于 2)。然而，很多其他形式的瘦峰度分布是允许的，比如恩格尔(Engle，1982)构造的自回归条件异方差(ARCH)过程(见第 12 章第 12.2 节)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(H4) 对一切 t，$E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}]=0$，对任意非零的 j 以及 k，其中 $j\neq k$

条件(H1)就是我们要检验的随机游动的不相关增量性质。条件(H2)和(H3)是当仍然要允许获得大数定律和中心极限定理的某些形式时对增量所允许的相关性和方差变异性所作的限定[见怀特(White,1984)对 ϕ 和 α 混合随机序列的定义]。条件(H4)意味着 ε_t 的样本自相关函数是渐近不相关的；可以大大地削弱此条件，但计算的简单性也就丧失了(见注释①)。

这组复合原假设假定 p_t 具有不相关的增量，但又允许较一般形式的异方差，包括确定性的方差变化(例如，对季节因子)以及恩格尔(Engle,1982)的 ARCH 过程(其条件方差依赖于序列过去的信息)。

由于在 H_0^* 下 $\overline{VR}(q)$ 仍然接近 1，我们只须计算其渐近方差[称为 $\theta(q)$]来作通常的统计推断。罗和麦金雷(Lo and MacKinly,1988)以两步法做了这项工作。第一，回顾下列在相当一般的条件下均具有渐近性的等式：

$$\overline{VR}(q) \overset{a}{=} 1+2\sum_{k=1}^{q-1}\left(1-\frac{k}{q}\right)\hat{\rho}(k) \tag{2.4.41}$$

第二，注意到在 H_0^*（条件(H4)）下自相关函数的估计量 $\hat{\rho}(k)$ 是渐近不相关的[①]。若在 H_0^* 下可获得各个 $\hat{\rho}(k)$ 的渐近方差 δ_k，则 $\overline{VR}(q)$ 的方差 $\theta(q)$ 可表示为 δ_k 的加权和，其权数即是关系式(2.4.41)中权数的平方。分别记 $\hat{\rho}(k)$ 和 $\overline{VR}(q)$ 的方差为 δ_k 和 $\theta(q)$，则在原假设 H_0^* 下，罗和麦金雷(Lo and MacKinly,1988)指出：

1. 当 n 无限增大时，对一切的 q，统计量 $\overline{VD}(q)$ 以及 $\overline{VD}(q)-1$ 几乎肯定收敛至零。
2. 下式是 δ_k 的异方差调和估计量：

$$\hat{\delta}_k=\frac{nq\sum_{j=k+1}^{nq}(p_j-p_{j-1}-\hat{\mu})^2(p_{j-k}-p_{j-k-1}-\hat{\mu})^2}{\left[\sum_{j=1}^{nq}(p_j-p_{j-1}-\hat{\mu})^2\right]^2} \tag{2.4.42}$$

3. 下式是 $\theta(q)$ 的异方差调和估计量：

$$\hat{\theta}(q)\equiv 4\sum_{k=1}^{q-1}\left(1-\frac{k}{q}\right)^2\hat{\delta}_k \tag{2.4.43}$$

尽管存在有一般的异方差，标准化的检验统计量 $\psi^*(q)$ 如下式：

$$\psi^*(q)=\frac{\sqrt{nq}(\overline{VR}(q)-1)}{\sqrt{\hat{\theta}}}\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,1) \tag{2.4.44}$$

可用来以通常的方法检验 H_0^*。

---

① 虽然对 ε_t 的四阶混合矩的这一限制可能显得有些不太直观，但对任意的独立增量过程(忽略方差变异)是满足的，同样对线性高斯 ARCH 过程也是满足的。为通过(2.4.41)式估计 $\overline{VR}(q)$ 的极限方差 θ，需要掌握自相关函数估计量的渐近协方差的估计，这一假定也可完全放开。虽然得到的 θ 的估计量可能比(2.4.43)式还要复杂，但其在概念上是直截了当的，且按照纽维和韦斯特(Newey and West,1987)的研究路线也很容易构造。利用达弗(Dufour,1981)以及达弗和罗伊(Dufour and Roy,1985)的研究成果可获得一个更为一般的(且可能更精确的)方差比的样本分布。再者，这将牺牲许多渐近结果的简单性。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

2.5 长线收益

近期的研究关注于利用长线收益的性质检验随机游动假设，某些情形下在 65 年的样本中使用了 5～10 年的收益。在给定的时间跨度中很少有不交迭的长线收益，因此抽样误差一般比基于长线收益的统计量要大。但对随机游动的某些可选情形，长线收益比其相应的短线收益具有更多的信息量（见第 7 章第 7.2.1 节以及罗和麦金雷（Lo and MacKinly，1989）的文献）。

使用长线收益的动因之一是缪斯（Muth，1960）首次在经济学文献中提出的永久/瞬时分量备选假设。在这一模型中，对数价格有两部分分量组成：随机游动和平稳过程，即：

$$p_t = w_t + y_t \tag{2.5.1}$$

$$w_t = \mu + w_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \text{任意均值为零的平稳过程}$$

并且$\{w_t\}$和$\{y_t\}$相互独立。股票价格模型(2.5.1)的一般解释是 w_t 是反映有效市场价格的“基本”分量，而 y_t 是一个均值为零的平稳分量，反映短期或瞬时对有效市场价格 w_t 的背离，意味着市场“狂热”的存在或其他的市场非有效性。因 y_t 是平稳的，依定义是均值常返的，在长期它会回复到其为零的均值。虽然对模型(2.5.1)的这样一个解释有些困难，但重要的是没有附加的经济结构，市场的有效性便是同意的反复。然而，此模型的这种结构为我们研究方差比的性态提供了很好的实验机会。

在模型(2.5.1)下对较小的 q(取决于 y_t 的相关结构)VR(q)会表现出很多形式，当 q 变大时，会减弱 VR(q)取值的任意性。特别地，注意到：

$$r_t \equiv p_t - p_{t-1} = \mu + \varepsilon_t + y_t - y_{t-1} \tag{2.5.2}$$

$$r_t(q) \equiv \sum_{j=0}^{q-1} r_{t-j} = q\mu + \sum_{k=0}^{q-1} \varepsilon_{t-k} + y_t - y_{t-q} \tag{2.5.3}$$

$$\text{Var}[r_t(q)] = q\sigma^2 + 2\gamma_y(0) - 2\gamma_y(q) \tag{2.5.4}$$

其中，$\gamma_y(q) \equiv \text{Cov}[y_t, y_{t+q}]$是 y_t 的自协方差函数。因此在此情形下方差比的总体真值为：

$$\text{VR}(q) = \frac{\text{Var}[r_t(q)]}{q\text{Var}[r_t]} = \frac{q\sigma^2 + 2\gamma_y(0) - 2\gamma_y(q)}{q(\sigma^2 + 2\gamma_y(0) - 2\gamma_y(1))} \tag{2.5.5}$$

$$\to \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 2\gamma_y(0) - 2\gamma_y(1)} \quad \text{当 } q \to \infty \tag{2.5.6}$$

$$= 1 - \frac{2\gamma_y(0) - 2\gamma_y(1)}{\sigma^2 + 2\gamma_y(0) - 2\gamma_y(1)}$$

$$= 1 - \frac{\text{Var}[\Delta y]}{\text{Var}[\Delta y] + \text{Var}[\Delta w]}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\mathrm{VR}(q) \to 1 - \frac{\mathrm{Var}[\Delta y]}{\mathrm{Var}[\Delta p]} \tag{2.5.7}$$

其中(2.5.6)式需要 $\gamma_y(q) \to 0$ 当 $q \to \infty$ 的附加假定，这是一个渐近独立性条件，是对大部分经济时间序列的一个似乎合理的假定①。它表明对于足够的长线时段 q，永久/瞬时分量模型会产生小于 1 的方差比。而且，长线方差比与 1 之间的差异量是 Δy_t 的方差与 Δp_t 的方差之比，是一种类似"信号/(信号＋噪声)"的比率，其中"信号"是瞬时分量，而"噪声"则是永久市场分量。事实上，我们可能会考虑清晰地从 $\mathrm{VR}(q)$ 中提取"信号/噪声"比：

$$\frac{1}{\mathrm{VR}(q)} - 1 \to \frac{\mathrm{Var}[\Delta Y]}{\mathrm{Var}[\Delta W]}$$

2.5.1 长线推断的问题

然而，长线收益推断还存在一些困难。这些困难产生于下述事实，即当时段 q 与全部时间跨度 $T=nq$ 相比较大时，通常用于推断的渐近近似就失败了。

例如，考虑检验统计量 $\overline{\mathrm{VR}}(q)-1$，它是具有零均值的渐近正态，在 RW1 原假设下的方差为：

$$V = \frac{2(2q-1)(q-1)}{3nq^2} = \frac{4}{3n}\left[\frac{q^2 - \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}}{q^2}\right] \tag{2.5.8}$$

注意到对一切 $q>2$，(2.5.8)式中括弧内的项介于 $\frac{3}{8}$ 和 1 之间且依 q 单调增。因此，对固定的 n，这意味着 V 取值的上、下界分别是 $\frac{4}{3n}$ 及 $\frac{1}{2n}$。由于方差不能为负，因而 $\overline{\mathrm{VR}}(q)-1$ 的下界为 -1。这样检验统计量 $(\overline{\mathrm{VR}}(q)-1)/\sqrt{V}$ 的代数最小值为：

$$\mathrm{Min}\,\frac{\overline{\mathrm{VR}}(q)-1}{\sqrt{V}} = \frac{-1}{\mathrm{Min}\sqrt{V}} = -\sqrt{2n} = -\sqrt{2T/q} \tag{2.5.9}$$

假定设 q 为样本容量 T 的 2/3，则 $T/q=\frac{3}{2}$。这意味着经标准化的检验统计量 $\overline{\mathrm{VR}}(q)/\sqrt{V}$ 永远不会小于 -1.73；从而不管样本数据如何，在 95% 显著水平下检验结果永远不会拒绝原假设！当然，若抽到分布右尾上的样本，则检验统计量还是可能拒绝原假设的。但这时相对于备选假设就意味着对较大的 q 方差比小于 1，就像永久/瞬时分量模型(2.5.1)，当 q/T 不近于零时，方差比检验的功效极小。

通过另一个渐近分析可更为清晰地描述当 q/T 较大时所产生的问题。一种情况是 q

① 这是由遍历性所暗示的，即使像第 2.6 节中讨论的长距相关(long-range-dependent)时间序列也满足这一条件。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

增大到 T，以至 $q(T)/T$ 接近严格介于 0 和 1 之间的某个极限 δ。对这种情况，在 RW1 下理查德森和斯托克(Richardson and Stock，1989)的研究表明未标准化的方差比 $\widehat{\mathrm{VR}}(q)$ 依分布收敛：

$$\widehat{\mathrm{VR}}(q) \xrightarrow{d} \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{1} X_{\delta}^{2}(\tau)d\tau \tag{2.5.10}$$

$$X_{\delta}(\tau) \equiv B(\tau) - B(\tau-\delta) - \delta B(1) \tag{2.5.11}$$

其中，$B(\cdot)$是定义在单位区间上的标准布朗运动(见第 9 章第 9.1 节)。与标准的“固定 q”渐近性不同，在这种情况下 $\widehat{\mathrm{VR}}(q)$ 不依概率收敛至 1，而是依分布收敛至一随机变量，该随机变量是布朗运动的函数。极限分布(2.5.10)式的期望为：

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{1} X_{\delta}^{2}(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{1}\mathrm{E}[X_{\delta}^{2}(\tau)]d\tau = (1-\delta)^{2} \tag{2.5.12}$$

在早先 $q/T=\frac{2}{3}$ 的例子中，可选的渐近近似(2.5.10)式表明 $\mathrm{E}[\widehat{\mathrm{VR}}(q)]$ 收敛至 $\frac{1}{9}$，尽管维持了 RW1 假设，但其显著小于 1。

按我们加在长线收益上的使人胆怯的需求，这些偏差是意料之中的；没有更为明确的经济结构，而要对整个数据集相当大部分的现象作过多的推断是极其困难的。这一问题与谱分析中的一个问题紧密相连，即围频率零谱密度函数估计。相应于极长的周期，频率接近零，且要超出样本跨度外推其周期明显是很困难的[①]。在第 2.8 节我们将从经验研究结果中清晰地看到这种困难。然而，在有些情形下由长期收益法可获得重要推断信息，尤其是当引入了其他经济变量，比如红利价格比。有关的进一步讨论见第 7 章第 7.2.1 节。

2.6 长期相关性检验

有一种违背随机游动假设且在我们至今所研发的统计框架之外的现象，这便是长期相关性。长期相关的时间序列可表现出异乎寻常的高度持续性，从某种意义上说是精度降低所致，由此，久远的过去观察值与久远的未来观察值有着非凡的相关性，即便是两个观察值之间的时间跨度在增大。自然界对于长期相关性的偏好在诸如水文学、气象学及地球物理学等自然科学中已经得到了很好的证明，且有些研究已经证明经济时间序列也是长期相关的。在频域分析中，这样的时间序列表达了在最低频率上的功率，这被认为是十分普遍的现象，格兰杰(Granger，1966)称其为“经济变量的典型频谱形状”，曼德尔布罗特和沃利斯(Mandelbrot and Wallis，1968)则用了更富色彩的术语“约瑟效应(Joseph

---

① 进一步的详细内容见第 2.6 节的讨论与分析。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Effect)”，该术语出自《圣经——创世纪》(第 41 章)有关段落的参考中，其中约瑟(Joseph)预言埃及将要经历七年富足，紧跟着便是七年饥荒。[①]

2.6.1 长期相关性的例子

长期相关性的典型例子是由格兰杰(Granger，1980)、格兰杰和乔尤克斯(Granger and Joyeux，1980)以及霍斯金(Hosking，1981)给出的差分时间序列模型。其中 p_t 满足下列差分方程：

$$(1-L)^d p_t=\varepsilon_t \quad \varepsilon_t\sim \text{IID}(0,\sigma_\varepsilon^2) \tag{2.6.1}$$

这里 L 为滞后算子，例如 $Lp_t=p_{t-1}$。格兰杰和乔尤克斯(Granger and Joyeux，1980)以及霍斯金(Hosking，1981)的研究表明，当量 $(1-L)^d$ 在数学上自然地展开为 d 的非整次幂时，则其结果就是有明确定义的时间序列，称为 d 阶分部差分(或等价地称为，$-d$ 阶分部积分)。简单地说就是表达式 $(1-L)^d$ 对非整次幂依二项公式展开：

$$(1-L)^d=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{d}{k}L^k$$

$$\binom{d}{k}\equiv\frac{d(d-1)(d-2)\cdots(d-k+1)}{k!} \tag{2.6.2}$$

将上述展开式用于 p_t：

$$(1-L)^d p_t=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{d}{k}L^k p_t=\sum_{k=0}^{\infty}A_k p_{t-k}=\varepsilon_t \tag{2.6.3}$$

其中自回归系数 A_k 一般用伽马函数重新表示为：

$$A_k=(-1)^k\binom{d}{k}=\frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)} \tag{2.6.4}$$

p_t 可表示为有限阶的 MA 过程，因：

$$p_t=(1-L)^{-d}\varepsilon_t=B(L)\varepsilon_t, \quad B_k=\frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)} \tag{2.6.5}$$

如此定义的分部差分会引出十分有用的随机过程，这一点并不明显。但是，格兰杰和乔尤克斯(Granger and Joyeux，1980)以及霍斯金(Hosking，1981)的研究表明，分部差分时间序列的特征确实是十分有趣的。例如，研究表明，对 $d\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$p_t$ 是平稳可逆的(见霍斯金(Hosking，1981))，且表现出一种特有的相关性，即相关性的正负取决于 d 的正负，例如 p_t 的自相关系数的符号与 d 是相同的。由自相关系数的缓慢衰减，当 d 为

---

① 这个圣经的类比并非是无关紧要的，因为长期相关性已在各种水文学研究中得到证实，其中部分是赫斯特(Hurst，1951)的有关水库容量长期短缺的开创性研究。当然，赫斯特的许多研究是受启发于他对尼罗河的经验观测，也正是这条河在约瑟(Joseph)的预言中起着如此重要的作用。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

正时，其和发散至无穷，当 d 为负时又降至零。①

为理解长期相关性，表 2.3 将分部差分后 p_t 的自相关函数与平稳的 AR(1)作了一个比较。

表 2.3　分部差分过程的自相关函数

滞后 k	$\rho_p(k)$ [$d=1/3$]	$\rho_p(k)$ [$d=-1/3$]	$\rho_p(k)$ [AR(1), $\phi=0.5$]
1	0.500	−0.250	0.500
2	0.400	−0.071	0.250
3	0.350	−0.036	0.125
4	0.318	−0.022	0.063
5	0.295	−0.015	0.031
10	0.235	−0.005	0.001
25	0.173	−0.001	$2.98*10^{-8}$
50	0.137	-3.24×10^{-4}	8.88×10^{-16}
100	0.109	-1.02×10^{-4}	7.89×10^{-31}

注：相应于 $d=1/3,-1/3$，分部差分时间序列 $(1-L)^d p_t=\epsilon_t$ 与 AR(1) $p_t=\phi p_{t-1}+\epsilon_t$，$\phi=0.5$ 的自相关函数的比较，三种情形下 ϵ_t 的方差取使 p_t 具有单位方差的量。

虽然 AR(1)及分部差分序列($d=1/3$)的一阶自相关系数均为 0.500，但在滞后期为 25 时，AR(1)的自相关系数为 0.000，而分部差分序列的相关为 0.173，在滞后为 100 时仅跌至 0.109。事实上，多数人认同的长期相关过程的定义特征就是这种自相关函数的慢衰减。

更为一般地，长期相关过程$\{p_t\}$可定义为具有如下自协方差函数 $\gamma_p(k)$的过程：

$$\gamma_p(k)\sim\begin{cases}k^v f_1(k) & \text{对 } v\in(-1,0)\text{或}\\ -k^v f_1(k) & \text{对 } v\in(-2,-1)\end{cases}\quad \text{当 } k\to\infty \tag{2.6.6}$$

其中 $f_1(k)$是一任意无限慢变函数。② 换句话说，长期相关性也可以定义为具有如下谱密度函数 $s(\lambda)$的过程：

$$s(\lambda)\sim\lambda^{(-\alpha)}f_2(k)\quad \text{当}\quad \lambda\to 0,\quad \alpha\in(-1,1) \tag{2.6.7}$$

其中 $f_2(k)$是一个慢变函数。例如，分部差分过程(2.6.1)的自协方差函数和围频率

① 曼德尔布罗特(Mandelbrot)及其他一些学者在称 d>0 的情形为长期相关性的同时，称 d<0 的情形为反持续性，然而，因两种情形均含有自相关，而这种自相关与更为常规的时序相比其衰减更为缓慢，我们将两者都称为长期相关性。

② 函数 $f(x)$称为无限慢变的，若 $\lim_{x\to\infty} f(tx)/f(x)=1$，对一切 $t\in[a,\infty)$。函数 $\log x$ 即为无限慢变函数的例子。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

零谱密度为：

$$\gamma_p(k)=\frac{\sigma_\varepsilon^2\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)}$$

$$\sim c_0 k^{2d-1} \quad 当 \quad k\to\infty \tag{2.6.8}$$

$$s(\lambda)\cong(1-e^{-i\lambda})^{-d}(1-e^{i\lambda})^{-d}\sigma_\varepsilon^2$$

$$\sim\sigma_\varepsilon^2 k^{-2d} \quad 当 \quad \lambda\to 0 \tag{2.6.9}$$

其中 $d\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。依 d 为正或负，频率零的谱密度(2.6.1)式将为零或无穷。

2.6.2 赫斯特—曼德尔布罗特(Hurst-Mandelbrot)标度重定极差统计量

曼德尔布罗特(Mandelbrot，1971)首次研究了资产市场长期相关的重要性，他提出使用极差除以标准差，即 R/S 统计量来检测经济时间序列的长期相关性，该统计量也称为标度重定极差(rescaled range)。R/S 统计量是时间序列与其均值的离差的部分和的极差除以其标准差。特别，考虑连续组合资产收益的样本 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$，且记 $\bar{r}_n$ 为样本均值 $\frac{1}{n}\sum_j r_j$ 时，称 $\tilde{Q}_n$，为经典的标度重定极差统计量，则：

$$\tilde{Q}_n\equiv\frac{1}{s_n}\left[\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}\sum_{j=1}^{k}(r_j-\bar{r}_n)-\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Min}}\sum_{j=1}^{k}(r_j-\bar{r}_n)\right] \tag{2.6.10}$$

其中 s_n 是通常的(极大似然)标准差估计量，

$$s_n\equiv\left[\frac{1}{n}\sum_j(r_j-\bar{r}_n)^2\right]^{1/2} \tag{2.6.11}$$

(2.6.10)式中方括号里的第一项是 r_j 与其均值的前 k 个离差的部分和的最大值(对于 k)。由于所有的 n 个 r_j 与其均值的离差总和为零，因此该最大值始终是非负的。(2.6.10)式的第二项是同一序列部分和的最小值，因此其始终为非正。这两个量的差，显然可称为极差，始终是非负，因此有 $\tilde{Q}_n\geqslant 0$。①

在几篇基础的研究论文中，曼德尔布罗特(Mandelbrot)、塔奎(Taqqu)及沃利斯(Wallis)证明了 R/S 分析法相比于决定长期相关性的更常规的方法，如自相关分析、方差

---

① $\tilde{Q}_n$ 的性质是很好理解的，只要注意到它是起源于水库设计的水文学研究。为适应河水流量的季节性，水库容量的设计必须允许堤坝上游的供水量波动，同时堤坝下游又能维持相对恒定的流量。因此堤坝的建设成本是极大的，很明显，其关键就是对水库容量的估计，要使其足以满足长期供水短缺时的需求。极差便是该容量的一个估计。设 X_j 为堤坝上游的河水流量(每单位时间)，$\bar{X}_n$ 是堤坝下游所需的河水流量，给定时期 1～n 的水流分布形式，则(2.6.10)式中括号里的量便是保持平滑流量的水库容量值。例如，假设 1～4 年中年河水流量分别为 100，50，100 以及 50。如果堤坝下游每年所需的恒定流量为 75，则水库的最小容量必须为 25，因其须在第 1 年及第 3 年存储 25 个单位的水以便供给相对干涸的第 2 年及第 4 年。若再假设 1～4 年的自然水流分布为 100，100，50，50，在此情形下要保证堤坝下游 75 的流量，则最小的水库容量须增至 50，以便在第 1 年和第 2 年有额外的储水量来供应"诅咒干旱"的第 3 年和第 4 年。由此可见，以极差作度量，序列增长的持续性显然会增加所需的存贮容量。确实，在埃及正是这种明显的"诅咒干旱"的持续性激发了赫斯特(Hurst)对尼罗河的终身迷恋，并最终引起他对标度重定极差方法的研究兴趣。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

比以及谱分解等的优越性。例如，曼德尔布罗特(Mandelbrot)和沃利斯(Wallis，1969)利用蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟方法的研究表明R/S统计量可检测到具有高偏度和/或峰度的强非高斯时间序列中的长期相关性。事实上曼德尔布罗特(Mandelbrot，1972，1975)即发表了对于具有无限方差的随机过程R/S统计量的几乎确定的收敛性，这是其相对于自相关及方差比这些对无限方差过程无需明确定义的方法的独特优势。有关R/S统计量稳健性方面的进一步研究结果见曼德尔布罗特和塔奎(Mandelbrot and Taqqu，1979)的文献。与检测周期性循环的谱分析不同，曼德尔布罗特(Mandelbrot，1972)还证明了R/S分析可检测非周期性的循环，即周期等于或大于样本周期的循环。

虽然这些论断在某种程度上可能都有质疑，但“传统”R/S统计量确实能够检测长期相关性，这已是被认可的事实。然而，标度重定极差方法最大的缺陷可能就是其对短期相关的敏感性，这意味着任何样本数据与在原假设下R/S统计量的预测特性间的不相容性不必来自于长期相关性，而可能仅来自某个短期记忆征兆。

特别需指出，罗(Lo，1991)的研究表明，在RW1下$(1/\sqrt{n})\tilde{Q}_n$的渐近分布可由随机变量V给出，它是布朗桥(Brownian bridge)的极差；但在具有自回归系数ϕ的平稳AR(1)规程下，经标准化的R/S统计量收敛至ξV，其中$\xi\equiv\sqrt{(1+\phi)/(1-\phi)}$。对于普通股票交易量的周收益，$\phi$可大到50%，意味着$\tilde{Q}_n/\sqrt{n}$的均值可能上偏73%！由于$V$的均值为$\sqrt{\pi/2}\approx1.25$，则对这样的AR(1)过程，传统标度重定极差的均值将为2.16。

罗(Lo，1991)提出了R/S统计量的一个修正，以说明短期相关性的影响，并在几种原假设和备选假设下导出了渐近样本分布。而且，通过蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟和取自股票市场近期历史数据的经验例子证明了经修正的R/S统计量明显地变得更精确了，并经常产生与相应的传统检验方法不同的推断结果。特别是那些在早先的文献中被认为是美国股票收益的长期相关性的例证很可能就被快速衰减的短期相关性结果所取代。

2.7 单位根检验

经常与随机游动假设的检验相混淆的近期更为专业的一类检验就是单位根检验，其原假设是：

$$X_t=\mu+X_{t-1}+\varepsilon_t \tag{2.7.1}$$

其常用备选假设为：

$$X_t-\mu t=\phi(X_{t-1}-\mu(t-1))+\varepsilon_t,\quad \phi\in(-1,1) \tag{2.7.2}$$

其中ε_t是任意零均值的平稳过程，有：

$$0<\sigma_0^2=\lim_{T\to\infty}\mathrm{E}\left[\frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\right)^2\right]<\infty \tag{2.7.3}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

由此，条件(2.7.3)要求部分和$\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t$的方差以与$T$近乎相同的比例增长，这样每个加进部分和的新$\varepsilon_t$对部分和的方差有着非凡的贡献。[①] 这一条件确保了通常的极限理论可应用于诸ε_t，且事实上我们有机会研究的所有平稳过程都满足这一条件(除了第2.6节中的内容)。

单位根检验是设计用于揭示过程X_t是差分平稳的(原假设)或是趋势平稳的(备选假设)；这一特征取决于ϕ是否为1，术语单位根假设也就由此得名。这一检验本身是通过在原假设(2.7.1)式下的(非标准化的)样本分布将普通最小二乘估计$\hat{\phi}$与1作比较来构造的，它是迪基和弗勒(Dickey and Fuller，1979)首次导出的。[②] 在原假设下，任何对X_t和的冲击都被认为是永久的，因为$\mathrm{E}[X_{t+k}|X_t]=\mu k+X_t$，对一切$k>0$，这样对$X_t$的冲击会出现在所有未来$X_{t+k}$的条件期望中。这种情形的$X_t$常称为随机趋势，因其条件期望明显地取决于随机变量$X_t$。相反，在(2.7.2)式的备选假设下，对$X_t$的冲击被认为是暂时的，因为$\mathrm{E}[X_{t+k}|X_t]=\mu(t+k)+\phi^k(X_t-\mu t)$，$X_t$对未来$X_{t+k}$的条件期望的影响随$k$的增大而减小。

由于在(2.7.1)式的单位根原假设下及在(2.7.2)式的备选假设下ε_t可以是任意零均值平稳过程，因此单位根检验的焦点并不像在随机游动假设下那样是X_t的可预报性。即使在原假设(2.7.1)式下，X_t的增量也是可以预报的。尽管单位根原假设事实上包含了随机游动假设，但只有对X_t冲击的永久/暂时性才关系到这一检验。实际上由于在单位根原假设中也有非随机游动的选项，因此很明显，单位根检验并非是设计用来检测可预报性的，但事实上仅是其结构对此不敏感。

2.8 近期实证的结果

资产收益的可预报性是一个非常广泛而且活跃的研究论题，仅用几页文字要对这一问题的大量文献提供全面的概括是不可能的。因此，这一节我们专门关注近期的经验研究文献。[③]

---

① 若部分和的方差增长慢于T，这样(2.7.3)式中的极限为0，ε_t序列的不确定性在时间上“相互抵消”了，这可能就不是一个很有用的随机价格动态模型。这种过程的例子便是具有单位根的MA(1)过程，比如，$\varepsilon_t=\eta_t-\eta_{t-1}$，其中$\eta_t$是白噪声。

若部分和的方差增长快于T，这样(2.7.3)式中的极限为∞，这便是长期相关性的例子，其中ε_t的自相关函数衰减得很慢。这一过程的例子就是分部差分过程$(1-L)^d\varepsilon_t=\eta_t$，其中$\eta_t$是白噪声。进一步的讨论见第2.5节及罗(Lo，1991)的相关文献。

② 此后，计量经济学方法的发展对此检验框架有许多扩展，如多变量ARIMA系统中多元单位根检验，协整检验，单位根协整模型的一致估计，等等。[全面检索有关文献见坎贝尔和珀伦(Campbell and Perron，1991)]。

③ 然而，如果不引用近期文献所赖以建立的传统经验研究文献，这将会是我们的疏忽。这些传统文献包括：亚历山大(Alexander，1961，1964)、库特纳(Cootner，1964)、科尔斯(Cowles，1960)、科尔斯和乔恩斯(Cowles and Jones，1937)、法马(Fama，1965)、法马和布鲁姆(Fama and Blume，1966)、肯达尔(Kendall，1953)、格兰杰和默更斯特恩(Granger and Morgenstern，1963)、曼德尔布罗特(Mandelbrot，1963)、奥斯鲍恩(Osborne，1959，1962)、罗伯茨(Roberts，1959)以及沃金(Working，1960)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

利用1962～1994年的每日和每周的数据资料以及1926～1994年的每月数据资料，我们将原先几节中引入的检验应用于这些股票指数及个股收益数据，并希望由此使读者对与近期公平市场的可预报性有关联的经验研究有一个认识。尽管这些例子有其独特性，但这些经验研究结果阐明了许多在对资产收益可预报性的大量研究中提出的问题。

2.8.1 自相关

表2.4列出了从1962年7月3日至1994年12月31日间每日、每周以及每月CRSP股票收益指数的均值、标准差、自相关函数以及博克斯—彼尔斯 Q 统计量。[①] 期间，表2.4的A组资料显示出等加权的CRSP日指数具有一阶自相关 $\hat{\rho}(1)$ 为35.0%。由第2.4.1节可知在IID随机游动原假设RW1下，$\hat{\rho}(1)$ 的渐近样本分布是均值为0且标准差为 $1/\sqrt{T}$ 的正态分布(见(2.4.14)式)。这表明对 $\hat{\rho}(1)$ 容量为8 179的样本产生的标准误差为1.11%；因此在一切常规显著水平下35.0%的自相关系数值显然在统计上是显著的。而且，前5个自相关系数的鲍克斯—彼尔斯 Q 统计量的值是263.3，这在所有常规显著水平下也是显著的(可回顾一下该统计量的渐近分布为 χ_5^2，其99.5分位数是16.7)。

表2.4 每日、每周以及每月的股票指数收益自相关系数

样本时期	样本容量	均值	标准差	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\rho}_2$	$\hat{\rho}_3$	$\hat{\rho}_4$	$\hat{Q}_5$	$\hat{Q}_{10}$
A. 日收益									
				CRSP 加权指数					
1962.07.03～1994.12.30	8 179	0.041	0.824	17.6	−0.7	0.1	−0.8	263.3	269.5
1962.07.03～1978.10.27	4 090	0.028	0.738	27.8	1.2	4.6	3.3	329.4	343.5
1978.10.30～1994.12.30	4 089	0.054	0.901	10.8	−2.2	−2.9	−3.5	69.5	72.1
				CRSP 等权指数					
1962.07.03～1994.12.30	8 179	0.070	0.764	35.0	9.3	8.5	9.9	1 301.9	1 369.5
1962.07.03～1978.10.27	4 090	0.063	0.771	43.1	13.0	15.3	15.2	1 062.2	1 110.2
1978.10.30～1994.12.30	4 089	0.078	0.756	26.2	4.9	2.0	4.9	348.9	379.5

① 除非另行声明，我们认为收益是连续组合收益。证券组合收益首先按个股收益计算，然后换算为连续组合收益。每种证券的周收益是按周二的收盘价格至下周二的收盘价格来计算的收益。若下周二的价格不存在，则用周三的价格(若周三的价格也不存在，用周一的价格)。若周三和周一的价格均不存在，则该周的价格报告为缺损，这种情况很少发生。要计算按企业规模排序的股票交易量的周收益，则对所有收益都不缺损的每一周，将该周按年初市场价值计入交易量。若年初市场价值不存在，则使用年末市场价值。若这两种市场价值均不存在，则该股票将不计入交易量。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

样本时期	样本容量	均值	标准差	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\rho}_2$	$\hat{\rho}_3$	$\hat{\rho}_4$	$\hat{Q}_5$	$\hat{Q}_{10}$
B. 周收益									
				CRSP 加权指数					
1962.07.10～1994.12.27	1 695	0.196	2.093	1.5	−2.5	3.5	−0.7	8.8	36.7
1962.07.10～1978.10.03	848	0.144	1.994	5.6	−3.7	5.8	1.6	9.0	21.5
1978.10.10～1994.12.27	847	0.248	2.188	−2.0	−1.5	1.6	−3.3	5.3	25.2
				CRSP 等权指数					
1962.07.10～1994.12.27	1 695	0.339	2.321	20.3	6.1	9.1	4.8	94.3	109.3
1962.07.10～1978.10.03	848	0.324	2.460	21.8	7.5	11.9	6.1	60.4	68.5
1978.10.10～1994.12.27	847	0.354	2.174	18.4	4.3	5.5	2.2	33.7	51.3
C. 月收益									
				CRSP 加权指数					
1962.07.31～1994.12.30	390	0.861	4.336	4.3	−5.3	−1.3	−0.4	6.8	12.5
1962.07.31～1978.09.29	195	0.646	4.219	6.4	−3.8	7.3	6.2	3.9	9.7
1978.10.31～1994.12.30	195	1.076	4.450	1.3	−6.3	−8.3	−7.7	7.5	14.0
				CRSP 等权指数					
1962.07.31～1994.12.30	390	1.077	5.749	17.1	−3.4	−3.3	−1.6	12.8	21.3
1962.07.31～1978.09.29	195	1.049	6.148	18.4	−2.5	4.4	2.4	7.5	12.6
1978.10.31～1994.12.30	195	1.105	5.336	15.0	−1.6	−12.4	−7.4	8.9	14.2

注：上表为样本区间自 1962 年 7 月 3 日～1994 年 12 月 30 日以及其中的子区间的 CRSP 每日、每周以及每月加权及等权收益指数的自相关系数（百分数）以及鲍克斯—彼尔斯（Box-Pierce）Q 统计量值。

A 组中类似地计算出的加权指数表明，CRSP 日指数显示了具有统计显著性的一阶正序列相关，尽管等权指数具有较高的自相关且其衰减慢于加权指数。由子样本的自相关函数证明这种序列的显著相关性并非由某个特定有影响力的数据子集人为造成的；对任意子样本两个指数都具有很强的正自相关。

在表 2.4 中为说明自相关的经济显著性，注意到收益对一个常数及其一阶滞后的回归的 R^2 其斜率系数的平方，而这也就是一阶自相关系数。因此，利用上一日的日收益指数，35.0％的自相关意味着 CRSP 等权日收益指数变动的 12.3％是可以预测的。

表 2.4 中 B 组和 C 组的每周及每月收益的自相关系数分别表明其自相关的形式与日收益的自相关形式相似：对整个样本及其所有子样本，其一阶滞后的自相关是正的且具有统计显著性，其高阶自相关很小且有时为负。

2.8.2 方差比

表 2.4 中每日、每周以及每月的指数收益的自相关系数都为正，且通常显著异于零，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这对于第 2.4 节中所述的方差比的性态有着隐含的意义。这一节我们将针对指数收益、组合证券收益、个别证券收益来揭示这种意义。

CRSP 指数

表 2.4 中的自相关系数表明其方差比大于 1，且这一点在表 2.5 中得到了证实。表 2.5 中列出了按(2.4.37)式定义的方差比$\overline{VR}$，其中圆括号内的数字为按周 CRSP 等权及加权市场收益指数计算的由(2.4.44)式定义的异方差调和渐近标准正态分布检验统计量 $\psi^*(q)$的值。[①] 表 2.5 中 A 组为等权指数的计算结果，B 组为加权指数的计算结果。各组中第一行代表方差比以及整个含1 695周数据的样本的检验统计量，第二、第三行代表由 848 周及 847 周数据组成的两个子样本计算的相应结果。

表 2.5　　周股票指数收益的方差比

样本区间	观察值基数 nq	累计形成方差比的观察值基数 q			
		2	4	8	16
A. CRSP 等权指数					
1962.07.10～1994.12.27	1 695	1.20	1.42	1.65	1.74
		(4.53)*	(5.30)*	(5.84)*	(4.85)*
1962.07.10～1978.10.03	848	1.22	1.47	1.74	1.90
		(3.47)*	(4.44)*	(4.87)*	(4.24)*
1978.10.10～1994.12.27	847	1.19	1.35	1.48	1.54
		(2.96)*	(2.96)*	(3.00)*	(2.55)*
B. CRSP 加权指数					
1962.07.10～1994.12.27	1 695	1.02	1.02	1.04	1.02
		(0.51)	(0.30)	(0.41)	(0.14)
1962.07.10～1978.10.03	848	1.06	1.08	1.14	1.19
		(1.11)	(0.89)	(1.05)	(0.95)
1978.10.10～1994.12.27	847	0.98	0.97	0.93	0.88
		(−0.45)	(−0.40)	(−0.50)	(−0.64)

注：上表是样本区间为自 1962 年 7 月 10 日～1994 年 12 月 27 日的 CRSP 等权及加权指数的随机游动假设的方差比检验。方差比$\overline{VR}(q)$在主行中给出，主行下面的圆括号中给出异方差调和检验统计量 $\psi^*(q)$。在随机游动原假设下，方差比的值为 1，且检验统计量具有渐近标准正态分布。检验统计量打上星号表明在 5%显著水平下方差比在统计上显著异于 1。

① 由于在我们的样本中基于原假设 RW3 计算的 $\psi^*(q)$的值与在 RW1 下计算的 $\psi(q)$值相比始终不显著，为节省空间，我们仅给出了较保守的统计量。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

A 组数据表明等权指数对整个样本区间及其所有子区间均可在所有常用显著水平上拒绝随机游动原假设 RW3。而且，这种拒绝并非由于因 $\psi^*(q)$ 的异方差调和而引起的方差变动。在所有情形下方差比的估计都大于 1。例如，对于总值 q 为 2 的 A 组第一栏中相应于方差比的项目，按(2.4.18)式的观点，$q=2$ 的方差比近似等于 1 加上周收益的一阶自相关系数估计量；因此，第一行中的项目，即 1.20，意味着周收益的一阶自相关系数接近 20%，这与表 2.4 中给出的值是一致的。其相应的 $\psi^*(q)$ 统计量为 4.53，这样，随机游动假设被彻底拒绝。

子样本的结果表明虽然对前后两段样本区间都很容易拒绝原假设 RW3，但其方差比更为大一点，这样对前半段样本，这种拒绝就更强一点。这种模式在表 2.6 以及在对美国股票收益可预报性的其他研究中得以再现：即收益可预报性的程度似随时间的推移而下降。在某种程度上这种可预报性已成为"超额"利润的源泉，它的下降与在样本区间内金融市场竞争变得日益激烈的事实是一致的。

等权指数的方差比一般随 q 增长：方差比由 1.20(对 $q=2$)爬升为 1.74($q=16$)，且子样本的结果也显示出相似的模式。为解释这种模式，注意到与(2.4.18)式相似的一个量可推导为方差比的比率：

$$\frac{\mathrm{VR}(2q)}{\mathrm{VR}(q)}=1+\rho_q(1) \tag{2.8.1}$$

其中 $\rho_q(1)$ 是 q 期收益 $r_t+r_{t-1}+\cdots+r_{t-q+1}$ 的一阶自相关系数。因此，表 2.5 中 A 组数据的方差比是增长的，表明多期收益间具有正序列相关。例如，$\overline{\mathrm{VR}}(4)/\overline{\mathrm{VR}}(2)=1.42/1.20=1.18$，这表明两周收益的一阶自相关系数接近 18%。

表 2.5 中 B 组数据表明，加权指数表现得很不相同。在整个样本区间上方差比都大于 1，但又大得不多，在 1.02($q=2$)～1.04($q=8$)之间。而且，检验统计量 $\psi^*(q)$ 也都是显著的，因此对任意的 q，RW3 不能被拒绝。子样本的结果表明在前一半样本区间上加权指数的方差比确实随 q 而增大(意味着多期收益中的正序列相关)。这两个相反的形式是由于在整个样本区间内方差比的变化相对较稳定所致。

虽然表 2.5 中的检验统计量是基于名义股票收益计算的，但事实上利用实际收益或超额收益来计算也会明显地得到相同的结论。由于周名义收益的变动与通货膨胀及短期国库券变化率相比非常之大，在基于变动性的检验中，利用名义、实际或超额收益事实上会作出相同的推断。

按企业规模排序组合证券

RW3 的假设被等权指数的方差比检验所拒绝而未被加权指数的检验所拒绝的事实表明，市场股本量或交易量对方差比的性态是有影响的。为从直观上更好地理解这一点，表 2.6 给出了按规模排序的股票交易收益的方差比。我们从 CRSP NYSE-AMEX 日收

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

益文件中对五个按规模排序的股票计算其周收益。对任意给定的周的股票，收益将按其所属的年初市场股本的五分之一计入交易量。交易量是等额加权的且有成分变化。[①]表 2.6的 A 组数据给出的是小企业(前五分之一)的股票交易计算的结果，B 组数据给出的是中型企业(第三个五分之一)的股票交易计算的结果，C 组数据给出的是大企业(后五分之一)的股票交易计算的结果。

表 2.6　周按规模排序组合证券收益的方差比

样本区间	观察值基数 nq	累计形成方差比的观察值基数 q			
		2	4	8	16
A. CRSP 市值最小的五分之一企业股票					
1962.07.10～1994.12.27	1 695	1.35	1.77	2.24	2.46
		(7.15)*	(9.42)*	(10.74)*	(9.33)*
1962.07.10～1978.10.03	848	1.34	1.76	2.22	2.46
		(5.47)*	(7.33)*	(8.03)*	(6.97)*
1978.10.10～1994.12.27	847	1.37	1.79	2.22	2.49
		(4.67)*	(5.91)*	(6.89)*	(6.60)*
B. CRSP 市值中等的五分之一企业股票					
1962.07.10～1994.12.27	1 695	1.20	1.39	1.59	1.65
		(4.25)*	(4.85)*	(5.16)*	(4.17)*
1962.07.10～1978.10.03	848	1.21	1.43	1.66	1.79
		(3.25)*	(4.03)*	(4.27)*	(3.67)*
1978.10.10～1994.12.27	847	1.19	1.33	1.44	1.47
		(2.79)*	(2.74)*	(2.63)*	(2.14)*
C. CRSP 市值最大的五分之一企业股票					
1962.07.10～1994.12.27	1 695	1.06	1.10	1.14	1.11
		(1.71)	(1.46)	(1.38)	(0.76)
1962.07.10～1978.10.03	848	1.11	1.21	1.30	1.32
		(2.05)*	(2.15)*	(2.12)*	(1.59)
1978.10.10～1994.12.27	847	1.01	1.00	0.98	0.92
		(0.29)	(0.05)	(−0.13)	(−0.41)

注：上表是样本区间为自 1962 年 7 月 10 日～1994 年 12 月 27 日的按规模排序股票交易量的随机游动假设的方差比检验。方差比$\overline{VR}(q)$在主行中给出，主行下面的圆括号中给出异方差调和检验统计量 $\psi^*(q)$。在随机游动原假设下，方差比的值为 1，且检验统计量具有渐近标准正态分布。检验统计量打上星号表明在 5%显著水平下方差比在统计上显著异于 1。

① 利用市值加权的组合证券收益量，我们同样进行了检验，检验结果基本相同。仅有的差异出现在加权股票收益量的最大的五分之一子样本中，其中一般没有拒绝随机游动假设。当然，倘若加权股票收益量的最大的五分之一子样本与加权的市场指数相当相似的话，这并不令人惊奇。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

对于整个样本及两个子样本，最小的五分之一企业的股票收益数据有较强的违反随机游动假设的迹象：在 A 组数据中，所有 $\psi^*(q)$统计量几乎都在 1.96 的临界值之上，介于 4.67～10.74 之间。方差比都大于 1，说明在整个样本区间上周收益的一阶自相关系数达 35%。

对中等规模企业股票的交易，B 组数据的 $\psi^*(q)$统计量的值表明也有较强的违反 RW3 的迹象，虽然其方差比略小，序列相关较低。对最大企业股票的交易，C 组数据显示出稀少的违反 RW3 的迹象，当然这仅限于前半段样本区间。

按规模排序的组合证券的分析结果通常与市场指数的结果一致，即方差比通常大于 1 且随 q 而增大，显示出多期收益的正序列相关，除了最大的企业外的所有证券交易的检验结果在统计上都有显著拒绝随机游动原假设 RW3 的迹象，尤其是前半段样本与后半段样本相比更为显著。

个别证券

上述讨论已经表明随机游动假设与等额加权指数及小企业和中等规模企业股票的交易性态是不一致的，我们现在转而讨论个别证券的收益。表 2.7 给出了个股截面数据样本方差比的平均数，对整个1 695周的样本区间，这些个股在 CRSP 数据库中都有完整的历史收益数据，整个样本共含 411 家企业。A 组数据包含 411 只个股的方差比的截面数据平均，同样包括 100 只小股票，100 只中等规模企业股票以及 100 只大股票。[①] 每行下的括号中给出的是截面数据的标准差。由于方差比显然并非截面独立，这些标准差不能用来构造通常的显著性检验，表中给出的标准差仅用来表示方差比的截面离差大小。

$q=2$ 的 411 只个股的平均方差比是 0.96，意味着平均来说存在负序列相关。对所有股票，平均序列相关为－4%，其中最小的 100 只股票是－5%。然而，这种序列相关性在统计上和经济上都是不显著的，并不显示出违反随机游动假设。例如，对所有股票的 $\psi^*(q)$统计量的最大平均值出现在 $q=4$ 的情形，其值为－0.90(截面标准差为 1.19)；100 只最小股票的$\psi^*(q)$最大平均值是－1.67(相应于 $q=2$，截面标准差为 1.75)。这些结果与弗兰切和罗尔(French and Roll，1986)的研究结果一致，即个股的日收益略有些负相关。

作为比较，B 组数据给出了 411 只股票的等额和市值加权的交易量的方差比。其结果与表 2.5 和表 2.6 中的结果一致：等额加权交易量具有显著正相关，市值加权交易量的自相关接近零。

个股收益的自相关在统计上不显著这并不使人惊奇。个股收益包含过多的企业特殊

① 市场价值的样本中位数用作企业(股票)规模的度量。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

性或特异性干扰使得对其中存在的可预测成分的检测变得很困难。由于组合证券大大地削弱了这种特异性干扰，因此当这些证券组合在一起时我们有希望更容易地揭示其中可预测的系统性成分。然而，与组合证券收益的强正自相关性形成对照的个股的弱负相关性是很有意思的。

表 2.7　　个股周收益方差比

样　本	观察值基数 nq	累计形成方差比的观察值基数 q			
		2	4	8	16
A. 个股收益平均方差比					
所有股票	1 695	0.96	0.92	0.89	0.85
(411 只股票)		(0.04)	(0.07)	(0.11)	(0.14)
小股票	1 695	0.95	0.90	0.88	0.85
(100 只股票)		(0.06)	(0.09)	(0.12)	(0.15)
中等规模股票	1 695	0.96	0.93	0.90	0.85
(100 只股票)		(0.04)	(0.07)	(0.09)	(0.13)
大股票	1 695	0.95	0.91	0.89	0.86
(100 只股票)		(0.03)	(0.06)	(0.11)	(0.15)
B. 所有股票的等额加权及市值加权组合收益方差比					
等额加权组合收益	1 695	1.11	1.20	1.30	1.29
(411 只股票)		(2.75)*	(2.83)*	(2.88)*	(1.99)*
市值加权组合收益	1 695	0.99	0.97	0.96	0.93
(411 只股票)		(−0.26)	(−0.43)	(−0.42)	(−0.53)

注：上表是样本区间从 1962 年 7 月 10 日～1994 年 12 月 27 日间具有完整历史收益数据的全部个股(411 只股票)的方差比均值。同时也给出了 100 只小股票、100 只中等规模股票以及 100 只大股票的方差比均值。作为比较，B 组数据给出了等额加权及市值加权的组合收益，各为 411 只股票。(A 组数据)个股平均数下括号内的项为截面方差比的标准差。由于方差比并非截面独立的，这些标准差并不能用于通常的显著性检验，表中给出的标准差仅用来表示方差比的截面离差大小。(B 组数据)组合收益方差比下括号内的项是异方差调和 $\psi^*(q)$统计量。星号是表明在 5% 显著水平下方差比在统计上显著异于 1。

2.8.3 叉自相关及领先—滞后关系

尽管个别证券收益是弱负自相关的，但本质上是个别证券收益平均的组合证券收益有强正自相关。这种略带荒谬的结论只能意味着一件事，即不同时点不同证券之间存在有大的正自相关。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

为明白这一点，考虑 N 个证券的集合，记($N\times1$)的向量 $\boldsymbol{R}_t$ 为 t 期的每一证券的收益 $[R_{1t},\cdots,R_{Nt}]'$。我们这里转而使用单一证券的收益是因为我们的分析焦点是组合证券内各收益间的相互作用，且连续组合收益并不跨证券累积（进一步的讨论见第 1 章第 1.4.1节）。为方便起见，我们在这一整节中都遵循下述假定①：

(A1)$\mathbf{R}_t$ 是一联合协方差平稳随机过程，均值 $\mathrm{E}[\mathbf{R}_t]=\boldsymbol{\mu}\equiv[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N]'$，自协方差矩阵 $\mathrm{E}[(\mathbf{R}_{t-k}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{R}_t-\boldsymbol{\mu})']=\boldsymbol{\Gamma}(k)$，不失一般性，取 $k\geqslant0$，因 $\boldsymbol{\Gamma}(k)=\boldsymbol{\Gamma}'(-k)$。

若记 $\boldsymbol{\iota}$ 为单位向量$[1\cdots1]'$，我们可将等额加权市场指数表示为 $R_{mt}\equiv\boldsymbol{\iota}'\mathbf{R}_t/N$。$R_{mt}$ 的一阶自协方差可分解为其成分证券的一阶自自协方差及叉自协方差的和：

$$\mathrm{Cov}[R_{mt-1},R_{mt}]=\mathrm{Cov}\left[\frac{\boldsymbol{\iota}'\mathbf{R}_{t-1}}{N},\frac{\boldsymbol{\iota}'\mathbf{R}_t}{N}\right]=\frac{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Gamma}(1)\boldsymbol{\iota}}{N^2} \tag{2.8.2}$$

因此 R_{mt} 的一阶自相关可表示为：

$$\frac{\mathrm{Cov}[R_{mt-1},R_{mt}]}{\mathrm{Var}[R_{mt}]}=\frac{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Gamma}(1)\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Gamma}(0)\boldsymbol{\iota}}=\frac{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Gamma}(1)\boldsymbol{\iota}-\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Gamma}(1))}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Gamma}(0)\boldsymbol{\iota}}+\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Gamma}(1))}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Gamma}(0)\boldsymbol{\iota}} \tag{2.8.3}$$

其中，tr(·)是迹算子，它是方阵的主对角元之和。(2.8.3)式右边第一项仅包含叉自相关而第二项仅包括自自相关。若自自相关一般为负，且指数的自协方差为正，则叉自相关必须为正。而且，叉自相关必须较大，要大到超过负的自自相关的和。

表 2.8　　按规模排序的组合证券收益的叉自相关矩阵

$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_0=$

	R_{1t}	R_{2t}	R_{3t}	R_{4t}	R_{5t}
R_{1t}	1.000	0.938	0.892	0.839	0.728
R_{2t}	0.938	1.000	0.976	0.944	0.856
R_{3t}	0.892	0.976	1.000	0.979	0.914
R_{4t}	0.839	0.944	0.979	1.000	0.961
R_{5t}	0.728	0.856	0.914	0.961	1.000

$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1=$

	R_{1t}	R_{2t}	R_{3t}	R_{4t}	R_{5t}
R_{1t-1}	0.352	0.226	0.171	0.115	0.024
R_{2t-1}	0.330	0.232	0.182	0.129	0.037
R_{3t-1}	0.324	0.244	0.197	0.147	0.053
R_{4t-1}	0.310	0.242	0.201	0.153	0.059
R_{5t-1}	0.265	0.223	0.187	0.147	0.057

① 假定(A1)是为了简化记号，由于联合协方差平稳性可使我们消除总体矩的时间标记，比如 μ 及 $\Gamma(k)$；这一结果的特性在弱相关的非齐次分布向量 R_t 这样较弱的假定下也不会改变。其仅需用适当定义的序时平均数的相应概率极限来代替期望值。进一步的讨论见罗和麦金雷(Lo and MacKinlay,1990)的文献。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

$\hat{\gamma}_2=$

	R_{1t}	R_{2t}	R_{3t}	R_{4t}	R_{5t}
R_{1t-2}	0.163	0.089	0.057	0.032	−0.010
R_{2t-2}	0.141	0.078	0.051	0.029	−0.010
R_{3t-2}	0.135	0.079	0.051	0.032	−0.005
R_{4t-2}	0.121	0.071	0.046	0.028	−0.006
R_{5t-2}	0.084	0.045	0.025	0.012	−0.016

$\hat{\gamma}_3=$

	R_{1t}	R_{2t}	R_{3t}	R_{4t}	R_{5t}
R_{1t-3}	0.155	0.106	0.074	0.050	0.027
R_{2t-3}	0.141	0.100	0.071	0.050	0.031
R_{3t-3}	0.143	0.105	0.077	0.058	0.039
R_{4t-3}	0.137	0.104	0.079	0.061	0.044
R_{5t-3}	0.120	0.093	0.074	0.061	0.047

$\hat{\gamma}_4=$

	R_{1t}	R_{2t}	R_{3t}	R_{4t}	R_{5t}
R_{1t-4}	0.104	0.063	0.036	0.016	−0.007
R_{2t-4}	0.097	0.062	0.036	0.017	−0.006
R_{3t-4}	0.095	0.060	0.033	0.015	−0.011
R_{4t-4}	0.100	0.067	0.039	0.023	−0.004
R_{5t-4}	0.094	0.064	0.038	0.025	−0.001

注：上表是向量 $\mathbf{X}_t\equiv[R_{1t},R_{2t},R_{3t},R_{4t},R_{5t}]'$ 的自相关矩阵，其中 R_{it} 是等额加权组合股票中第 i 个五分之一股票 t 周的收益，$i=1,\cdots,5$(第 1 个五分之一包含的是最小股票)，样本是 NYSE-AMEX 股票从 1962 年 7 月 10 日～1994 年 12 月 27 日(1 695 个观察值)的数据。注意到 $\gamma(k)\equiv\mathbf{D}^{-1/2}\mathrm{E}[(\mathbf{X}_{t-k}-\mu)(\mathbf{X}_t-\mu)']\mathbf{D}^{-1/2}$，其中 $\mathbf{D}\equiv\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_5^2)$；因此第 (i,j) 元素是 R_{it-k} 与 R_{jt} 的相关系数。在 IID 原假设下自相关系数的渐近标准误由 $1/\sqrt{T}=0.024$ 给出。

表 2.8 给出了五个按规模排序的组合证券周收益向量的自相关矩阵 $\hat{\gamma}(k)$，它由从 1962 年 7 月 10 日～1994 年 12 月 27 日(1 695 个观察值)的股票周收益组成。令 $\mathbf{X}_t$ 记向量 $[R_{1t},R_{2t},R_{3t},R_{4t},R_{5t}]'$，其中 R_{it} 是等额加权组合股票中第 i 个五分之一股票 t 周的收益。则 $\mathbf{X}_t$ 的 k 阶自相关矩阵由 $\gamma(k)\equiv\mathbf{D}^{-1/2}\mathrm{E}[(\mathbf{X}_{t-k}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t-\boldsymbol{\mu})']\mathbf{D}^{-1/2}$ 给出，其中 $\mathbf{D}\equiv\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_5^2)$，且 $\boldsymbol{\mu}\equiv\mathrm{E}[\mathbf{X}_t]$。按这一约定，$\gamma(k)$ 的第 (i,j) 元素是 R_{it-k} 与 R_{jt} 的相关系数。估计量 $\hat{\gamma}(k)$ 即为通常的样本自相关矩阵。

表 2.8 中出现了一个有趣的形式：$\hat{\gamma}(k)$ 主对角下的元素几乎都比主对角上的元素大。例如，大股票上周的收益 (R_{5t-1}) 与小股票本周的收益 (R_{1t}) 间的一阶自相关系数是 26.5%，而小股票上周的收益 (R_{1t-1}) 与大股票本周收益 (R_{5t}) 间的一阶自相关系数仅为 2.4%。同样的结果亦可见于高阶自相关矩阵中，尽管因高阶自相关的衰减这种差异的量

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

值较小。$\hat{\gamma}(k)$矩阵是不对称的，这说明自协方差矩阵估计量$\hat{\Gamma}(k)$也是不对称的。

这种令人感兴趣的领先—滞后形式，即大股本股票领先而小股本股票滞后，这一点在表 2.9 中更为明显。表 2.9 给出了自相关矩阵的差及其转置，其中下三角元素全为正(而上三角元素全为负)，说明小股票的当前收益与大股票的过去收益间的相关始终大于大股票的当前收益与小股票的过去收益间的相关。

表 2.9 **叉自相关矩阵的不对称性**

$\hat{\gamma}(1)-\hat{\gamma}'(1)=$

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_1	0.000	−0.104	−0.153	−0.195	−0.241
R_2	0.104	0.000	−0.061	−0.113	−0.181
R_3	0.153	0.061	0.000	−0.054	−0.134
R_4	0.195	0.113	0.054	0.000	−0.088
R_5	0.241	0.181	0.134	0.088	0.000

$\hat{\gamma}(2)-\hat{\gamma}'(2)=$

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_1	0.000	−0.052	−0.079	−0.089	−0.094
R_2	0.052	0.000	−0.029	−0.042	−0.055
R_3	0.079	0.029	0.000	−0.014	−0.029
R_4	0.089	0.042	0.014	0.000	−0.018
R_5	0.094	0.055	0.029	0.018	0.000

$\hat{\gamma}(3)-\hat{\gamma}'(3)=$

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_1	0.000	−0.035	−0.069	−0.087	−0.093
R_2	0.035	0.000	−0.024	−0.054	−0.062
R_3	0.069	0.034	0.000	−0.022	−0.035
R_4	0.087	0.054	0.022	0.000	−0.018
R_5	0.093	0.062	0.035	0.018	0.000

$\hat{\gamma}(4)-\hat{\gamma}'(4)=$

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_1	0.000	−0.033	−0.059	−0.084	−0.102
R_2	0.033	0.000	−0.024	−0.050	−0.070
R_3	0.059	0.024	0.000	−0.023	−0.049
R_4	0.084	0.050	0.023	0.000	−0.030
R_5	0.102	0.070	0.049	0.030	0.000

注：上表列示的是按规模排序的组合证券收益向量$\mathbf{X}_t \equiv [R_{1t}, R_{2t}, R_{3t}, R_{4t}, R_{5t}]'$的自相关矩阵与其转置的差，其中$R_{it}$是等额加权组合股票中第$i$个五分之一股票$t$周的收益，$i=1,\cdots,5$(第 1 个五分之一包含的是最小股票)，样本是 NYSE-AMEX 股票从 1962 年 7 月 10 日～1994 年 12 月 27 日(1 695个观察值)的数据。我们注意到$\boldsymbol{\gamma}(k) \equiv \mathbf{D}^{-1/2}\mathrm{E}[(\mathbf{X}_{t-k}-\mu)(\mathbf{X}_t-\mu)']\mathbf{D}^{-1/2}$，其中$\mathbf{D} \equiv \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \cdots, \sigma_5^2)$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

当然，第 3 章中的非交易模型也具有不对称自相关矩阵。然而，在第 3 章中我们可以看到要产生表 2.8 中的叉自相关量值非交易模型需要有并不现实的高概率。

表 2.8 和表 2.9 的结果指出了各股票间复杂的交互作用应是正指数自相关的显著来源。罗和麦金雷(Lo and MacKinly，1990c)的研究表明，超过半数的正指数自相关可归结于正交互效应。他们也注意到正交互效应可用来解释反向投资策略表面上的盈利能力，所谓反向投资策略是指与一般市场走向相反的投资策略。鉴于投资者往往对市场信息反应过度的认识，这种反向投资策略包括卖出“赚钱的”及买入“亏损的”。当市场存在负序列相关时，卖出赚钱股买入亏损股会赢得正期望利润，因为当前的输家会成为将来的赢家而当前的赢家会成为以后的输家。

但是正交互效应的存在为反向投资策略的盈利提供了另一渠道。例如，今日高收益的证券 A 暗示了明日证券 B 很可能会有高收益，因此即使利用单个证券的过去收益数据无法预测各证券的日后收益情况，但反向投资策略仍将盈利。为弄清这是为什么，假设市场上仅有 A 和 B 两种证券；若当前 A 的收益高于市场价值，反向投资会卖出 A 而买入 B。但当 A 和 B 为正叉自相关时，则平均来看反向投资会因其做多头 B 而盈利。

股票市场无处不是过度反应的，也就是个别证券收益是负自相关的。因此，具有正期望利润的反向投资策略并不意味着股票市场的反应过度。事实上，对于经罗和麦金雷(Lo and Mackinly，1990c)所验证的特定反向投资策略，超过一半的期望利润是由交互效应带来的而不是由个别股票收益间的负自相关带来的。

这种交互效应还可用于解释近期在金融界很流行的其他一些交易策略表面上的盈利能力。例如，多头/空头或市场中性投资策略正是在上述情形下可赢得高额的收益，这其中多头可被空头以美元对美元抵消，尽管这些策略原本设计为仅利用自身效应的优势，也就是个别证券期望收益预测的正和负。虚买虚卖(matched-book)或买卖等额交易策略的表现则要归因于交互效应以及自身效应。

虽然许多研究试图解释这些令人注目的领先—滞后效应[例如，见白德瑞内斯，科尔和奴尔(Badrinath，Kale and Noe，1995)，布道柯赫，理查德森和惠特劳(Boudoukh，Richardson and Whitelaw，1994)，杰盖迪希和斯沃梅内森(Jegadeesh and Swaminathan，1993)，科瑞德，考尔和尼麦棱德瑞(Conrad，Kaul and Nimalendran，1991)，布里恩南，杰盖迪希和斯沃梅内森(Brennan，Jegadeesh and Swaminathan，1993)，杰盖迪希和蒂特曼(Jegadeesh and Titman，1995)，以及麦切(Mech，1993)]。但要彻底理解其特性及根源仍然差得很远。

2.8.4 利用长线收益的检验

在随机游动假设的检验、资产收益的可预报性、反向投资策略的盈利性等方面的许多近期的研究中都采用了长线收益——很多情形下称多年份收益，并取得了令人鼓舞的成

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

果。区分短线与长线收益的时间范围是十分重要的，因为现在大家都知道周股票收益的变动很多方面都不同于三至五年股票收益的变动。我们在第 7 章中将更为详细地考虑短线及长线收益的计量经济学综合模型，而这里我们仅对长线收益对随机游动假设的意义作一简短讨论。

与罗和麦金雷(Lo and MacKinly，1988)以及其他一些人所证明的对于日、周及月份的指数收益存在有正序列相关的结论相反，法马和弗兰切(Fama and French，1988b)以及波特巴和萨默斯(Poterba and Summers，1988)在多年份收益数据中发现有负序列相关。例如，波特巴和萨默斯(Poterba and Summers，1988)利用从 1926～1985 年的市值加权 CRSP NYSE 指数的 96 个月收益给出的方差比是 0.575，显示了某些收益区间内的负序列相关(回顾以前的讨论得知方差比是自相关系数的特定线性组合)。法马和弗兰切(Fama and French，1988b)以及波特巴和萨默斯(Poterba and Summers，1988)都断定对较长时间范围的股票市场价格存在有大量的均值回复现象，他们将其归因于“瞬时”因子的存在，就像(2.5.1)式中的 y_t 因子。

但是，我们有充足的理由对这种基于长线收益的推断引起警惕。可能最明显值得关注的是这些研究所用样本的容量特别小，从 1926～1985 年，仅有 12 个非交迭的五年收益。尽管交迭收益确实提供了某些增量信息，但布道柯赫和理查德森(Boudoukh and Richardson，1994)，罗和麦金雷(Lo and MacKinly，1989)，理查德森和史密斯(Richardson and Smith，1991)以及理查德森和斯托克(Richardson and Stock，1989)的研究结果提出这种增量信息最好的情况只是适度的信息增加，而最坏的情况则会使人迷惑。理查德森和斯托克(Richardson and Stock，1989)特别提出了一种渐近近似，抓住了交迭长线收益计算的本质，即允许收益的时间范围 q 随样本容量 T 增长，这样 q/T 收敛到一个介于 0 和 1 之间的有限数值 δ，由此说明当收益的时间范围仅为整个样本期间的一小部分时，方差比会有严重偏差。例如，利用第 2.5.1 节中讨论的方差比的渐近近似式(2.5.10)，在 RW1 下以交迭收益计算的方差比的期望值由(2.5.12)式给出。这一表达式表明尽管假定 RW1 成立，对于收益时间跨度为 96 个月且样本区间为 60 年的情形，有 $\delta=8/60=0.133$，因此方差比期望为 $(1-\delta)^2=0.751$。在 RW2 及 RW3 下，还会出现更大的偏差[例子见罗马诺和托姆斯(Romano and Thombs，1996)]。

上述这些困难都反映在与长线收益的自相关相联系的标准误差以及方差比的量值上[例如，见理查德森和斯托克(Richardson and Stock，1989，表 5)]，忽略点估计，该量值一般较大，以致产生近于零的 z 统计量。理查德森(Richardson，1993)以及理查德森和斯托克(Richardson and Stock，1989)提出对小样本容量以及与长线收益关联的其他统计问题作适当调整，扭转了很多由法马和弗兰切(Fama and French，1988b)以及波特巴和萨默斯(Poterba and Summers，1988)提出的论断。

而且，对长线收益数据，自相关系数以及其他时间序列参数的点估计表现出相当大的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

样本波动性。例如，基姆、纳尔逊和斯格茨(Kim，Nelson and Startz，1988)以及理查德森和斯托克(Richardson and Stock，1989)证明简单的偏差调整项即可改变自相关的符号。给定由长线收益产生的容量及小的样本，这一结果并不令人惊奇(例如，见第 2.4.1 节中偏差调整的量值)。

最后，可能主要是 1926～1985 年样本的前十年数据的原因，基姆，纳尔逊和斯格茨(Kim，Nelson and Startz，1988)的研究表明长线收益的负序列相关对样本区间极其敏感。虽然十年的数据是样本资料中很重要的一部分，不经过仔细考虑是不能剔除的，但序列相关系数的符号随大萧条中的数据资料而改变，这是令人困扰的。是剔除受变动很大的单个事件影响的数据，还是仍然包含这些数据并说明这种事件是经济系统变化的反映，这一难题强调了小样本统计推断的脆弱性。大体来说，很少有证据表明长线收益的均值回复性，尽管这可能更多的是小样本的征兆而不是否定均值回复的结论性证据，我们只是不好说这一点。

上述这些思考指出，短线收益是可从中选取收益可预报性征迹的更直接来源。这并不是说对更长时间跨度的收益进行仔细调查是不增加信息量的。当然，这仅可能出现于类似商业周期这样的经济因素的影响力是可检测的这种少有的情形下。而且，在某种程度上利用短线收益可预报性策略进行交易的成本将更大，长线收益可预报性可能是尚未利用的盈利机会的更为真实的形式。然而，由长线收益所提出的计量经济学研究任务是不能忽视的，且在这种情形下对附加经济结构的需求会尤其强烈。

2.9 结 论

近期计量经济学研究的进展及经验实证结果表明，金融资产的收益在某种程度上是可预报的。三十年前这等同于对市场效率的彻底排斥。然而，现代金融经济学告诉我们一些其他的完全合理的因素能够对这种可预报性作出说明。证券市场良好的结构以及交易过程中的摩擦能够形成这种可预报性；因商业条件变化而时变的期望收益也能够形成这种可预报性。资产收益的一定程度的可预报性对回报投资者所承受的某种动态风险来说是必须的。出于这些考虑，我们在接下来的章节中将开发很多模型和分析技术来着手解决这些问题及其他相关问题。

习 题

2.1 若$\{P_t\}$是鞅，证明：(1)以给定全部历史序列$\{P_t, P_{t-1}, \cdots\}$为条件，P_{t+1}的最小均方误差预测就是P_t；(2)对一切$k>0$，非交迭的k阶差分对所有置前与滞后都是不相关的。

2.2 什么是 RW1、RW2、RW3 以及相关的鞅假设(包括描述四种模型关系的维恩图)？对每一种

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

模型给出例子。

2.3 (2.2.9)式是两状态马尔可夫链，不满足 RW1 且 CJ 统计量为 1。这种马尔可夫链的一般性质是什么，比如，其是否产生顺序，反转，等等？

2.4 对平稳增量过程推导(2.4.19)式。为什么权数会线性下降？利用这一表达式，构造非随机游动过程的例子，其方差比检验具有很低的功效。

2.5 利用 10 种个股以及等额加权和市值加权 CRSP 市场指数(EWRETD 及 VWRETD)，利用日和月份收益的资料以及您选中的统计软件包对下列问题进行统计分析。注意某些股票没有完整的历史收益数据，故要注意使用有效观察值。对子样本分析，可以将可用观察值等分成子样本。

2.5.1 利用 10 个股票及两种指数计算其日收益的样本均值 $\hat{\mu}$、标准差 $\hat{\sigma}$、以及一阶自相关系数 $\hat{\rho}(1)$，样本区间为从 1962～1994 年。将样本等分成四个子区间样本，并对每一子区间样本计算上述相同的统计量，这些统计量在时间上是否稳定？

2.5.2 对样本区间为从 1962～1994 年的连续组合日收益，计算其样本均值 $\hat{\mu}$、标准差 $\hat{\sigma}$、以及一阶自相关系数 $\hat{\rho}(1)$，以及四个子区间样本中每一子区间样本的相应统计量，将这些结果与单个股票收益的情形作比较，连续组合收益的变动影响是否很大？

2.5.3 对样本区间为从 1962～1994 年的 EWRETD 及 VWRETD 日个股收益数据，画出其频数直方图。对均值和方差与上图相同的正态分布另画一直方图，个股日收益数据看上去接近正态吗？哪一个看上去更接近正态：VWRETD 或 EWRETD？对连续组合日收益进行同样的统计分析，并将其结果与个股日收益的进行比较。

2.5.4 利用样本区间为从 1962～1994 年的日个股收益，对 EWRETD 及 VWRETD 以及 10 个个股收益序列构造 $\hat{\mu}$ 的 99%置信区间。将样本等分成四个子区间样本，并对这四个子区间样本的 12 个序列构造 99%置信区间，与总样本比较这些区间是否变化了很多？

2.5.5 计算 VWRETD，EWRETD，10个个股在整个 1962～1994 年样本时间区间以及它们每一个在四等分样本时间子区间的偏度、峰度和学生氏值。在 5%的检验水平下，哪些偏度、峰度和学生氏值的估计与正态随机变量是有统计差异的？对这 12 个变量序列，使用月度数据，运用同样的计算方法，你能判断这些收益序列的正态性吗？为什么？

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

3.

证券市场的微观结构

在对经济现象建模的过程中，由于未能发现经济数据的某些特征的情况时有发生，所以，要决定集中研究数据的哪些特征时应小心判断，谨慎行事。第二章里，在对金融资产价格的动态特性的研究过程中，我们把资产的价格和收益作为主要关心的对象，而没有明确地提及决定它们的制度结构。我们忽略了这样一个事实，即证券的报价通常都有一个固定的增幅。很典型的例子就是股票价格的增幅通常是 1/8 美元（一个小单位）的倍数。此外，一天之内证券交易发生的时刻并不是等时间间隔的，而且在某些天里这些证券根本不发生交易。的确，正是交易过程对金融资产价格的统计特性产生了重要的影响：在有指定做市商的证券市场里，买方出价（bid price）与卖方要价（ask price）之间的买卖价差对证券价格变动的序列相关性有着不容忽视的影响。

在某些情况下，可以不去考虑证券市场的这些微观结构的特征，特别是研究长期投资的时候。比如，即使买卖价差（见第 3.2.1 节）的确引起了收益的负相关，但对于像标准普尔 500（S&P500）指数[①]这样的美国股票指数的五年期收益来说，它们的负相关性也不大可能归咎于买卖价差的波动（定义见第 3.2 节）。

但在另外一些情况下——如要度量履行费用和市场流动性，比较不同的市场运作机制，评价相互竞争与做市商彼此勾结的可能性产生的影响——对证券市场微观结构的研究就十分重要。现在，市场的微观结构是经济学和金融学中最活跃的研究领域之一。关于这方面的研究涵盖了许多不同的市场和模型[②]。为了检验其中的某些模型，并确定市场的微观结构对其他研究领域的重要性，我们要采用实证方法来衡量市场微观结构的作

---

① 关于长期投资收益的进一步讨论见第 2 章中的第 2.5 节和第 7 章中的第 7.2.1 节。

② 有关这方面的文献为数众多，难以列出一个完整的引用清单。除了下面每节中列出的引用文献，对市场微观结构的介绍性文献感兴趣的读者还可查阅以下文献：科汗（Cohen），梅伊尔（Maier），施瓦茨和惠特库姆（Schwartz and Whitcomb，1986），戴维斯和霍尔特（Davis and Holt，1993），弗兰克尔、加利和吉尔凡尼尼（Frankel，Galli and Giovannini，1996），凯吉尔和罗思（Kagel and Roth，1995），罗（Lo，1995），奥哈拉（O'Hara，1995），SEC（1994）。这些文献提供了一套相当完整的研究市场微观结构的模型和主要问题的方法。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

用。在本章中，我们将构建这样的实证方法。

在第 3.1 节中，我们介绍一个关于交易过程的简单模型并以此来捕捉异步交易的效应。在第 3.2 节中，我们将研究买卖价差对价格变动的时间序列特性的影响。在第 3.3 节中我们将探究几种对交易数据建立模型的方法，这些交易数据往往具有不连续性、抽样间隔无规律性等特点。

3.1 异步交易

当经济时间序列（通常是资产价格）被认为是按某一个时间间隔来记录的，而实际上它们之间却是另外的时间间隔，而且间隔的大小可能还没有规律性，这时就产生了异步交易（即无交易）效应。例如，金融出版物上证券的每日报价都是收盘价，即每个证券在前一交易日中最后一次交易的价格。这些收盘价通常不会在每天的同一时刻产生。但我们含糊地认为这些价格的时间间隔都是 24 小时，并称之为“日价”。下面我们将会看到，即使真正的价格变动（即收益）在统计上是相互独立的，这种假定也会给人们对价格变动和收益的预测造成错误的印象。

特别地，无交易效应可能会引起资产收益的矩和协矩统计量的严重偏差。这些统计量包括均值、方差、协方差、β 值、自相关系数和叉自相关系数，等等。例如，假定股票 A 和股票 B 的收益彼此独立，但股票 A 不如股票 B 交易得频繁。如果某一天临近收市时，传来了影响整个股票市场的消息，那么仅仅因为股票 A 在消息传来后可能没有新的交易，很可能就是股票 B 而不是股票 A 的收盘价将反映这条消息的影响。当然，股票 A 的价格最终也会体现这则消息的影响，但由于它的体现有一个时滞，所以会造成股票 A 和股票 B 以收盘价计算的日收益的伪互自相关。这种滞后反映也会造成股票 A 日收益的伪自相关。因为在股票 A 的无交易期间，它的观测收益为 0；而当股票 A 发生交易时，它的观测收益就恢复到了累积平均收益的水平。这种恢复便造成了股票 A 收益的负序列自相关现象。这些后果对资产收益的预测和非线性的检验，以及对风险与期望收益之间利益权衡的定量化都有明显的影响。

第一个认识到异步交易价格的重要性的人可能是费雪尔（Fisher，1966）。近年来，阿特希森、巴特勒和西芒兹（Atchison，Butler and Simonds，1987），科汗、梅伊尔、施瓦茨和惠特库姆（Cohen，Maier，Schwartz and Whitecomb，1978，1979），科汗、哈瓦维尼、梅伊尔、施瓦茨和惠特库姆（Cohen，Hawawini，Maier，Schwartz and Whitecomb，1983b），迪默森（Dimson，1979），罗和麦金雷（Lo and MacKinlay，1988，1990a，1990c），以及斯科尔斯和威廉斯（Scholes and Williams，1977）都对无交易现象建立了明确的模型。早期的研究考虑

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

无交易现象对资产定价模型(CAPM)和套利定价理论(APT)[①]实际应用的影响效果。而近期的研究将注意力更多地放在由异步交易造成的伪自相关性上[②]。虽然这些无交易模型可能彼此会有差别，但它们都有一个共同的目的，就是为被错误地假定是等时间间隔测量的资产收益的特征建立模型。

3.1.1 一个异步交易的模型

由于大部分对股票价格特征的研究都集中在股票的收益或价格变动上，我们将 N 个证券收益的产生过程(不可观测)作为原始过程。为了捕捉无交易效应，我们遵照罗和麦金雷(Lo and MacKinlay, 1990a)的模型，把证券 i 第 t 期内不可观测的(即实际的)连续收益的总和记作 r_{it}。这些实际收益代表了交易中不存在摩擦和制度刚性的情况下，证券基本价值的变动。它们既反映了特定公司的信息也反映了整个经济系统的影响效果。而且在一个无摩擦的证券市场里，这些收益应当等于证券的观测收益。

我们不把无交易现象看作是因不公开的信息和战略性的因素而造成的经济现象，而将它视作一个纯粹由人工生成的统计现象来对其建立模型。假设证券 i 在每个时期内不发生交易的概率是 π_i，证券 i 交易与否与实际收益序列 $\{r_{it}\}$(及模型中其他所有的随机变量)[③]相互独立。那么，可以将无交易过程看作一个独立同分布的连续的抛硬币过程[④]，而且不同的证券具有不同的无交易概率。若假定随机无交易过程中存在截面差别，我们则能够根据证券组合收益来捕捉无交易效应。

将证券 i 的观测收益记作 r_{it}^0，r_{it}^0 的值取决于证券 i 在第 t 期内是否发生交易。如果证券 i 在第 t 期内没有发生交易，则观测收益为 0——证券 i 在该时期的收盘价与上个时期的收盘价相同，即有 $r_{it}^0=\log(p_{it}/p_{it-1})=\log 1=0$。如果证券 i 在第 t 期内发生了交易，则令观测收益等于第 t 期内与在这之前所有连续的无交易时期内的实际收益总和。

例如，假定有五个连续时期，证券 i 在第 1、第 2、第 5 期内发生交易，在第 3、第 4 期内无交易。根据前面的定义，证券 i 在第 2 期内的观测收益就是实际收益($r_{i2}^0=r_{i2}$)；在第 3、第 4 期内的观测收益都为 0($r_{i3}^0=r_{i4}^0=0$)；在第 5 期内的观测收益是从第 3 期到第 5 期内

---

① 如见科汗、哈瓦维尼、梅伊尔、施瓦茨和惠特库姆(Cohen, Hawawini, Maier, Schwartz and Whitcomb, 1983a, b)，迪默森(Dimson, 1979)，斯科尔斯和威廉斯(Scholes and Williams, 1977)，以及尚肯(Shanken, 1987b)。

② 见阿特希森，巴特勒和西芒兹(Atchison, Butler and Simonds, 1987)，科汗、梅伊尔、施瓦茨和惠特库姆(Cohen, Maier, Schwartz and Whitcomb, 1979, 1986)，以及罗和麦金雷(Lo and MacKinlay, 1988, 1988b, 1990a, 1990c)。

③ 交易行为与实际收益相关的情况也是我们感兴趣的现象，但它和作为测量误差的原因的无交易效应不一样。存在不公开信息和交易策略时，交易行为的确依赖于实际收益(要恰当地定义)，而且交易策略也会造成观测收益的序列相关，但是不能认为这种序列相关是"伪相关"。详细的讨论见第 3.1.2 节。

④ 可以放宽这个假设，让无交易过程具有与状态相关的概率，即为自相关的无交易过程。见第 3.1.2 节的讨论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

实际收益的总和($r_{i5}^0=r_{i3}+r_{i4}+r_{i5}$)①。这样就捕捉到了无交易现象作为伪自相关性的来源的一个基本特点：有关的消息首先影响交易频繁的股票，而对交易不频繁的股票，它的影响效果有一个时滞。在我们建立的这个框架里，实际收益过程刻画了有关消息对证券收益的影响，而观测收益过程 r_{it}^0 则刻画了由无交易引起的时滞的影响。

下面我们来定义无交易模型。假定实际收益遵从一元线性模型：

$$r_{it}=\mu_i+\beta_i f_t+\varepsilon_{it}\ ,\ i=1,\cdots,N \tag{3.1.1}$$

其中，f_t 是某个具有零均值的公共因素；ε_{it} 是均值为零的扰动项，并且在所有领先和滞后期内，在时间和横截面上彼此独立。由于我们希望把无交易现象作为造成自相关性的惟一原因来加以研究，所以假定公共因素 f_t 独立同分布，并与 ε_{it-k} 彼此独立(对于所有的 i,t 和 k)②。每一时期的实际收益都是随机的，它捕获了由消息和特定的无交易的干扰所引起的证券基本价值的变动。而由于交易不频繁的缘故，我们所假定的特定的无交易和收益积累过程捕获的是证券价格中消息和特定干扰的时滞。这种类型的模型有许多动态特性，从这些特性中可以得到一些重要的实证含义。

为了推导观测收益的明确的表达式，并演绎出它的时间序列特性，我们引入两个相关的随机变量：

$$\delta_{it}=\begin{cases}1 & (\text{不交易})\text{，概率为 } \pi_i\\ 0 & (\text{交易})\text{，概率为 } 1-\pi_i\end{cases} \tag{3.1.2}$$

$$\begin{aligned}X_{it}(k)&\equiv(1-\delta_{it})\delta_{it-1}\delta_{it-2}\cdots\delta_{it-k}\ ,k>0\\ &=\begin{cases}1 & \text{概率为}(1-\pi_i)\pi_i^k\\ 0 & \text{概率为 } 1-(1-\pi_i)\pi_i^k\end{cases}\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

其中，$X_{it}(0)\equiv1-\delta_{it}$，对任意 $i\neq j$，$\{\delta_{it}\}$ 与 $\{\delta_{jt}\}$ 彼此独立。对所有 $i=1,2,\cdots,N$，$\{\delta_{it}\}$ 在时间上独立同分布。

当证券 i 在第 t 期内无交易时，指示变量 δ_{it} 取值为 1；否则，取值为 0。$X_{it}(k)$ 也是一个指示变量。当证券 i 在第 t 期内发生交易，但在这之前的 k 个连续的时期内无交易时，$X_{it}(k)$ 取值为 1；否则，取值为 0。由于 π_i 的值小于 1，所以当 k 很大时，变量 $X_{it}(k)$ 取值为 0 的概率很大。类似于证券今天发生了交易而在这之前从未交易过这样的情况发生的可能性极小。

定义了 $X_{it}(k)$ 之后，就很容易得到观测收益 r_{it}^0 的表达式：

$$r_{it}^0=\sum_{k=0}^{\infty}X_{it}(k)r_{it-k}\quad i=1,2,\cdots,N \tag{3.1.4}$$

---

① 第 1 期的收益显然依赖于在这之前证券在多少个连续的时期内没有发生交易。如果证券在第 0 期发生了交易，那么第 1 期的收益等于它的实际收益；如果证券在第 0 期没有发生交易，但在第 −1 期发生了交易，那么第 1 期的观测收益是第 0 期和第 1 期的实际收益之和。

② 这些严格的假设主要是为了解释起来方便。实际上，可以适当放宽这些限制条件。详细的讨论见第 3.1.2 节。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

如果证券 i 在第 t 期内无交易，则 $\delta_{it}=1$，即有 $X_{it}(k)=0$（对所有的 k），所以 $r_{it}^0=0$。如果证券 i 在第 t 期内有交易，那么它的观测收益等于当天的实际收益 r_{it} 和在这之前 k_t 个实际收益的总和。这里，随机变量 k_t 是证券 i 在这之前连续无交易时期的个数。我们称为无交易期间，可定义为：

$$k_t \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\prod_{j=1}^{k}\delta_{it-j}\right\} \tag{3.1.5}$$

虽然，使用(3.1.4)式在下面的计算中更为方便，但是可以利用 k_t 给观测收益下一个更直观的定义：

$$r_{it}^0=\sum_{k=0}^{k_t}r_{it-k} \quad i=1,\cdots,N \tag{3.1.6}$$

(3.1.4)式说明无交易现象存在的情况下，观测收益是过去所有收益的(随机)函数。等价的(3.1.6)式说明，也可以把 r_{it}^0 看作是具有随机期数的随机收益和①。

观测收益的第三种(可能也是最自然的一种)定义如下：

$$r_{it}^0=\begin{cases}0 & \text{概率为 } \pi_i; \\ r_{it} & \text{概率为}(1-\pi_i)^2 \\ r_{it}+r_{it-1} & \text{概率为}(1-\pi_i)^2\pi_i \\ r_{it}+r_{it-1}+r_{it-2} & \text{概率为}(1-\pi_i)^2\pi_i^2 \\ \vdots & \vdots \\ r_{it}+\cdots+r_{it-k} & \text{概率为}(1-\pi_i)^2\pi_i^k \\ \vdots & \vdots\end{cases} \tag{3.1.7}$$

从上式可以看出，无交易现象显然会引起观测收益的伪序列相关，因为每个 r_{it}^0 都包括过去 k 个连续的实际收益的总和。对于不同的 k，有相应的正概率 $(1-\pi_i)^2\pi_i^k$。

要了解无交易概率 π_i 与无交易期间的联系，只需考虑 k_t 的均值和方差：

$$\mathrm{E}[k_t]=\frac{\pi_i}{1-\pi_i},\ \mathrm{Var}[k_t]=\frac{\pi_i}{(1-\pi_i)^2} \tag{3.1.8}$$

若 $\pi_i=1/2$，则证券 i 的平均无交易期间为 1；若 $\pi_i=3/4$，则平均无交易期间为 3。和预期的一样，如果证券在每个时期都有交易，即 $\pi_i=0$，那么 k_t 的均值和方差都为 0。

单个证券收益的含义

要了解无交易现象是怎样影响单个证券的观测收益的时间序列特性的，需要考虑一

① 虽然我们没有要求交易时期之间有固定的时间间隔，但是这个无交易模型本质上与斯科尔斯和威廉斯(Scholes and Williams，1977)提出的表示观测收益序列的随机过程很类似。经过适当的正态化变换，我们的无交易模型会弱收敛于斯科尔斯和威廉斯(Scholes and Williams，1977)提出的连续时间的 Poisson 过程。由(3.1.4)式，还可把观测收益过程看作是实际收益的无穷阶的移动平均(MA)过程，其中，MA 模型的系数是随机的。相反，科汗、梅伊尔、施瓦茨和惠特库姆(Cohen，Maier，Schwartz and Whitcomb，1986，第 6 章)认为观测收益过程是一个有穷阶的移动平均过程，MA 模型的系数也是确定的。尽管我们这里提出的无交易过程更一般化，但没有像科汗等人提出的模型那样包括买卖价差这个因素。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

下 r_{it}^0 的矩（r_{it}^0 的矩反过来也依赖 $X_{it}(k)$ 的矩）[①]。鉴于(3.1.2)式到(3.1.3)式描述的无交易过程，观测收益序列$\{r_{it}^0\}(i=1,\cdots,N)$是协方差平稳的，其一阶矩和二阶矩分别是：

$$\mathrm{E}[r_{it}^0]=\mu_i \tag{3.1.9}$$

$$\mathrm{Var}[r_{it}^0]=\sigma_i^2+\frac{2\pi_i}{1-\pi_i}\mu_i^2 \tag{3.1.10}$$

$$\mathrm{Cov}[r_{it}^0,r_{jt+n}^0]=\begin{cases}-\mu_i^2\pi_i^n & i=j\text{ 时},n>0\\ \dfrac{(1-\pi_i)(1-\pi_j)}{1-\pi_i\pi_j}\beta_i\beta_j\sigma_f^2\pi_j^n & i\neq j\text{ 时},n\geqslant 0\end{cases} \tag{3.1.11}$$

$$\mathrm{Corr}[r_{it}^0,r_{it+n}^0]=\frac{-\mu_i^2\pi_i^n}{\sigma_i^2+\dfrac{2\pi_i}{1-\pi_i}\mu_i^2}\quad n>0 \tag{3.1.12}$$

其中，$\sigma_i^2\equiv\mathrm{Var}[r_{it}]$，$\sigma_f^2\equiv\mathrm{Var}[f_t]$。

从(3.1.9)式和(3.1.10)式可以看出，无交易现象显然对观测收益的均值没有影响；但如果证券的期望收益不为0，无交易现象会使观测收益的方差扩大。而且，(3.1.12)式表明非零的期望收益会引起单个证券的观测收益在领先和滞后期上的负序列相关。该序列相关系数还以几何形式衰减。实际上，在无交易期间，证券的观测收益为0；而在交易期间，观测收益就恢复到了它的累积平均收益水平。所以从直观上理解，也必然会得到这个结果。这说明这种均值回复造成了观测收益的负序列相关。当 $\mu_i=0$ 时，不存在这种均值回复，观测收益也就不存在负序列相关。

伪自相关系数的极值

我们还可以通过这些矩来计算单个证券收益的负相关系数的最值。因为(3.1.12)式中观测收益的自相关系数是 π_i 的连续函数，且值非正：当 $\pi_i=0$ 时，自相关系数为0；当 π_i 趋近1时，自相关系数趋近0。所以，当 π_i 取$[0,1)$中的某个值时，自相关系数必定达到最小。可以直接用微积分的方法确定这个下界，我们在这里只计算一阶自相关系数，高阶的情况留给读者去计算。

由(3.1.2)式到(3.1.3)式，具有无交易概率 π_i 的观测收益序列$\{r_{it}^0\}$的一阶自相关系数的最小值为：

$$\underset{\{\pi_i\}}{\mathrm{Min}}\mathrm{Corr}[r_{it}^0,r_{it+1}^0]=-\left(\frac{|\xi_i|}{1+\sqrt{2}|\xi_i|}\right)^2 \tag{3.1.13}$$

其中，$\xi_i\equiv\mu_i/\sigma_i$，当

$$\pi_i=\frac{1}{1+\sqrt{2}|\xi_i|} \tag{3.1.14}$$

时，一阶自相关系数达到最小。

① 为了节省篇幅，我们只列出了计算的结果。有关的详细推导读者可参阅罗和麦金雷(Lo and MacKinlay, 1990a, 1990c)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

对所有的 $\pi_1\in[0,1)$ 和 $\xi_i\in(-\infty,+\infty)$，我们有：

$$\operatorname*{Inf}_{\{\pi_i,\xi_i\}}\operatorname{Corr}[r_{it}^0,r_{it+1}^0]=-1/2 \tag{3.1.15}$$

当 $|\xi_i|$ 无限增大时，这是(3.1.13)式的下界。但对取有限值的 ξ_i 这一下界永远无法区别。

虽然从表面上看 $-1/2$ 这个下界很重要，但实际上，对于所有可能的参数值来说，这个值是达不到的。例如，我们假定一段交易时期为一个交易日，μ_i 和 σ_i 分别取 0.05%和 2.5%，ξ_i 即为 0.02。根据(3.1.13)式，单个证券收益的伪自相关系数的最小值为 -0.037%，此时无交易概率为 97.2%。这意味着该证券的平均无交易期间是 35.4 天。

这些结果也说明如果抽样的时间间隔更长，那么由无交易现象引起的自相关系数就会更小。因为根据前面定义的实际收益过程，证券的持有期延长一倍，μ_i 的值就会扩大一倍，而 σ_i 的值只是原来的 $\sqrt{2}$ 倍。所以，对于抽样时间间隔长的证券收益序列来说，其负自相关系数可能会更小。不过，这两者之间在实证上并没有直接的关联，因为我们忽略了时间的累积效应。观察(3.1.2)式和(3.1.3)式可知，无交易过程与抽样间隔彼此并不独立，两者之间存在非线性关系。例如，如果将一个星期作为一段交易期间，那么这个设定就排除了日交易现象影响周观测收益的可能性。要恰当地比较不同抽样间隔的观测收益序列，必须考虑在极小的时间增量上的无交易现象，因为抽样间隔长的观测收益的含义就是由此产生的。我们将在后面进一步讨论时间的累计效应。

不对称的互自协方差

(3.1.11)式还包含无交易模型的另外一些重要的实证含义。特别要指出的是，观测收益序列的互自协方差的符号是由 $\beta_i\beta_j$ 的符号决定的。此外，该式不关于 i 和 j 对称：如果 $\pi_i=0,\pi_j\neq0$，那么对任意 $n>0$，r_{it}^0 和 r_{jt+n}^0 之间存在伪互自协方差，但 r_{jt}^0 与 r_{it+n}^0 之间不存在伪互自协方差①。这个结论很好理解：由于证券 i 和证券 j 的收益中都有公共因子 f_t，所以当证券 j 无交易时，交易频繁的证券 i 的收益能够预测证券 j 的收益。证券 j 在第 t 期无交易就隐含了其将来的观测收益 r_{jt+n}^0 是所有过去的实际收益 r_{jt+n-k} 的加权平均($X_{jt+n}(k)$ 是随机权数)。实际收益 r_{jt} 便是加权平均中的一项。由于同期的实际收益 r_{it} 和 r_{jt} 是相关的(因为有公共因子 f_t)，所以 r_{it}^0 能够预测 r_{jt+n}^0。但是，r_{it}^0 不能预测自己，因为 $r_{it}^0=r_{it}(\pi_i=0)$，前面已假定 r_{it} 独立同分布，故而对任意 $n>0$，r_{jt}^0 与 r_{it+n}^0 不相关。

(3.1.11)式的不对称性产生了一个关于收益的互自协方差的可检验的约束条件。鉴

---

① 在讨论格兰杰因果性的时间序列方面的文献中，关于这种不对称性有另外一种解释。如果证券 i 的收益能够预测证券 j 的收益，那么称 r_{it}^0 是 r_{jt}^0 的格兰杰原因。在上面的例子中，当证券 j 受到无交易现象的影响，而证券 i 未受其影响时，证券 i 是证券 j 的格兰杰原因。由于我们还可以把无交易过程看成度量误差的一种存在方式，所以，一个证券的收益是另一个证券收益的外生变量的事实在西姆斯(Sims,1974,1977)的论文里只是换了个说法而已。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

于(3.1.11)式的不对称性的惟一来源是无交易概率在截面上的差别，那么可以从子样矩中获得与这些概率有关的信息。特别地，将 N 个证券的观测收益向量$[r_{1t}^0,r_{2t}^0,\cdots,r_{Nt}^0]$，记作 r_t^0，将自协方差矩阵 $\mathbf{\Gamma}_n$定义为：

$$\mathbf{\Gamma}_n=\mathrm{E}[(\mathbf{r}_t^0-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{r}_{t+n}^0-\boldsymbol{\mu})'],\quad \mu\equiv\mathrm{E}[\mathbf{r}_t^0] \tag{3.1.16}$$

把矩阵 $\mathbf{\Gamma}_n$ 中第 i 行 j 列的元素记为 $\gamma_{ij}(n)$，有：

$$\gamma_{ij}(n)=\frac{(1-\pi_i)(1-\pi_j)}{1-\pi_i\pi_j}\beta_i\beta_j\sigma_f^2\pi_j^n \tag{3.1.17}$$

如果不同证券的无交易概率 π_i 不同，那么 $\mathbf{\Gamma}_n$ 就是不对称矩阵。由(3.1.17)式可知：

$$\frac{\gamma_{ij}(n)}{\gamma_{ji}(n)}=\left(\frac{\pi_j}{\pi_i}\right)^n \tag{3.1.18}$$

这样，根据子样的自协方差矩阵 $\mathbf{\Gamma}_n$，可以直接估计出相对无交易概率。要得到 π_i 的估计值，我们只需估计一个无交易概率：π_1。由(3.1.18)式，就可得到其他的概率值。根据(3.1.11)式，利用子样的均值和自协方差，便可构造出 π_1 的一致估计。

证券组合收益的含义

我们假设根据无交易概率对证券分组。等权重的证券组合 A 包括 N_a 个证券，它们的无交易概率都是 π_a，同理有证券组合 B。现在将这两个证券组合在第 t 期的观测收益分别记作 r_{at}^0 和 r_{bt}^0。这两个观测收益近似为各组内单个证券收益的平均值：

$$r_{Kt}^0\approx\frac{1}{N_k}\sum_{i\in I_k}r_{it}^0,\quad k=a,b \tag{3.1.19}$$

上式是对证券组合 K 中的所有证券求和。在(3.1.19)式中之所以没有使用等号，是因为前面已假定证券的实际收益和观测收益是连续累计的，而且和的对数并不等于对数的和[①]。但是，如果 r_{it}^0 的值很小，而且变动不大——异步交易模型主要研究证券的短期收益，所以这种假定还是合理的——那么这种近似误差可以被忽略。

利用干扰项 ϵ_{it} 的截面独立性，可以从一个简单的渐进近似中得到(3.1.19)式的时间序列特性。在对 APT 的研究中，可以放宽要求证券组合充分多样化的条件[②]，所以我们同样也可以放宽独立性的假定。在这种情况下，随着证券组合 A 和 B 中证券数目(分别记为 N_a 和 N_b)的无限增加，则有下式成立：

---

① 关于证券组合收益的精确的定义是：r_{Kt}^0 是组合中所有证券价格的不加权的几何平均值。按这种方式定义的 r_{Kt}^0 的期望值比等权重证券组合的期望收益要小。其中，等权重证券组合的收益是组合中单个证券收益的算术平均值。默德斯特和森德里桑(Modest and Sundaresan，1983)与埃坦和哈帕兹(Eytan and Harpaz，1986)利用价值边界指数(Value Line Index)详细地研究了这个问题。价值边界指数(Value Line Index)在 1988 年以前是不加权的几何平均值。

② 如见查伯雷恩(Chamberlain，1983a)；查伯雷恩和罗思柴尔德(Chamberlain and Rothschild，1983)和万(Wang，1993)。这些比较宽松的条件的本质就是为了能对干扰项的均值应用大数定理，以使得当组合中的证券数目增大时，所谓"特定的风险"几乎完全消失。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$r_k^0 \overset{a.s.}{=} \mu_K + (1-\pi_K)\beta_K \sum_{k=0}^{\infty} \pi_K^k f_{t-k} \tag{3.1.20}$$

其中：

$$\mu_K = \frac{1}{N_K}\sum_{i\in I_K}\mu_i \quad \beta_K = \frac{1}{N_K}\sum_{i\in I_K}\beta_i \tag{3.1.21}$$

其中，$K=a,b$。证券组合收益的一阶矩和二阶矩是：

$$\mathrm{E}[r_{Kt}^0] = \mu_K = \mathrm{E}[r_{Kt}] \tag{3.1.22}$$

$$\mathrm{Var}[r_{Kt}^0] \overset{a}{=} \beta_K^2\left(\frac{1-\pi_K}{1+\pi_K}\right)\sigma_f^2 \tag{3.1.23}$$

$$\mathrm{Cov}[r_{Kt}^0, r_{Kt+n}^0] \overset{a}{=} \beta_K^2\left(\frac{1-\pi_K}{1+\pi_K}\right)\pi_K^n\sigma_f^2, n\geqslant 0 \tag{3.1.24}$$

$$\mathrm{Corr}[r_{Kt}^0, r_{Kt+n}^0] \overset{a}{=} \pi_K^n, n\geqslant 0 \tag{3.1.25}$$

$$\mathrm{Cov}[r_{at}^0, r_{bt+n}^0] \overset{a}{=} \frac{(1-\pi_a)(1-\pi_b)}{1-\pi_a\pi_b}\beta_a\beta_b\sigma_f^2\pi_b^n \tag{3.1.26}$$

其中，“$\overset{a}{=}$”表示渐近相等。

从(3.1.22)式我们可以看出证券组合的观测收益的均值与实际收益的均值相等。与单个证券的观测收益不同，r_{at}^0 的方差渐进地小于 r_{at} 的方差，这是因为有下式成立：

$$r_{at} \approx \frac{1}{N_a}\sum_{i\in I_a} r_{it} = \mu_a + \beta_a f_t + \frac{1}{N_a}\sum_{i\in I_a}\varepsilon_{it} \tag{3.1.27}$$

$$\overset{a}{=} \mu_a + \beta_a f_t \tag{3.1.28}$$

其中，(3.1.28)式是根据大数定理，由(3.1.27)式得到的。所以，$\mathrm{Var}[r_{at}] \overset{a}{=} \beta_a^2\sigma_f^2$，它大于等于 $\mathrm{Var}[r_{at}^0]$。

因为由无交易现象引起的自相关系数(见(3.1.25)式)以几何形式衰减，所以证券组合的观测收益遵循自回归系数为无交易概率的一阶自回归过程。与(3.1.11)式不同，证券组合的观测收益的自相关系数不依赖其期望收益。π_K 的估计量的形式也很简单，就是 n 阶自相关系数的 n 次方根。所以，我们只要利用证券组合收益的子样的一阶自相关系数，就能很容易地估计出所有的无交易概率。

比较(3.1.26)式和(3.1.11)式可以发现，证券组合观测收益与单个证券观测收益的互自协方差的形式相同。如果证券组合的无交易概率彼此有差别，那么证券组合的观测收益的自协方差矩阵也是不对称的。这就可能在按照市场价值分类的证券组合中引起若干领先—滞后关系[罗和麦金雷(Lo and MacKinlay, 1988)]曾用实证方法证明了这些关系的存在)。证券组合间互自协方差的比例可用来估计它们的相对无交易概率：

$$\frac{\mathrm{Cov}[r_{at}^0, r_{bt+n}^0]}{\mathrm{Cov}[r_{bt}^0, r_{at+n}^0]} \overset{a}{=} \left(\frac{\pi_b}{\pi_a}\right)^n \tag{3.1.29}$$

此外，若要对整个无交易模型进行设定检验，这些比例也是过度识别的约束条件。因为对任意一个不同的下标序列 $K_1, K_2, \cdots, K_r$ 和 $a\neq b$，都有：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\frac{\gamma_{aK_1}(n)\gamma_{K_1K_2}(n)\gamma_{K_2K_3}(n)\cdots\gamma_{K_{r-1}K_r}(n)\gamma_{K_rb}(n)}{\gamma_{K_1a}(n)\gamma_{K_2K_1}(n)\gamma_{K_3K_2}(n)\cdots\gamma_{K_rK_{r-1}}(n)\gamma_{bK_r}(n)}=\left(\frac{\pi_b}{\pi_a}\right)^n \quad (3.1.30)$$

其中，$r\leqslant N_p$，N_p 是不同证券组合的个数，$\gamma_{K_iK_j}(n)\equiv\text{Cov}[r^o_{K_it},r^o_{K_jt+n}]$。因此，$\boldsymbol{\Gamma}_n$ 中虽然有 N_p^2 个不同的自协方差，但是无交易过程的约束条件却使模型的自由度大为降低。

时间的累积效应

迄今为止，在我们所采用的离散时间的框架里，不必设定“一个时期”到底是多长的一段时间。这样做虽然表面上看起来很简单，实际却并非如此，因为只要在实证研究中应用无交易模型(3.1.2)式和(3.1.3)式，就必须定义“一个时期”的长度。一旦确定了这个长度，抽样间隔极短的过程的参数就限定了抽样间隔长的数据的随机特性。例如，如果设定一个时期的长度为一天，那么月观测收益的矩可以表示为日观测收益过程的参数的函数。下面我们来推导这种限定关系。

把证券 i 在第 τ 期的观测收益记作 $r^o_{i\tau}(q)$，而且这一个时期还可以分成 q 个小时期，即有：

$$r^o_{i\tau}(q)\equiv\sum_{t=(\tau-1)q+1}^{\tau q} r^o_{it} \quad (3.1.31)$$

由(3.1.2)式和(3.1.3)式可知，累积观测收益过程$\{r^o_{i\tau}(q)\}(i=1,2,\cdots,N)$的协方差是平稳的，其一阶矩和二阶矩如下(见罗和麦金雷[Lo and MacKinlay，1990a])：

$$\text{E}[r^o_{i\tau}(q)]=q\mu_i \quad (3.1.32)$$

$$\text{Var}[r^o_{i\tau}(q)]=q\sigma_i^2+\frac{2\pi_i(1-\pi_i^q)}{(1-\pi_i)^2}\mu_i^2 \quad (3.1.33)$$

$$\text{Cov}[r^o_{i\tau}(q),r^o_{i\tau+n}(q)]=-\mu_i^2\pi_i^{(n-1)q+1}\left(\frac{1-\pi_i^q}{1-\pi_i}\right)^2,n>0 \quad (3.1.34)$$

$$\text{Corr}[r^o_{i\tau}(q),r^o_{i\tau+n}(q)]=-\frac{\xi_i^2(1-\pi_i^q)^2\pi_i^{nq-q+1}}{q(1-\pi_i)^2+2\pi_i(1-\pi_i^q)\xi_i^2},\ n>0 \quad (3.1.35)$$

$$\text{Cov}[r^o_{i\tau}(q),r^o_{j\tau+n}(q)]=\frac{(1-\pi_i)(1-\pi_j)}{1-\pi_i\pi_j}\beta_i\beta_j\sigma_f^2\pi_j^{(n-1)q+1}\left(\frac{1-\pi_i^q}{1-\pi_i}\right)^2,i\neq j\ ,n\geqslant0 \quad (3.1.36)$$

其中，$\xi_i\equiv\mu_i/\sigma_i$。

虽然累积观测收益的期望值是 q 的线性函数，但其方差却是 q 的非线性函数。因为 r^o_{it} 负序列相关，所以和的方差小于方差的和。尽管在(3.1.35)式中自相关系数的绝对值随 q 的增大而变小，但其符号不变。和(3.1.12)式类似，累积收益的自相关系数也是 π_i 的非正连续函数。其中，π_i 的取值区间是$[0,1)$，$\pi_i=0$ 时，自相关系数为 0；π_i 趋近 1 时，自相关系数趋近 0，所以自相关系数有最小值。

为了研究一阶自相关系数的变化，我们绘出对应于 q 和 ξ 的不同取值，作为 π_i 的函数的一阶自相关系数的图形，如图 3.1 所示。假定 $q=1$ 表示一天，q 取 5、22、66 和 244 则分别对应周、月、季度和年收益。类似地，ξ 取 0.09、0.16 和 0.21，也分别对应日、周和月

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

收益[①]。图 3.1a 是 ξ=0.09 时，对应于四个不同的 q 值，一阶自相关系数 $\rho_1(p)$ 的图形。标记为"q=5"的曲线说明：因无交易引起的周收益的一阶自相关系数不会小于−5%，而且只有在日无交易概率大于 90%时，自相关系数可能达到−5%。

虽然相比之下，月或季度收益的自相关系数的最小值更小，但这些最小值也只是在更大的无交易概率下才会出现。此外，时间的累积效应并不总是会产生更小的自相关系数。很明显，在 π=0.8 以左的区域里，q 越大，自相关系数越接近 0。实际上，对某个固定的 π_i，(3.1.35)式中的自相关系数随着 q 无限增大而趋近 0。因此无交易现象对抽样间隔长的观测收益几乎没有影响。

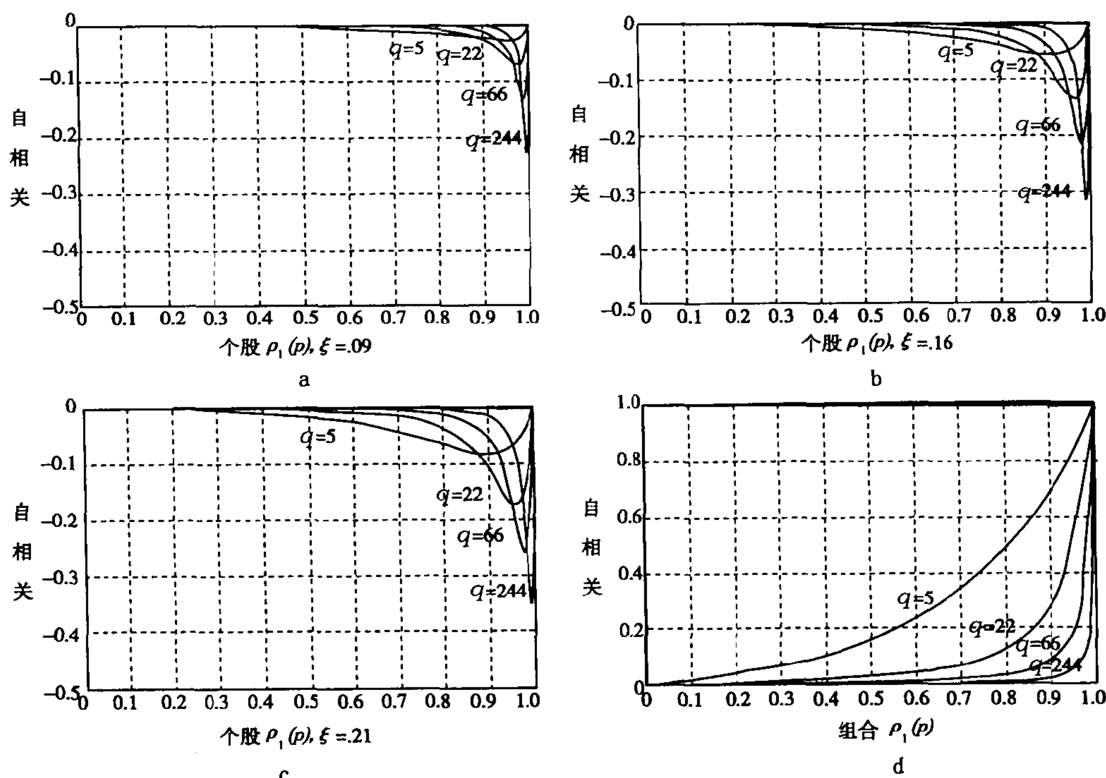


图 3.1 无交易现象引起的自相关系数

图 3.1b 和图 3.1c 表明了 ξ 值的增加对自相关系数的影响。即使我们假定日交易数据的 ξ 等于 0.21(其中一个最大的值)，周收益的自相关系数最小也才是−8%，而且相应的无交易概率在 90%以上。由(3.1.8)式可知，当 π_i=0.9 时，平均无交易期间达 9 天之

① ξ 的值分别是 1962～1987 年等权重的股票收益指数日、周、月的子样均值和子样标准误的比值[见罗和麦金雷(Lo and MacKinlay,1988)，表 1a−c]。虽然这些值可能对股票指数更具有代表性，但是它们也能满足描述单个证券的时序特性的需要。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

长！由于在纽约或美国证券交易所上市的证券中没有哪一个证券连续两周都无交易(除非该证券已经被取消挂牌资格)，所以我们由图 3.1 可知，可以忽略无交易现象对单个证券短期收益的影响。

证券组合的时间累积效应

对于证券组合的观测收益，也可得到类似的时间累积效应的分析结果。将证券组合 A 在第 τ 期的观测收益记作 $r^0_{a\tau}(q)$，这一个时期还可以分成 q 个小时期，即有：

$$r^0_{a\tau}(q) \equiv \sum_{t=(\tau-1)q+1}^{\tau q} r^0_{at} \tag{3.1.37}$$

其中，r^0_{at} 由(3.1.19)式给出。由(3.1.2)式和(3.1.3)式可知，证券组合的观测收益序列$\{r^0_{a\tau}(q)\}$和$\{r^0_{b\tau}(q)\}$的协方差是平稳的。并且随着 N_a 和 N_b 的无限增大，它们的一阶矩和二阶矩是：

$$\mathrm{E}[r^0_{K\tau}(q)] \stackrel{a}{=} q\mu_K \tag{3.1.38}$$

$$\mathrm{Var}[r^0_{K\tau}(q)] \stackrel{a}{=} \left[q - 2\pi_K \frac{1-\pi_K^q}{1-\pi_K}\right]\beta_K^2\sigma_f^2 \tag{3.1.39}$$

$$\mathrm{Cov}[r^0_{K\tau}(q), r^0_{K\tau+n}(q)] \stackrel{a}{=} \left[\frac{1-\pi_K}{1+\pi_K}\right]\left[\frac{1-\pi_K^q}{1-\pi_K}\right]^2 \pi_K^{nq-q+1}\beta_K^2\sigma_f^2, \quad n>0 \tag{3.1.40}$$

$$\mathrm{Corr}[r^0_{K\tau}(q), r^0_{K\tau+n}(q)] \stackrel{a}{=} \frac{(1-\pi_K^q)^2\pi_K^{nq-q+1}}{q(1-\pi_K^2) - 2\pi_K(1-\pi_K^q)}, \quad n>0 \tag{3.1.41}$$

$$\mathrm{Cov}[r^0_{a\tau}(q), r^0_{b\tau+n}(q)] \stackrel{a}{=} \begin{cases} \left[q - \dfrac{\pi_a(1-\pi_a^q)(1-\pi_b)^2 + \pi_b(1-\pi_b^q)(1-\pi_a)^2}{(1-\pi_a)(1-\pi_b)}\right]\dfrac{\beta_a\beta_b\sigma_f^2}{1-\pi_a\pi_b}, & n=0 \\ \dfrac{(1-\pi_a)(1-\pi_b)}{1-\pi_a\pi_b}\left[\dfrac{1-\pi_b^q}{1-\pi_b}\right]^2 \pi_b^{nq-q+1}\beta_a\beta_b\sigma_f^2, & n>0 \end{cases} \tag{3.1.42}$$

其中，$K=a,b$ 代表任意两个证券组合，$q>1$，τ 表示任意一个时期。

(3.1.40)式表明时间的累积效应以非线性的方式影响证券组合观测收益的自相关系数。与单个证券累积收益的自相关系数不同，对任何给定的 q 值，当 π_K 趋近 1 时，(3.1.40)式中自相关系数趋近 1。所以自相关系数的最大值为 1。

为了研究证券组合的自相关系数的变化，我们在图 3.1d 中绘出了当 $q=5$、22、66 时，作为无交易概率的函数的一阶自相关系数的图形。可以看出，证券组合和单个证券的自相关系数不仅符号不同，而且绝对值也有差别。对于给定的无交易概率，证券组合的自相关系数要比单个证券的自相关系数大得多。

如果存在无交易现象，那么它对证券组合的影响最明显。此外，证券组合的自相关系数随着 q 的增大单调递减，所以时间的累积效应总是会减少证券组合收益的序列相关程度。这说明我们最有可能在证券的短期收益中发现无交易现象的影响迹象。在后面第 3.4.1 小节的实证分析中我们会用到这些结论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

3.1.2 进一步的扩展和推广

虽然第 3.1.1 节中的异步交易模型比较简单，但是从中得出的结论却十分丰富。在很多方面还可以进一步扩展和推广这个模型。

原模型中假定单个证券的实际收益独立同分布。我们可以放宽这条假设，允许公共因子自相关，干扰项截面相关。例如，可以允许 f_t 服从一个平稳的 AR(1)过程，尽管这样做会使计算变得复杂一些。那么，观测收益的自相关系数就会分解为两个部分：一部分是由公共因子引起的，另一部分则是由无交易现象造成的。

同样，允许干扰项截面相关也会使矩的计算变得复杂，但不困难[①]。实际上，考虑到读者的耐心和毅力，我们才没有把模型进一步推广到更复杂的情况：如多个公共因子，干扰项的时序相关，公共因子与干扰项相关，等等。在这些情况下，矩的计算也不困难，只是繁琐一些。

如果假定 δ_{it} 是马尔可夫链，那么无交易过程本身就是彼此相关的：明天发生交易的概率依赖于今天是否发生了交易。

不过这种设定使观测收益的矩的表达式十分简洁，我们把这个推导留给读者来完成(见习题 3.3)。下面对观测收益的时序特性的含义概括总结如下：(1)单个证券的收益序列中有可能存在正的自相关关系，证券组合的收益序列中也有可能存在负的自相关关系。但在实证中，无法给这些情况赋予相关的参数值。(2)虽然自相关系数矩阵有可能是对称的，但这种情况不太可能发生。(3)明显存在(不存在)持续的无交易现象时，由无交易现象引起的股价指数的伪自相关系数会更大(更小)。从理论上讲，性质(3)足以解释近期股票市场上指数自相关系数的大小。然而，有一些测定实验表明，当指数的周自相关系数达到 30%时，相应的无交易现象的持续程度却令人难以置信[详细的讨论见罗和麦金雷(Lo and MacKinlay, 1990c)]。

最后一个可以深入研究的方向是：无交易过程与实际收益过程之间有可能是相关的。如果认为实际收益是由新的消息所产生的，那么交易者在多大程度上利用这条消息，来决定什么时候交易以及交易哪些证券，就反映了 r_{it} 和 δ_{it} 的相关程度。对基于消息的交易过程建立模型涉及许多战略性的因素，关于这类问题的实证研究肯定既激动人心又具有挑战性[②]。

---

① 正如我们前面所讨论的，必须给干扰项以某种形式的弱截面相关性的限制，以便使得关于证券组合的渐进结论仍然成立。当然，这种假设并不一定总是恰当的，例如，在同一行业中不同公司的残值风险就很可能是正相关的。所以，渐近近似的结果对于充分多样化的证券组合是最精确的。

② 关于因战略性的因素而导致的交易行为在下列文献中有很好的说明：亚德麦提和伯夫雷德若(Admati and Pfleiderer, 1988, 1989)，伯特西玛斯和罗(Bertsimas and Lo, 1996)，埃斯利和奥哈拉(Easley and O'Hara, 1987, 1990)，科沃恩(Kyle, 1985)，万(Wang, 1993, 1994)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

但是，如果收益的自相关的确是由基于消息的无交易现象引起的，那么从哪种意义上来说这种自相关是伪自相关呢？注意，大量关于异步交易的文献中的前提是：无交易现象是由证券市场的体制造成的，比如调整滞后和异步报价等普遍存在的现象。但如果异步性是因消息驱使而故意造成的，那么由此产生的资产收益的相关性是真实的，因为这种相关性是经济力量产生的而不是测量误差造成的。在这种情况下，关于无交易现象的纯粹的统计模型显然已不适用，而应建立一个包含战略性因素的无交易现象与资产收益相互影响的经济模型。

3.2 证券的买卖价差

在一个有序的金融市场里，投资者所期望的一个最重要的市场特性就是他能够迅速、匿名地买卖大量的证券，同时证券价格受到的冲击又比较小。许多有序的证券交易所都利用做市商来保持证券市场的流动性。无论公众打算什么时候卖出或买入证券，做市商随时准备买入或卖出证券。作为维持市场流动性的回报，证券交易所允许做市商有公布购买价和出售价的垄断权。他们以出价 P_b 买入证券，再以较高的要价 P_a 卖出证券。这种低价买入、高价卖出的特权是对做市商维持市场流动性的主要补偿。而且，虽然买卖价差 P_a-P_b 很少会高于 0.25 美元——《1994 年纽约交易所数据》一书提到：1994 年，纽约交易所里 90.8%的买卖价差不大于 0.25 美元——但是绝大部分做市商赚的钱足以补偿他们所提供的服务。

微小的买卖价差容易使人误解它可能对资产收益的时序特性产生的重要影响。菲利浦斯和史密斯(Phillips and Smith，1980)曾证明当考虑到与买卖价差有关的交易成本时，绝大部分与特定的期权交易策略相联系的反常收益都被消除了。布鲁姆和斯坦博(Bulme and Stambaugh，1983)认为买卖价差造成了根据交易价格计算的平均收益明显的上偏。最近，坎姆(Keim，1989)证明造成“一月效应”——在年初的几天里，市场价值小的公司股票比市场价值大的公司股票产生的收益多——的一个重要的原因是因为上一年 12 月底的收盘价是出价，而当年一月初的收盘价是要价。即使在这段时间里买卖价差保持不变，从出价到要价的变动也足以产生相当大的证券组合收益。特别对价格低的股票来说，收益更大。因为买卖价差占价格的百分比更大。由于价格低的股票一般也是市场价值小的公司股票，所以坎姆(Keim，1989)的解释的确是造成“一月效应”的部分原因①。

买卖价差的存在使问题变得更加复杂。现在每个证券都有三个价格：出价、要价和

① 坎姆(Keim，1989)在文献中还证明了其他的异常情况(如，周末效应、假日效应，等等)，与证券价格在出价和要价之间的规律变动确有关联。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

成交价。成交价不一定等于出价或要价(有些情况下成交价等于出价或要价)，它也不一定介于这两者之间(但在大多数情况下，成交价的确介于出价和要价之间)。那么，应该怎样计算证券的收益呢？是不同出价之差，或是要价与出价之差，还是采用别的什么方法？此外，即使证券的经济价值不变，但由于市场上的买卖交易是随机发生的，证券的价格会在出价和要价之间波动，从而不仅使证券收益频繁地波动，而且会出现序列相关现象。

3.2.1 出价—要价的波动

为了说明买卖价差对资产收益的时序特性的影响，罗尔(Roll，1984)提出了下面的模型。令 P_t^* 代表在无摩擦的经济环境里某个证券在 t 时刻的基本价值，s 代表买卖价差[见格劳斯顿和米尔格罗姆(Glosten and Milgrom，1985)]，那么，观测到的市场价格 P_t 可记作：

$$P_t = P_t^* + I_t \frac{s}{2} \tag{3.2.1}$$

$$I_t \text{ IID} \begin{cases} +1\text{，概率为 } 1/2\text{(交易价格为要价)} \\ -1\text{，概率为 } 1/2\text{(交易价格为出价)} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

其中，I_t 是独立同分布的次序指示变量，它说明在 t 时刻的交易价格是出价还是要价。根据前面对 P_t^* 的定义，有 $E[I_t]=0$，因此 $\Pr(I_t=1)=\Pr(I_t=-1)=1/2$。假定，证券的基本价值不变，即始终有 $P_t^*=P^*$ 成立，则证券的价格变动 ΔP_t 为：

$$\Delta P_t = \Delta P_t^* + (I_t - I_{t-1})\frac{s}{2} = (I_t - I_{t-1})\frac{s}{2} \tag{3.2.3}$$

由 I_t 独立同分布的假设，ΔP_t 的方差、协方差和自相关系数是：

$$\mathrm{Var}[\Delta P_t] = \frac{s^2}{2} \tag{3.2.4}$$

$$\mathrm{Cov}[\Delta P_{t-1}, \Delta P_t] = -\frac{s^2}{4} \tag{3.2.5}$$

$$\mathrm{Cov}[\Delta P_{t-k}, \Delta P_t] = 0, \quad k > 1 \tag{3.2.6}$$

$$\mathrm{Corr}[\Delta P_{t-1}, \Delta P_t] = -\frac{1}{2} \tag{3.2.7}$$

可见，虽然基本价值 P_t^* 固定不变，但是 ΔP_t 还是有波动，而且存在负序列相关。这个结果正是证券价格在出价和要价之间的波动所造成的。其直观意义很清楚：如果基本价值 P^* 固定不变，证券的交易价格只有两种情况：要么是出价，要么是要价。如果当前价格是要价，那么它和前一个时刻的价格差肯定是 0 或 s；它和下一个时刻的价格差肯定是 0 或 $-s$. 如果当前价格是出价，也有类似的情况发生。因此，相邻的价格变动之间的序

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

列相关系数是非正的。这个结论也适用于次序指示变量 I_t 不是独立同分布的情况①。实际上模型(3.2.1)的适用范围相当大。

买卖价差 s 越大，价格变动的方差和一阶自协方差越大。两者都是成比例增长，所以一阶自相关系数还是 $-1/2$。观察(3.2.6)式是可以发现，买卖价差没有引起更高阶的序列相关。

现在允许基本价值 P_t^* 变动，但假定它的增量不是序列相关的，且与 I_t 彼此独立②。这样，(3.2.5)式仍然成立，但是(3.2.7)式中的一阶自相关系数就不再是 $-1/2$ 了，因为分母中多了一个 ΔP_t^* 的方差。若记 ΔP_t^* 的方差为 $\sigma^2(\Delta P_t^*)$，则有：

$$\mathrm{Corr}[\Delta P_{t-1}, \Delta P_t] = -\frac{s^2/4}{(s^2/2)+\sigma^2(\Delta P^*)} \leqslant 0 \tag{3.2.8}$$

虽然(3.2.5)式说明一个给定的买卖价差 s 意味着价格变动的一阶自协方差为 $-s^2/4$；但是，反过来利用给定的自协方差系数和 p 值，可以得到 s 的特解。从(3.2.5)式可以解出 s：

$$s = 2\sqrt{-\mathrm{Cov}[\Delta P_{t-1}, \Delta P_t]} \tag{3.2.9}$$

因此，根据价格变动的样本自协方差能够估计出 s 的值(进一步的讨论见第 3.4.2 节中(3.2.9)式在实证中的运用)。

由于证券的出价和要价是可以观测到的，所以再去估计买卖价差似乎是多余的。但是，罗尔(Roll，1984)认为报出的买卖价差很多时候并不等于有效价差，即出售和购买定单上的实际市场价格之差。在很多情况下，交易价格介于出价和要价之间，这也许是因为做市商并不总是及时更新他们的报价，或者是因为他们想重新平衡自己的盘存并希望随时改进他们的报价来达到这个目的，或者是因为他们想给那些不知道秘密信息的主顾一定的折扣[见艾克汉姆(Eikeboom，1993)，格劳斯顿和米尔格罗姆(Glosten and Milgrom，1985)，戈德斯坦(Goldstein，1993)。在下一节中有详细的讨论]。罗尔(Roll，1984)的模型不仅提供了一种度量有效价差的方法，而且还说明了买卖价差对资产收益的时序特性的影响。

3.2.2 买卖价差的构成

虽然罗尔的模型反映了买卖价差对交易价格的影响的一个重要方面，但这个模型并不是一个关于经济要素和价差动态特性的完整的理论。特别需要指出的是罗尔(Roll，

---

① 例如，交易价格在出价和要价之间反弹而引起价格变动的负序列相关的情况不受 I_t 序列相关的影响，但相关系数的大小会有变化。明确的分析见周伊、萨兰德罗和沙斯特(Choi，Salandro and Shastri，1988)。

② 罗尔(Roll，1984)认为在一个信息产生效力的市场里，价格的变动一定不存在序列相关的现象。但是，莱维(Leroy，1973)，卢卡斯(Lucas，1978)和其他人证明实际并非如此。不过，对短期收益(日收益，或间隔更短的收益)来说，很难提出一个既从经验上看是合理的又表现出明显的序列相关特性的资产收益的模型。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

1984)把 s 当作一个给定的值，而实际上价差的大小是做市商在他们的交易策略中能够控制的惟一一个最重要的数量。格劳斯顿和米尔格罗姆(Glosten and Milgrom，1985)就认为 s 是一个外生变量，而且不可能像第 3.2.1 节中假设的那样与 P^* 相互独立。

另外一些关于市场运行过程的理论把价差分为几个基本组成部分。在不同时刻，对于不同证券，这些组成部分的作用各不相同。估计出买卖价差的各组成部分对于使用交易数据来正确地实现这些理论是至关重要的。在本节中我们将围绕这个目的来讨论一些相关的问题。

买卖价差主要由三个部分构成：指令处理费用、盘存成本和不利选择的补偿费用。其中，前两个部分包括基本的交易、记录费用和拥有不理想的证券的风险费用。虽然这些费用是早期文献[①]中的主要研究对象，但近来很多人都注意到了第三个部分——不利选择的补偿费用[②]。当某些投资者对一个证券的价值了解得比做市商还清楚时，一般来说做市商和这些投资者的交易多半会赔，这就产生了不利选择的补偿费用。由于做市商无法将消息灵通人士和消息不灵通的投资者区分开，所以他们不得不进行那些肯定会赔的交易，而且必须得到相应的补偿。因此，可以把买卖价差中的一部分看作是这种补偿。不利选择的补偿费用的统计特性与其他两个部分大不相同，所以在实证研究中对这几个部分加以区分是非常重要的。格劳斯顿(Glosten，1987)曾提出一个简单的信息不对称模型。这个模型捕捉了不利选择的显著特点。我们下面给出一个简化了的格劳斯顿(Glosten)分析过程[也可参阅格劳斯顿和哈里斯(Glosten and Harris，1988)，斯托尔(Stoll，1989)]。

格劳斯顿分解

把出价和要价分别记作 P_b 和 P_a。P 表示“真实”市场价格，即公共信息决定的市场价格。它也是所有不知道秘密信息的投资者认可的价格。在风险中性的情况下，有 $P=\mathrm{E}[P^*\mid\Omega]$，其中 Ω 表示公共信息集，P^* 表示在每个人都可获得所有信息的情况下证券的价格。则出价和要价的表达式为：

$$P_b=P-A_b-C_b \tag{3.2.10}$$

$$P_a=P+A_b+C_a \tag{3.2.11}$$

$$s\equiv P_a-P_b=(A_a+A_b)+(C_a+C_b) \tag{3.2.12}$$

其中，A_a+A_b 就是买卖价差中不利选择的补偿费用。C_a+C_b 包括指令处理费用和

---

① 见埃米赫德和蒙德尔森(Amihud and Mendelson，1980)，巴吉霍特(Bagehot，1971)，德莫塞茨(Demsetz，1968)，豪和斯托尔(Ho and Stoll，1981)，斯托尔(Stoll，1978)和蒂尼克(Tinic，1972)。

② 见巴吉霍特(Bagehot，1971)，科伯兰德和加莱(Copeland and Galai，1983)，埃斯利和奥哈拉(Easley and O'Hara，1987)，格劳斯顿(Glosten，1987)，格劳斯顿和哈里斯(Glosten and Harris，1988)，格劳斯顿和米尔格罗姆(Glosten and Milgrom，1985)，斯托尔(Stoll，1989)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

盘存成本，格劳斯顿称其为“毛利润”并认为它是外生的①。如果不知道秘密信息的投资者看到一笔交易以要价成交，他们就会把对资产的估价从 P 调整到 $P+A_a$ 以此说明这笔交易的达成可能是秘密信息促成的。类似地，如果一笔交易以出价成交，P 就会被调整到 $P-A_b$。但是怎样确定 A_a 和 A_b 呢?

格劳斯顿假定所有做市商只能获得公共信息，他们根据交易价格(交易价格是所有可能的出价和要价)调整估价的方法是：

$$a(x)=\mathrm{E}[P^*|\Omega\cup\{投资者在\ x\ 买入\}] \tag{3.2.13}$$

$$b(y)=\mathrm{E}[P^*|\Omega\cup\{投资者在\ y\ 卖出\}] \tag{3.2.14}$$

A_a 和 A_b 存在下列关系：

$$A_a=a(P_a)-P$$

$$A_b=P-b(P_b) \tag{3.2.15}$$

若给 $a(\cdot)$ 和 $b(\cdot)$ 加上适当的限制条件，则当彼此竞争的做市商达成一致时，证券的出价和要价就确定了。

结果，做市商的期望利润会包括所有的费用，当然也包括 C_a+C_b 和 A_a+A_b。因此有：

$$P_a=a(P_a)+C_a=P+(a(P_a)-P)+C_a=P+A_a+C_a \tag{3.2.16}$$

$$P_b=b(P_b)-C_b=P-(P-b(P_b))-C_b=P-A_b-C_b \tag{3.2.17}$$

由(3.2.16)式和(3.2.17)式可以立刻得出一个结论：整个价差中只是 C_a+C_b 这一部分包括了做市商交易活动的基本费用。所以报出的价差 $A_a+A_b+C_a+C_b$ 比斯托尔(Stoll，1985)所谓的“有效价差”要大。(有效价差是指实际的买价与卖价之差。有效价差通常都小于报出的买卖价差)。两者之间的差别就是不利选择的补偿费用 A_a+A_b。这种情况符合做市商通常的做法：他们在某些时候会给主顾一个优惠价。这可能是因为他们认为这些主顾进行交易是出于流动性的需要或者是重新平衡指数组合等原因而不是因为他们获得了秘密信息。

交易价格的含义

下面我们看一下 C_a+C_b 和 A_a+A_b 对交易价格的影响。将第 n 个交易价格记为 $\hat{P}_n$，令：

$$\hat{P}_n=P_aI_a+P_bI_b \tag{3.2.18}$$

其中，$I_a(I_b)$是指示函数。如果交易价格为要价(出价)，则 I_a 为 1(I_b 为 1)；否则，I_a 为 0(I_b 为 0)。把(3.2.16)式和(3.2.17)式代入(3.2.18)式，有：

$$\hat{P}_n=\mathrm{E}[P^*|\Omega\cup A]I_a+\mathrm{E}[P^*|\Omega\cup B]I_b+C_aI_a-C_bI_b \tag{3.2.19}$$

① 这些成本模型见埃米赫德和蒙德尔森(Amihud and Mendelson，1980)；科汗、梅伊尔、施瓦茨和惠特库姆(Cohen，Maier，Schwartz and Whitcomb，1981)；豪和斯托尔(Ho and Stoll，1981)，斯托尔(Stoll，1978)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$=P_n+C_nQ_n \tag{3.2.20}$$

$$P_n \equiv \mathrm{E}[P^* \mid \Omega \cup A]I_a+\mathrm{E}[P^* \mid \Omega \cup B]I_b \tag{3.2.21}$$

$$C_n \equiv \begin{cases} C_a\text{，若交易价格是要价} \\ C_b\text{，若交易价格是出价} \end{cases} \tag{3.2.22}$$

$$Q_n \equiv \begin{cases} +1\text{，若交易价格是要价} \\ -1\text{，若交易价格是出价} \end{cases} \tag{3.2.23}$$

其中，A 代表交易价格为要价的情况，B 代表交易价格为出价的情况。尽管在本书中会经常用到式(3.2.20)的分解形式，但是格劳斯顿(Glosten)的模型里还有一个重要的内容：即 P_n 与 Q_n 的相关。如果 P 是第 n 个交易前公共信息决定的价格，P_n 是第 n 个交易后公共信息决定的价格，格劳斯顿(Glosten)曾证明：

$$\mathrm{Cov}[P_n,Q_n \mid P]=\mathrm{E}[A \mid P]\text{，其中 } A \equiv \begin{cases} A_a \text{ 若 } Q_n=+1 \\ A_b \text{ 若 } Q_n=-1 \end{cases} \tag{3.2.24}$$

由于存在不利选择，所以 P_n 和 Q_n 必定相关。如果 $Q_n=+1$，那么以要价成交的交易是受秘密信息影响的可能性会使 P 的值增大。同理，$Q_n=-1$ 会使 P 的值减小。只有一种情况下 P_n 与 Q_n 不相关，那就是价差中不利选择的部分为 0。

交易价格动态特性的含义

接下来我们考虑交易价格动态特性的含义。在第 $n-1$ 个交易和第 n 个交易之间，把由新的公共信息引起的 P_{n-1} 的变动记为 ε_n。则第 n 个交易价格的形式是：

$$P_n=P_{n-1}+\varepsilon_n+A_nQ_n \tag{3.2.25}$$

对式(3.2.20)作一阶差分，有：

$$\hat{P}_n-\hat{P}_{n-1}=(P_n-P_{n-1})+(C_nQ_n-C_{n-1}Q_{n-1}) \tag{3.2.26}$$

$$=A_nQ_n+\varepsilon_n+(C_nQ_n-C_{n-1}Q_{n-1}) \tag{3.2.27}$$

上式说明交易价格的变动包括"毛利润"和不利选择的补偿费用。交易价格的变动像罗尔(Roll，1984)模型中的买卖价差一样，可以由(3.2.27)式计算得到，而且不利选择的补偿费用则可能始终是它的一个组成部分。所以，格劳斯顿(Glosten)认为有效价差来自毛利润的观点并不是个巧合，因为正是毛利润而非不利选择的补偿费用引起了收益的负序列相关。格劳斯顿(Glosten，1987)还给出了价差和收益的协方差之间可能存在的关系，其中收益的协方差体现了不利选择与毛利润之间的差别。在一定的简化假设下，格劳斯顿(Glosten)得到了下面的结果[①]：

$$\mathrm{E}[\hat{R}_t]=R(1+\gamma\beta)\text{，}\mathrm{Cov}[\hat{\gamma}_{k-1},\gamma_k]=-\frac{\gamma s_p^2}{4} \tag{3.2.28}$$

---

① 格劳斯顿假定：(1)真实收益与过去所有的收益彼此独立。(2)买卖价差关于真实价格对称。(3)毛利润不会在价格中引起条件漂移。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中，$s_p\equiv\frac{P_a-P_b}{(P_a+P_b)/2}$，$\gamma\equiv\frac{C}{C+A}$，$\beta\equiv\frac{s_p^2/4}{1-(s_p^2/4)}$。$\hat{R}_k$，$R$ 分别代表每一时期的市场收益和真实收益。$\hat{\gamma}_k$ 代表每一时期市场收益的连续累积值。

这些关系式表明不利选择的存在（$\gamma<1$）对收益的均值和协方差有影响，而其他的买卖价差模型没有捕捉到这个影响。不利选择部分在经济意义上是否重要在很大程度上还是一个实证上的问题，对此没有定论[①]。然而，格劳斯顿（Glosten）的模型说明，与价差的其他组成部分相比，不利选择的补偿费用使数据的统计特性具有迥然不同的含义。

3.3 交易数据建模

在金融实证研究中，一个最令人激动的进步就是不用花很多钱就能获得交易数据。这个数据库包括：历次的交易价格、交易量、出价、要价、买卖价差及其相应的市场条件。例如，纽约证券交易所的交易报价数据库（TAQ）就包括从 1992 年至今"集成磁带"上记录的所有证券交易的数据。它包括纽约证券交易所（NYSE），美国证券交易所（AMEX），纳斯达克（NASDAQ）和其他地区交易所中所有的交易数据。Berkeley 期权数据库也提供类似的期权交易数据。随着人们对市场微观结构的兴趣越来越浓厚，其他证券和市场的交易数据库也在进一步发展和完善。

这些交易数据库为金融经济学家研究各种关于交易过程的细微结构的问题提供了素材。例如，买卖价差中的决定性因素是什么？在解释做市商的交易行为时，与盘存成本相比不利选择的补偿费用是不是一个更重要的因素？[②] 交易行为会影响交易价格吗？如果有影响，那么影响效果有多大，它是如何随交易规模而变化的？[③] 交易价格为什么更倾向于集中在 1 美元的倍数而不是 0.5 美元的倍数上？为什么更倾向于集中在 0.5 美元的倍数而不是 0.25 美元的倍数上？[④] 市场微观结构的其他特点（如保证金标准，市场竞争的

---

① 近来的一些研究试图量化指令处理费用、盘存成本和不论选择的补偿费用对价差的相对贡献。这些研究包括艾弗勒克—格雷夫斯、海杰和米勒（Affleck-Graves, Hegde and Miller, 1994），格劳斯顿和哈里斯（Glosten and Harris, 1988），乔治、考尔和尼麦棱德端（George, Kaul and Nimalendran, 1991），华恩和斯托尔（Huang and Stoll, 1995a），斯托尔（Stoll, 1989）。进一步的讨论见第 3.4.2 节。

② 见埃米赫德和蒙德尔森（Amihud and Menderson, 1980），巴吉霍特（Bagehot, 1971），科伯兰德和加莱（Copeland and Galai, 1983），德莫塞茨（Demsetz, 1968），埃斯利和奥哈拉（Easley and O'Hara, 1987），格劳斯顿（Glosten, 1987），格劳斯顿和哈里斯（Glosten and Harris, 1988），格劳斯顿和米尔格罗姆（Glosten and Milgrom, 1985），霍和斯托尔（Ho and Stoll, 1981），斯托尔（Stoll, 1978, 1989）和蒂尼克（Tinic, 1972）。

③ 见伯特西玛斯和罗（Bertsimas and Lo, 1996），查恩和拉科尼斯霍克（Chan and Lakonishok, 1993b, 1995），坎姆和麦德哈瓦（Keim and Madhavan, 1995a, b, 1996）。

④ 见鲍尔，托劳斯和楚杰尔（Ball, Torous and Tschoegl, 1985）；克里斯蒂，哈里斯和舒尔茨（Christie, Harris and Schultz, 1994）；克里斯蒂和舒尔茨（Christie and Schultz, 1994）；戈德哈特和柯西奥（Goodhart and Curcio, 1990）；哈里斯（Harris, 1991）；尼德霍斐（Niederhoffer, 1965、1966）；尼德霍斐和奥斯鲍恩（Niederhoffer and Osborne, 1966）；奥斯鲍恩（Osborne, 1962）。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

激烈程度，结算频率和证券在一天内的易变性）会给交易者带来什么益处或使交易者付出什么代价？[①] 虽然近期的文献都研究过这些问题，但是由于有了交易数据库，我们能提供的解答已经有了戏剧性的变化。甚至事件研究方法（传统上是使用日收益数据）最近也被用来研究交易数据以筛选出在一天之内信息的公布所产生的影响[如见拜尔雷和利曾伯格（Barelay and Lizenberger，1988）]。

建立这些庞大的数据库是要付出代价的。由于交易数据库十分庞大，所以分析和处理它们也相当困难。比如，在 1994 年，纽约证券交易所里就进行了4 900万笔交易。对每一笔交易，纽约证券交易所的交易与报价（TAQ）数据库都记录了出价、要价、买卖价差、交易时间、交易价格、交易量以及交易的各方面情况。仅一年内单个证券的交易观测值就达 100 000 个的情况也是常见的。

3.3.1 建模动机

交易数据在计量经济学方面提出了许多新的挑战，这些问题不适合我们迄今为止已经建立起来的框架体系。比如说，交易是随机发生的，所以交易数据的时间间隔的大小也是随机的，这就对标准的数量经济学模型提出了疑问。首先，观测值不可能是同分布的，因为有的观测值在时间上很接近，而另外一些观测值可能彼此间隔几个小时或几天。其次，只用简单的指示函数很难捕捉到季节的影响。而且，因为交易时间是随机的，所以也不能直接进行预测。

此外，交易价格的报价单位也是离散的：目前股票的报价单位是 0.125 美元，标准普尔 500 指数的期货契约是 0.05 美元，美国国库中长期债券是0.031 25美元。虽然事先在理论上没有排除连续价格的理由，但是与报价和处理过程相关的交易费用却使得连续价格是不可行的[②]。当然，离散性对于抽样间隔长的数据来说不是个大问题，因为我们可以用一个连续过程来产生这些数据的良好的近似值。但是，离散性对交易价格变动的影响很大，因为抽样间隔小的价格变动一般只有几个不同的值。比如，《纽约证券交易所：1994 年数据》一书中提到：1994 年，所有在纽约证券交易所里发生的交易中有 97.4%的交易价

---

① 见科汗、梅伊尔、施瓦茨和惠特库姆（Coher，Mairer，Schwartz and Whitecomb，1986），哈里斯、索菲亚诺斯和夏皮罗（Harris，Sofianos and Shapiro，1994），哈斯布罗克（Hasbrouck，1991a，b），麦德哈瓦和斯米德特（Madhavan and Smidt，1991），斯托尔和惠利（Stoll and Whaley，1990）。

② 尽管伴随着价格的离散性还有交易品的不可分割性，但是经济学家和从业人员一致认为从离散价格中获得的有效收益大于不可分割的交易品的潜在费用。但是，一个尚未解决的问题是最优离散度的确定，即在不可分割的费用与离散性的益处之间的平衡点。例如，在纽约证券交易所，价格大于或等于 1 美元的股票的最小价格变动是 0.125 美元。但是这个最小的价格变动早在高速的数字计算机和相应的交易机制出现之前就已经设定了。现在还不清楚 0.125 美元是不是一个最优的离散度。纽约证券交易所和美国证券交易所委员会之间的讨论似乎是建立十进制价格体系的一个步骤。在十进制价格体系中，报价和交易价格都以美分表示。进一步的讨论见鲍尔、托劳斯和楚杰尔（Ball，Torous and Tschoegl，1985）；布里恩南和科珀兰德（Brennan，and Copeland，1988）；哈里斯（Harris，1991）以及 SEC（1994）的《市场 2000》。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

格没有变动或只有一个小单位的变动。而且，豪斯曼、罗和麦金雷（Hausman，Lo and MacKinlay，1992）曾证明：超过 4 个报价单位的价格变动是很少见的。

表 3.1　纽约证券交易所的股票日收益的概括统计量

统计量	AAC	APD	CBS	CCB	KAB
P_{max}	5.250	86.750	216.500	629.750	7.250
P_{min}	1.375	40.625	129.000	360.250	2.875
$\overline{P}$	3.353	55.878	173.924	467.844	4.665
$\hat{\sigma}(p)$	0.811	11.380	18.877	53.251	0.816
r_{max}(%)	21.43	6.48	6.58	4.94	16.13
r_{min}(%)	−14.29	−5.49	−7.83	−9.43	−12.50
$\overline{R}$(%)	0.12	0.11	0.02	−0.00	0.00
$\hat{\sigma}(R)$(%)	4.88	1.61	1.45	1.46	3.48

注：表中数据为 1990 年 1 月 2 日至 1992 年 12 月 31 日纽约证券交易所的五只股票日收益的概括统计量。其中，AAC=Anacomp；APD=Air Products and Chemicals；CBS=Columbia Broadcasting System；CCB=Capital Cities ABC；KAB=Kaneb Services。

离散性与价格

报价单位的离散性既影响证券的价格也影响证券的收益，但影响方式不同。一些研究已经证明了证券价格的聚类现象，即证券价格更频繁地集中在某些值上[①]。例如，图 3.2a是 1990 年 1 月 2 日～1992 年 12 月 31 日三年间，纽约证券交易所的五只股票日收益的小数部分的直方图。这五只股票是：Anacomp(AAC)；Air Products and Chemicals(APD)；Columbia Broadcasting System(CBS)；Capital Cities ABC(CCB)；Kaneb Services(KAB)。CBS 的直方图很好地刻画了典型的价格聚类的模式：收盘价更倾向于集中在 1 美元的倍数而不是 0.5 美元的倍数上；更倾向于集中在 0.5 美元的倍数而不是 0.25 美元的倍数上；更倾向于集中在 0.25 美元的偶数倍而不是奇数倍上。证券交易价格的聚类现象更为明显。

最近，围绕克里斯蒂和舒尔茨(Christie and Schultz，1994)以及克里斯蒂、哈里斯和舒尔茨(Christie，Harris and Schultz，1994)的两个实证研究结果而产生的争论和诉讼突出了这些离散模式的重要性。研究者认为，纳斯达克股票的出价和要价更加频繁地集中在 0.125 美元的偶数倍而不是奇数倍的现象表明：纳斯达克股票交易市场的交易者心照不宣地彼此勾结，以保持较大的买卖价差。当然，纳斯达克交易所的市场结构和其他交易所的市场结构差别很大，而且还需要更详细的分析才能确定这个差别能否解释由克里斯

① 见鲍尔、托劳斯和楚杰尔(Ball，Torous and Tschoegl，1985)；戈德哈特和柯西奥(Goodhart and Curcio，1990)；哈里斯(Harris，1991)；尼德霍斐(Niederhoffer，1965，1966)；尼德霍斐和奥斯鲍恩(Niederhoffer and Osborne，1966)；奥斯鲍恩(Osborne，1962)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

蒂和舒尔茨(Christie and Schultz,1994)以及克里斯蒂、哈里斯和舒尔茨(Christie,Harris and Schultz,1994)证明的实证规律。虽然这场争论的结果还没有出来,但是有关各方都认为报价单位的离散性对证券市场有重大影响①。

离散性与证券收益

离散性与证券收益在实证上的相关性在很大程度上依赖于持有期和价格水平,其中的原因我们将在下面讨论。对于交易数据来说,离散性是一个相当大的问题,因为交易价格的变动一般是一或两个报价单位。例如,如果最小的价格变动是 0.125 美元,那么一只价格为 10 美元的股票产生的交易收益绝不会在 0 到±1.25%之间。实际上,在这种情况下,交易收益肯定是 1.25%的倍数。对于价格高的股票来说,价格的变动单位可能会更小。比如,一只价格为 50 美元的股票的交易收益可能是 0.25%的倍数。而且,当价格自始至终都在变化的时候,交易收益总体的离散性可能不很明显,因为整个数据集的变动单位是各个价格水平的变动单位的叠加。

所以,如果股票的价格高而且变动频繁,或者数据集的时间跨度长(这意味着在价格服从随机游走模型的前提下,价格具有更高的易变性),那么交易收益的离散性就不明显。

表 3.2 给出了一个具体的例子。表中的数据是图 3.2 中列出的五只股票在 1991 年里所有交易价格的相对变动频率。

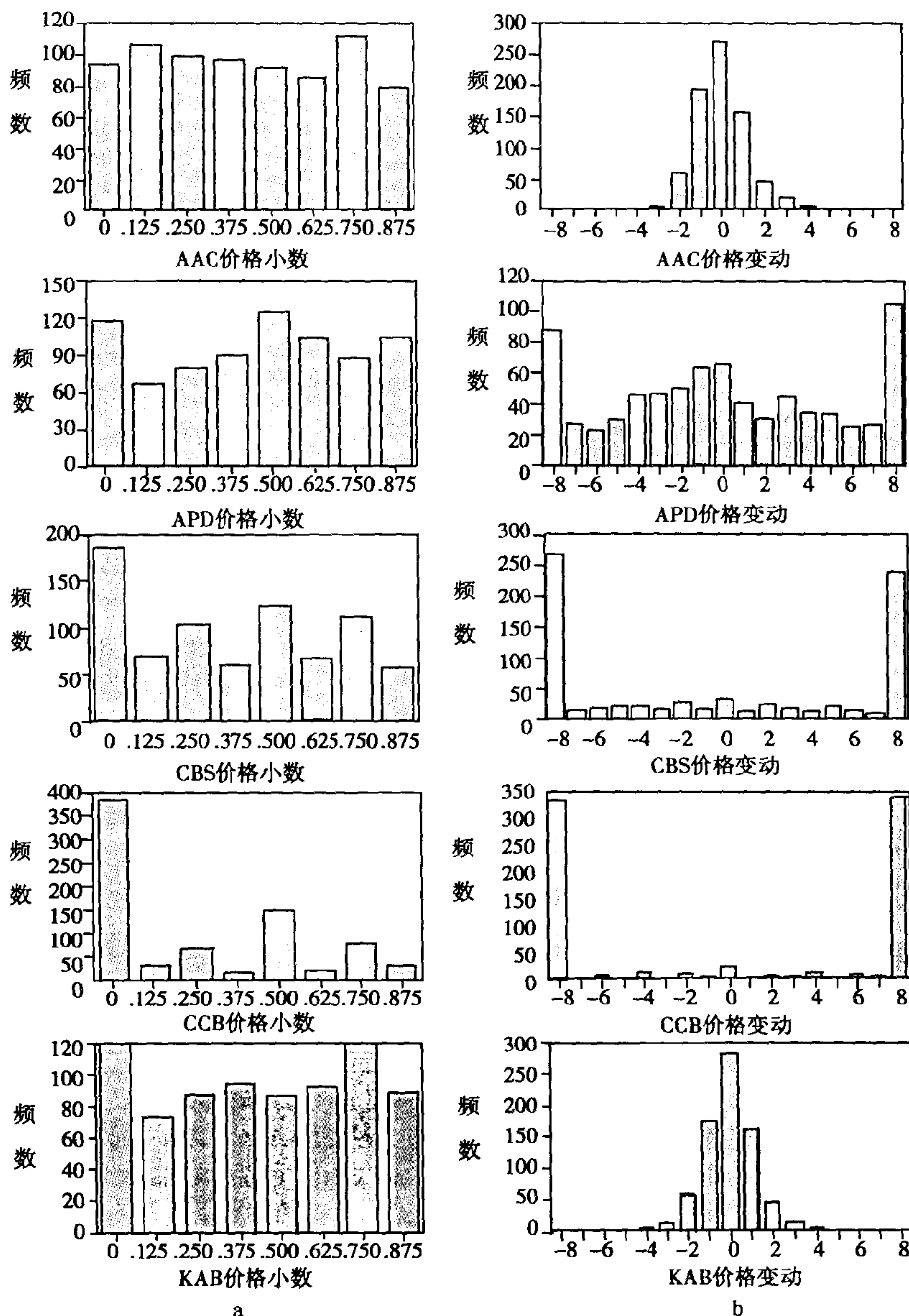
表 3.2 五只股票的价格相对变动频数

股票	交易数	≤−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	≥+4
AAC	18 056	0.02	0.03	0.17	12.44	74.34	12.58	0.18	0.04	0.18
APD	26 905	0.32	0.41	3.22	13.48	64.40	14.23	3.14	0.41	0.39
CBS	21 315	2.24	6.64	7.35	7.26	52.42	7.93	7.42	6.31	2.43
CCB	23 128	15.72	0.70	1.69	3.90	55.11	4.56	1.89	0.58	15.85
KAB	21 008	0.01	0.00	0.16	11.77	75.79	12.04	0.15	0.00	0.07

注:表中数据为纽约证券交易所的五只股票在 1991 年里所有交易价格的变动以 0.125 美元划分信用区间时,其各自的相对变动频数(以百分比表示)。这五只股票是:AAC=Anacomp; APD=Air Products and Chemicals; CBS=Columbia Broadcasting System; CCB=Capital Cities ABC; KAB=Kaneb Services。

① 关于纳斯达克争论的其他文献包括:查恩、克里斯蒂和舒尔茨(Chan,Christie,and Schultz,1995),弗巴西和史密斯(Furbush and Smith,1976),戈德克(Godek,1996),格罗斯曼、米勒、费利兹、科恩和罗斯(Grossman,Miller,Fischel,Cone and Ross,1995),华恩和斯托尔(Huang and Stoll,1995b),坎德尔和马克斯(Kandel and Marx,1996)及克雷顿和威利格(Kleidon and Willig,1995)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net



注：(a) 频率——AAC 价格的小数部分；(b) 频率——AAC 的价格变动。

图 3.2 纽约证券交易所的五只股票日价的小数部分和价格变动的直方图（1990 年 1 月 2 日～1992 年 12 月 31 日）

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

价格较低的股票 KAB 和 AAC 的交易价格的变动很少超过±1 个信用区间。KAB 和 AAC 在这个区间内的价格变动分别占 99.6%和 99.3%。相比之下，价格较高的股票如 CCB(在 1991 年的价格是 468 美元)在±1 个信用区间内的价格变动仅占 63.6%。对 CCB 来说，虽然离散性不太明显，但仍然存在。从图 3.2b 的日价变动的直方图也可看出，离散性仍然有重要的影响，特别是对于像 KAB 和 AAC 这样低价格的股票。

而且，即使离散性在高频收益的无条件分布或边际分布中不易被察觉，但它在条件分布和联合分布中可能会十分明显。例如，图 3.3a 绘出的是：从 1990 年 1 月 2 日至 1992 年 12 月 31 日，表 3.1 中列出的五只股票各自的相邻收益(R_t，R_{t+1})的图形。这种“m 个过程图”(这里，$m=2$)经常被用来检测非线性动态系统的结构(见第 12 章)。为了能对五只股票进行比较，(a)，(b)，(c)三组内坐标轴刻度单位完全相同。图 3.3a 中的坐标轴的刻度是从－5%～5%；图 3.3b 是从－10%～10%；图 3.3c 是从－20%～20%。

图 3.3a 表明价格较低的股票(KAB 和 AAC)的连续收益中明显存在辐射状对称结构，造成这一现象的惟一原因是离散性。相比之下，价格较高的股票(CBA 和 CCB)的收益中没有明显的结构特征。由于 APD 的价格介于其余四只股票之间，所以它的“连续收益图”中的结构特征比低价格的股票弱，但比高价格的股票强。

图 3.3b 和图 3.3c 表明改变坐标轴的刻度单位通常会削弱与离散性有关的结构特征，甚至会完全掩盖这些特征(如 APD 的情况)。有关这方面的详细讨论，参见柯雷克和莱道伊特(Crack and Ledoit，1996)。

以上这些通过观察得到的结论就是下面几个关于价格离散性模型的建模动机。在下面几节中我们将讨论这些模型各自的优缺点。

3.3.2 取整模型和栅栏模型

许多关于价格离散性的模型都首先假定一个“真实的”但不可观测的连续价格过程 P_t，然后通过对 P_t 进行某些方式的“离散化”来获得观测价格 P_t^o[见鲍尔(Ball，1988)，周和弗里斯(Cho and Frees，1988)，戈特利亚伯和凯雷(Gottlib and Kalay，1985)]。虽然这种假定可能是一个比较好的切入点，但是称 P_t 为“真实的”连续价格过程是不恰当的，因为这就隐含着观测到的离散价格是真实价格的近似。而实际上却恰恰相反：连续价格模型是离散的市场价格的近似。如果忽视连续价格模型中固有的误差，就会得出错误的推论，特别对交易数据来说更是如此[①]。

① 至于哪一个价格是“真实的”价格，这对于离散模型的统计特性来说并不是一个决定性的问题。毕竟，到底哪一个价格是另一个价格的近似只会影响到近似误差的符号，而对绝对值没有影响——但是这个问题对于建模动机和对结论的解释非常重要(见第 3.3.2 节最后的讨论)。所以，虽然我们在本文中仍然采用这个术语，但是读者在阅读这部分时应当始终记住这个术语的歧义性。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

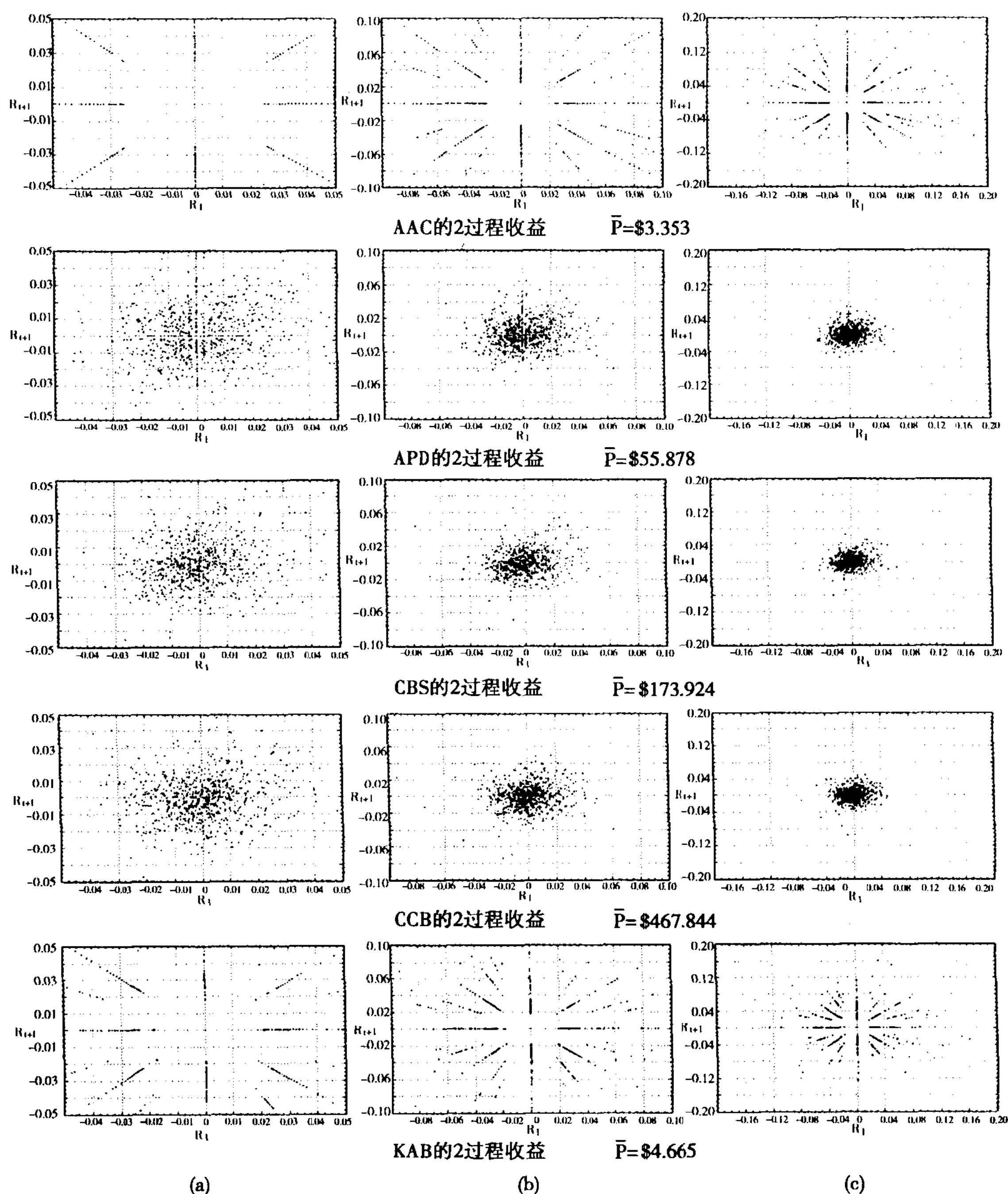


图 3.3 纽约证券交易所的五只股票日收益的相邻收益图

(1990 年 1 月 2 日～1992 年 12 月 31 日)

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

取整误差

为了形成关于近似误差的概念，我们令 X_t 代表连续价格过程 P_t 从 $t-1$ 到 t 时刻的毛收益，即 $X_t \equiv P_t/P_{t-1}$。下面我们通过比较 X_t 和对应离散价格过程 P_t^0 的 $X_t^0 \equiv P_t^0/P_{t-1}^0$ 来度量离散性的影响。

对 P_t 进行离散化的最常用的方法就是将其调整为 d 的倍数，其中 d 是最小的价格增量。这里我们引入下取整和上取整函数：

$$\lfloor x \rfloor \equiv \text{小于等于 } x \text{ 的最大整数(下取整函数)} \tag{3.3.1}$$

$$\lceil x \rceil \equiv \text{大于等于 } x \text{ 的最小整数(上取整函数)} \tag{3.3.2}$$

其中，x 为任意实数[①]。利用式(3.3.1)和式(3.3.2)，我们可以把三种最常用的离散化方法表示为：

$$P_t^0 = \left\lfloor \frac{P_t}{d} \right\rfloor d \tag{3.3.3}$$

$$P_t^0 = \left\lceil \frac{P_t}{d} \right\rceil d \tag{3.3.4}$$

$$P_t^0 = \left\lfloor \frac{P_t}{d} + \frac{1}{2} \right\rfloor d \tag{3.3.5}$$

其中，第一种方法将 P_t 下调为整数，第二种方法将 P_t 上调为整数，第三种方法将 P_t 调整为最接近的 d 的倍数。为了简化讨论，我们只考虑(3.3.3)式的离散化方法，当然我们的讨论也能很容易地扩展到其他的两种方法上。

离散性问题的核心是连续价格的收益 X_t 与离散价格的收益 X_t^0 之间的差别。要理解这两者之间的差别，我们先构造 $|X_t^0 - X_t| = |R_t^0 - R_t|$ 的上界，其中 R_t 和 R_t^0 分别代表连续价格过程和离散价格过程的净收益。令 x 和 y 为两个任意的非负实数且 $y>1$，有：

$$\frac{x-1}{y} < \frac{\lfloor x \rfloor}{\lfloor y \rfloor} < \frac{x}{y-1} \tag{3.3.6}$$

(3.3.6)式减去 x/y 有：

$$-\frac{1}{y} < \frac{\lfloor x \rfloor}{\lfloor y \rfloor} - \frac{x}{y} < \frac{x}{y(y-1)} \tag{3.3.7}$$

即有下列不等式成立：

$$\left| \frac{\lfloor x \rfloor}{\lfloor y \rfloor} - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y} \mathrm{Max}\left[\frac{x}{y-1}, 1 \right] \tag{3.3.8}$$

假定对所有的 t，$P_t > d$。令 $x \equiv P_t/d$，$y \equiv P_{t-1}/d$ 并代入(3.3.8)式，可得到下面的上界：

$$|R_t^0 - R_t| < \frac{\delta_{t-1}}{1-\delta_{t-1}} \mathrm{Max}[X_t, 1-\delta_{t-1}] \equiv L(X_t, \delta_{t-1}) \tag{3.3.9}$$

---

① 关于这些整型函数的特性和进一步的应用见格拉汉、克纳斯和帕塔希尼克(Graham, Knuth and Patashnik, 1989，第 3 章)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中，$\delta_{t-1}\equiv d/P_{t-1}$，其定义为 $t-1$ 时刻的“格栅粒度”。

虽然(3.3.9)式是一个严格的不等式，但 $L(X_t,\delta_{t-1})$ 实际上是 $|R_t^0-R_t|$ 的最小上界。因为对任何给定的 d 和任意的 $\epsilon>0$，都存在 P_{t-1} 和 X_t 的某种组合使得 $|R_t^0-R_t|$ 大于 $L(\delta,X_t,P_{t-1})-\epsilon$。所以，(3.3.9)式度量的是 R_t^0 偏离 R_t 的最小上界。

注意，由于 L 依赖 r_t，所以 L 不是 r_t 的一致上界，则：

$$L(X_t,\delta_{t-1})=\frac{\delta_{t-1}}{1-\delta_{t-1}}\left\{1+\mathrm{Max}[R_t,-\delta_{t-1}]\right\} \tag{3.3.10}$$

不过，当价格和收益变化时，(3.3.9)式还是提供了一个度量离散性对收益的影响程度的有用指标。例如，(3.3.9)式表明对价格高的股票来说，离散性不是一个大问题。因为 L 是 δ_{t-1} 的增函数 P_{t-1} 的减函数。

一定要记住(3.3.9)式给出的只是一个上界，虽然这个上界提供了度量 R_t^0 和 R_t 之间最大差别的方法，但并不是 R_t^0 与 R_t 的差①。只要认识到上界的期望值 $\mathrm{E}[L(X_t,\delta_{t-1})|\delta_{t-1}]$ 是 X_t 的均值和方差的增函数，这一点就很好理解。可是上界的期望值随着 X_t 的均值和方差增大而增大的情况似乎与前面的分析结果相悖。因为一般认为离散性对长期收益的影响较小，而这些长期收益又具有较大的均值和方差。但是要注意，虽然上界的期望值随均值和方差的增大而增大，可 $|R_t^0-R_t|$ 的值接近上界的可能性实际上在减小，也就是说，R_t^0 与 R_t 的差距增大的可能性更小了。除此之外，我们下面就要看到，上界的期望值似乎对 X_t 的均值和方差的变化不太敏感，所以用占期望收益 $\mathrm{E}[X_t]$ 的百分比来度量上界的期望值时，长期收益的上界期望值的确在减小。

通过指定 P_t 服从某个特殊的过程，我们可以估计出 $L(\cdot)$ 的期望值，并以此来加深对离散偏差期望值 $\mathrm{E}[|R_t^0-R_t|]$ 的大小的理解。例如，假定 P_t 服从几何随机游走过程，漂移量为 μ，扩散系数为 σ。那么，$\log P_t/P_{t-1}$ 是独立同分布的正态随机变量，其均值是 μ，方差是 σ^2。并有下式成立：

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[L(d,X_t,P_{t-1})|P_{t-1}]\\&=\frac{\delta}{1-\delta}\left\{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\Phi\left(-\frac{\log(1-\delta)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\log(1-\delta)-\mu}{\sigma}\right)\right\}\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

其中，$\Phi(\cdot)$ 是正态累积分布函数②。

取 $P_{t-1}=1$ 美元，5 美元，10 美元，50 美元，100 美元和 200 美元；收益的年均值 μ 和标准误 σ 的取值范围分别是 10%～50%，并对 μ 和 σ 进行变换以得到日收益，月收益和年

---

① 最理想的情况是直接刻画 $|R_t^0-R_t|$，但这样做会使任何程度的进一步推广都变得十分困难。不过，下面关于取整模型和栅栏模型的讨论(对 X_t 有特定的参数假设)更精确地描述了离散性的特征。

② 注意(3.3.11)式与布莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)的买入期权定式公式的相似性。这种相似并非偶然，因为 $\mathrm{Max}[X_t,1-\delta]$ 可写作 $\mathrm{Max}[X_t-(1-\delta),0]+1-\delta$；所以可以把上界看作是履约价为 1 的 X_t 的买入期权的结算。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

收益的均值和标准误。将这些值代入(3.3.9)式，得到离散偏差上界的期望值，分别如表 3.3a～3.3c所示。

在表 3.3a 中，当股票价格是 1 美元时，离散偏差上界的期望值近似为 14%，是一个相当大的偏差。然而，股票价格上升到 50 美元时，上界的期望值下降到了 0.25%；当股票价格达到 200 美元时，上界的期望值为 0.06%，是一个非常小的偏差。这些上界为图 3.3a～3.3c的例子和离散性对价格高的股票影响较小的直观印象提供了理论基础。表 3.3a 还表明：股票日收益的均值和标准误的变化对上界的大小几乎没有影响。

表 3.3b 和 3.3c 表明离散偏差的大小比较稳定，只随着收益期间的加长略有增大。当 $P_{t-1}=5$ 美元时，日收益的上界期望值是 2.5%左右，但年收益的上界期望值的范围是 2.8%～3.9%。这说明随着收益期间的加长，离散偏差作为持有期收益的一部分，其重要性也大大降低。所以，年收益的均值和标准误的变化对上界期望值的影响更大一些。

取整模型

即使 $\mathrm{E}[|R_t^0-R_t|]$很小，P_t^0 的统计特性也明显不同于 P_t。如果离散性是数据不可避免的一个特点，那么有必要为离散的价格序列建立一个统计模型。我们在前面已经提到，根据取整模型，可以由取整过程的观测值推导出连续过程的参数。许多关于取整模型的文献都假定 P_t 服从几何布朗运动：$dP=\mu Pdt+\sigma PdW$，而且最终的目的是根据观测价格过程 P_t^0 估计出 μ 和 σ。显然，根据连续累计观测收益求得的标准误的估计量 $\hat{\sigma}$ 是 σ 的一致估计，并依概率收敛到 $\sqrt{\mathrm{E}[(\log P_{t+1}^0-\log P_t^0)^2]}$，而不是 $\sqrt{\mathrm{E}[(\log P_{t+1}-\log P_t)^2]}$。而且，可以证明由于存在价格的离散性，$\hat{\sigma}$ 是 σ 的过度估计量。(参见鲍尔[Ball，1988，表1])，戈特利亚伯和凯雷[Gottlieb and Kalay，1985，表 I]关于这种上偏的近似值。)鲍尔(Ball，1988)，周和弗里斯(Cho and Frees，1988)，戈特利亚伯和凯雷(Gottlieb and Kalay，1985)，哈里斯(Harris，1990)的论文中有根据观测价格过程 P_t^0 求得 σ 的一致估计的方法①。

表 3.3a 离散偏差上界的期望值(日收益)

m	$s=10\%$	$s=20\%$	$s=30\%$	$s=40\%$	$s=50\%$
$P_{t-1}=\$1$					
10%	14.289 5	14.289 5	14.289 5	14.289 5	14.289 5
20%	14.293 0	14.293 0	14.293 0	14.293 0	14.293 0
30%	14.296 1	14.296 1	14.296 1	14.296 1	14.296 1
40%	14.299 1	14.299 1	14.299 1	14.299 1	14.299 1
50%	14.301 8	14.301 8	14.301 8	14.301 8	14.301 8

① 有关建模动机的限制条件见第 3.3.2 节最后一部分的讨论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

m	$s=10\%$	$s=20\%$	$s=30\%$	$s=40\%$	$s=50\%$
$P_{t-1}=\$5$					
10%	2.564 8	2.565 0	2.567 6	2.572 1	2.577 2
20%	2.565 4	2.565 5	2.567 2	2.570 9	2.575 5
30%	2.566 0	2.566 0	2.567 1	2.570 1	2.574 1
40%	2.566 5	2.566 5	2.567 2	2.569 5	2.573 0
50%	2.567 0	2.567 0	2.567 4	2.569 2	2.572 1
$P_{t-1}=\$50$					
10%	0.251 1	0.251 6	0.252 0	0.252 5	0.252 9
20%	0.251 1	0.251 5	0.252 0	0.252 4	0.252 8
30%	0.251 1	0.251 5	0.251 9	0.252 3	0.252 7
40%	0.251 1	0.251 5	0.251 8	0.252 2	0.252 6
50%	0.251 1	0.251 4	0.251 8	0.252 1	0.252 5
$P_{t-1}=\$100$					
10%	0.125 4	0.125 6	0.125 9	0.126 1	0.126 3
20%	0.125 4	0.125 6	0.125 8	0.126 0	0.126 2
30%	0.125 4	0.125 6	0.125 8	0.126 0	0.126 2
40%	0.125 4	0.125 6	0.125 8	0.126 0	0.126 1
50%	0.125 4	0.125 6	0.125 7	0.125 9	0.126 1
$P_{t-1}=\$200$					
10%	0.062 7	0.062 8	0.062 9	0.063 0	0.063 1
20%	0.062 7	0.062 8	0.062 9	0.063 0	0.063 1
30%	0.062 7	0.062 8	0.062 9	0.063 0	0.063 1
40%	0.062 7	0.062 8	0.062 8	0.062 9	0.063 0
50%	0.062 7	0.062 8	0.062 8	0.062 9	0.063 0

注：表中的数据是离散偏差$|R_t^0-R_t|\times 100$的上界期望值。假定P_t服从几何随机游走过程，其中漂移量μ和σ扩散系数σ分别取收益的年均值m和标准误s，m和s的变动范围均为10%～50%。再对μ和σ进行变换以使其与日收益数据相一致：$\mu/360,\sigma/\sqrt{360}$。离散化的价格$P_t^0\equiv\lfloor P_t/d\rceil d$，$d=0.125$，收益$R_t^0\equiv(P_t^0/P_{t-1}^0)-1$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 3.3b　离散偏差上界的期望值(月收益)

m	s=10%	s=20%	s=30%	s=40%	s=50%
P_{t-1}=\$1					
10%	14.399 6	14.406 7	14.478 8	14.611 7	14.762 6
20%	14.504 4	14.506 4	14.546 2	14.644 9	14.772 3
30%	14.601 5	14.601 9	14.621 9	14.690 7	14.794 4
40%	14.691 9	14.692 0	14.701 1	14.746 2	14.827 2
50%	14.776 7	14.776 7	14.780 4	14.808 1	14.868 8
P_{t-1}=\$5					
10%	2.594 5	2.622 8	2.650 1	2.675 9	2.700 4
20%	2.607 5	2.630 0	2.654 5	2.678 2	2.701 0
30%	2.622 2	2.638 5	2.659 9	2.681 6	2.702 7
40%	2.637 4	2.648 2	2.666 4	2.685 9	2.705 3
50%	2.652 3	2.658 9	2.673 8	2.691 1	2.708 8
P_{t-1}=\$50					
10%	0.254 4	0.256 9	0.259 4	0.261 9	0.264 2
20%	0.255 4	0.257 6	0.259 9	0.262 1	0.264 3
30%	0.256 6	0.258 4	0.260 4	0.262 4	0.264 5
40%	0.258 0	0.259 3	0.261 0	0.262 9	0.264 7
50%	0.259 3	0.260 2	0.261 7	0.263 4	0.265 1
P_{t-1}=\$100					
10%	0.127 0	0.128 3	0.129 6	0.130 8	0.131 9
20%	0.127 6	0.128 6	0.129 8	0.130 9	0.132 0
30%	0.128 2	0.129 0	0.130 0	0.131 1	0.132 1
40%	0.128 8	0.129 5	0.130 4	0.131 3	0.132 2
50%	0.129 5	0.130 0	0.130 7	0.131 5	0.132 4
P_{t-1}=\$200					
10%	0.063 5	0.064 1	0.064 7	0.065 3	0.065 9
20%	0.063 7	0.064 3	0.064 8	0.065 4	0.065 9
30%	0.064 0	0.064 5	0.065 0	0.065 5	0.066 0
40%	0.064 4	0.064 7	0.065 1	0.065 6	0.066 1
50%	0.064 7	0.064 9	0.065 3	0.065 7	0.066 1

注：表中的数据是离散偏差$|R_t^0-R_t|\times 100$的上界期望值。假定P_t服从几何随机游走过程，其中漂移量μ和扩散系数σ分别取收益的年均值m和标准误s，m和s的变动范围均为10%～50%。再对μ和σ进行变换以使其与日收益数据相一致：$\mu/12$，$\sigma/\sqrt{12}$。离散化的价格，$P_t^0\equiv\lfloor P_t/d\rceil d$，$d$=0.125，收益$R_t^0\equiv(P_t^0/P_{t-1}^0)-1$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 3.3c　离散偏差上界的期望值(年收益)

m	$s=10\%$	$s=20\%$	$s=30\%$	$s=40\%$	$s=50\%$
$P_{t-1}=\$1$					
10%	15.728 5	16.049 8	16.542 4	17.043 9	17.524 7
20%	17.143 0	17.229 7	17.532 0	17.928 8	18.347 8
30%	18.571 4	18.585 7	18.722 1	18.988 9	19.320 3
40%	20.000 0	20.001 4	20.046 4	20.195 7	20.429 9
50%	21.428 6	21.428 6	21.439 6	21.508 0	21.654 1
$P_{t-1}=\$5$					
10%	2.837 2	2.910 5	2.995 8	3.081 5	3.164 4
20%	3.077 8	3.107 6	3.167 7	3.238 5	3.311 8
30%	3.333 3	3.340 7	3.373 6	3.424 8	3.484 6
40%	3.589 7	3.590 9	3.604 6	3.636 4	3.680 7
50%	3.846 2	3.846 3	3.850 6	3.867 3	3.896 8
$P_{t-1}=\$50$					
10%	0.277 5	0.284 6	0.292 9	0.301 3	0.309 4
20%	0.300 9	0.303 9	0.309 7	0.316 6	0.323 8
30%	0.325 8	0.326 6	0.329 8	0.334 8	0.340 7
40%	0.350 9	0.351 0	0.352 4	0.355 5	0.359 8
50%	0.375 9	0.376 0	0.376 4	0.378 0	0.380 9
$P_{t-1}=\$100$					
10%	0.138 6	0.142 1	0.146 3	0.150 5	0.154 5
20%	0.150 2	0.151 7	0.154 7	0.158 1	0.161 7
30%	0.162 7	0.163 1	0.164 7	0.167 2	0.170 1
40%	0.175 2	0.175 3	0.176 0	0.177 5	0.179 7
50%	0.187 7	0.187 7	0.188 0	0.188 8	0.190 2
$P_{t-1}=\$200$					
10%	0.069 2	0.071 0	0.073 1	0.075 2	0.077 2
20%	0.075 1	0.075 8	0.077 3	0.079 0	0.080 8
30%	0.081 3	0.081 5	0.082 3	0.083 6	0.085 0
40%	0.087 6	0.087 6	0.087 9	0.088 7	0.089 8
50%	0.093 8	0.093 8	0.093 9	0.094 3	0.095 1

注：表中的数据是离散偏差$|R_t^0-R_t|\times 100$的上界期望值。假定P_t服从几何随机游走过程，其中漂移量μ和扩散系数σ分别取收益的年均值m和标准误s，m和s的变动范围均为10%～50%。离散化的价格$P_t^0\equiv\lfloor P_t/d\rceil d$，$d=0.125$，收益$R_t^0\equiv(P_t^0/P_{t-1}^0)-1$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

栅栏模型

周和弗里斯(Cho and Frees,1988),马歇和罗森斐尔德(Marsh and Rosenfeld,1986)还提出了一些极为类似但又稍有不同的离散价格模型,我们称之为栅栏模型。在这些模型中,所谓"真正的"价格 P_t 还是一个连续过程。当 P_t 等于某些值(这些值亦称为"栅栏")时,就发生了我们所观测到的交易。

马歇和罗森斐尔德(Marsh and Rosenfeld,1986)把这些"栅栏"设定为 1/8 美元的倍数。所以若上一次交易的价格是 $40\frac{2}{8}$ 美元,那么到下一次交易的等待时间是 P_t 从一个"栅栏"$\left(40\frac{2}{8}\right)$移动到另一个"栅栏"$\left(40\frac{3}{8}\right)$所花的时间(假定 P_t 是正向漂移)。

周和弗里斯(Cho and Frees,1988)则把注意力放在毛收益而不是证券的价格上。他们定义了交易停止时刻 τ_n:

$$\tau_n \equiv \inf_t \left\{ t > \tau_{n-1} : \frac{P_t}{P(\tau_{n-1})} \notin \left(\frac{1}{1+d}, 1+d \right) \right\} \tag{3.3.12}$$

因此,根据他们的模型,在 τ_{n-1} 时刻以 10.000 美元成交的股票将会在 τ_n 时刻再次交易,其中 τ_n 时刻不可观测的连续过程的毛收益 $P_t/10.000$ 等于 1.125 或 1/1.125,即 P_t 是 10.125 美元或 8.888 美元。如果 P_t 是 8.888 美元,那么股票再一次交易的时候 P_t 就是 10.000 美元或 7.901 美元。其他的情况以此类推。

这个模型刻画了另一种类型的价格离散性,因为由交易停止时刻定义的价格增量不是任何固定数量的整倍数(例如,1/1.125 并不对应价格降低 1/8 美元)。不过,因为 τ_{n-1} 的一阶差分独立同分布,所以这种对离散性的定义方式极大地简化了交易停止次数的特性和对 P_t 的参数的估计。

比较常见,而未被邱和弗里斯(Cho and Frees, 1988)论及的交易停止时刻的定义形式是:

$$\tau_n^* = \inf_t \left\{ t > \tau_{n-1} : \frac{P_t}{P(\tau_{n-1})} \notin \left(1 - \frac{d}{P(\tau_{n-1})}, 1 + \frac{d}{P(\tau_{n-1})} \right) \right\} \tag{3.3.13}$$

这就变成了马歇和罗森斐尔德(Marsh and Rosenfeld,1986)提出的模型,但其交易停止时刻的增量不是独立同分布的。

模型的缺陷

虽然取整模型和栅栏模型刻画了价格的离散性,而且从这些模型出发还可求出不可观测的连续价格过程的参数估计,但是这些模型至少有三个重要的缺陷。

首先,对于不服从几何布朗运动的不可观测的价格过程,这些模型和相应的参数估计就变得很难处理。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其次，取整模型和栅栏模型只把价格作为核心问题来研究，而没有考虑到其他可能影响价格变动特征的经济变量（如，买卖价差、易变性和交易量，等等）。

最后，也是最重要的一点，"真实"价格与观测价格之间的区别充其量也只是人为的区分，对这两个数量在经济意义上的解释还不明确。例如，鲍尔（Ball，1988），周和弗里斯（Cho and Frees，1988），戈特利亚伯和凯雷（Gottlieb and Kalay，1985），哈里斯（Harris，1990）都给出了根据离散的观测价格估计连续价格过程的易变性的方法，但是却从未对这种做法的动机提出质疑。如果连续价格过程是实际市场价格的近似，那么为什么要对近似过程的易变性感兴趣呢？也许有人会说，像布莱克—斯科尔斯/默顿（Black-Scholes/Merton）公式那样的衍生价格模型就依赖这种连续过程的参数。但是那些模型也是离散的市场价格的近似。所以，必须证明连续价格过程的参数在经济意义上确实与所讨论的问题有关，这样第 3.3.2 节中关于价格离散性的统计模型才是恰当的。

由于缺乏一个关于"真实"价格的清晰的模型，所以"真实"价格过程是连续的就未免有些牵强，这同时也说明所谓离散的观测价格过程的说法并不太正确。毕竟，价格的经济含义是两个经纪人在同意完成交易时共同达成的一个数值。尽管一些制度上的限制会使价格取离散值，但只要买卖双方都知道这个离散特性并仍然愿意进行交易，那么不管从哪种意义上说由市场交易所产生的离散价格都是"真实"价格。

3.3.3 次序 PROBIT 模型

为了说明取整模型和栅栏模型的缺陷，豪斯曼、罗和麦金雷（Hausman，Lo and MacKinlay，1992）提出了另外一个模型。这个关于价格变动的模型直接利用了被称为次序 Probit 模型的统计模型。在对只取几个有序值的因变量的实证分析研究中经常用到次序 Probit 模型①。这种分析方法是当因变量取离散值时，对线性回归模型的一种推广。确切地说，在所有关于股票价格离散特性的模型中——如，鲍尔（Ball，1988），周和弗里斯（Cho and Frees，1988），戈特利亚伯和凯雷（Gottlieb and Kalay，1985），哈里斯（Harris，1990），马歇和罗森斐尔德（Marsh and Rosenfeld，1986）——次序 Probit 模型是惟一一种既捕捉到了"解释"变量对价格变动的影响同时又考虑到价格的离散性和交易间隔的无规律性的模型。

① 例如，因变量可能是教育水平。它分为三个层次：中学以下，中学和大学。因变量的取值是离散有序的，因为读完中学才能继续读大学[有关细节见麦达拉（Maddala，1983）]。次序 Probit 模型是由爱特希森和西尔雅（Aitchinson and Silvey，1957），阿什弗德（Ashfold，1959）建立起来的，戈兰德、李和达赫姆（Gurland，Lee and Dahm，1960）又把它进一步推广到扰动项不服从正态分布的情况。有关模型的推广见麦达拉（Maddala，1983），麦卡拉夫（McCullagh，1980），西斯德（Thisted，1991）。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

模型的基本设定形式

我们考虑一个交易价格序列：$P(t_0),P(t_1),\cdots,P(t_n)$。它们分别是 $t_0,t_1,\cdots,t_n$ 时刻的观测价格。相应的价格变动记作：$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$，其中 $Y_k\equiv P(t_k)-P(t_{k-1})$ 是某个小单位(如 1/8 美元)的整数倍。令 Y_k^* 代表不可观测的连续随机变量，有：

$$Y_k^*=\mathbf{X}'\beta+\varepsilon_k,\ \mathrm{E}[\varepsilon_k|\mathbf{X}_k]=0,\ \varepsilon_k\ \mathrm{INID}\mathcal{N}(0,\sigma_k^2) \tag{3.3.14}$$

其中，$q\times1$ 的向量 $\mathbf{X}_k\equiv[X_{1k},\cdots,X_{qk}]'$ 是由解释变量组成的向量，它决定了 Y_k^* 的条件均值。INID 表示 ε_k 彼此独立但非同分布，这一点是与标准的计量经济学模型的一个重要差别。注意上式中的下标表示交易次数，而参数 t_k 表示交易时刻。在第 3.3.3 节中我们都遵循这个约定。

次序 Probit 模型的核心是假定观测价格的变化与连续变量 Y_k^* 有如下关系：

$$Y_k=\begin{cases}s_1,\text{若 } Y_k^*\in A_1\\ s_2,\text{若 } Y_k^*\in A_2\\ \vdots \qquad \vdots\\ s_m,\text{若 } Y_k^*\in A_m\end{cases} \tag{3.3.15}$$

其中集合 A_j 是状态空间 S^* 的子集，即 $S^*=\bigcup_{j=1}^{m}A_j$，对 $i\neq j$，$A_i\cap A_j=\varnothing$；$S_j(j=1,\cdots,m)$ 是构成 Y_k 的状态空间 S 的离散数值。

建立次序 Probit 模型的目的就是要揭示 S^* 和 S 之间的映射关系，并将这个映射关系与一组经济变量联系起来。豪斯曼，罗和麦金雷(Hausman，Lo，and MacKinlay，1992)把 $S_j(j=1,\cdots,m)$ 定义为：0，−1/8，+1/8，−2/8，+2/8，…。为了简化讨论，对状态空间 S^* 的分割通常定义为区间：

$$A_1\equiv(-\infty,\alpha_1] \tag{3.3.16}$$

$$A_2\equiv(\alpha_1,\alpha_2] \tag{3.3.17}$$

$$\vdots$$

$$A_i\equiv(\alpha_{i-1},\alpha_i] \tag{3.3.18}$$

$$\vdots$$

$$A_m\equiv(\alpha_{m-1},\infty) \tag{3.3.19}$$

虽然观测价格的变化可正可负，也可以是 1/8 美元的倍数，但我们假定式(3.3.15)中的 m 取有限值，这样未知参数的个数也是有限的。这样假定不会带来任何困难，因为我们总是令 Y_k 的不同状态代表不同的观测价格的变动。例如，在豪斯曼、罗和麦金雷(Hausman，Lo and MacKinlay，1992)的实证研究中，s_1 代表小于等于 −4/8 的价格变动，s_9 代表大于等于 4/8 的价格变动，s_2 到 s_8 分别代表 −3/8 到 +3/8 的价格变动。在这种设定方式下，次序 Probit 模型对于价格变动等于 4/8 和大于 4/8 的情况不加区分，因为这两种情况已被归为同一类事件了。对于价格变动小于等于 −4/8 的情况也是一样。图 3.4是这种分割的图示，其中，Y_k^* 的密度函数与其分位点$\{\alpha_i\}$所围成的小区域的面积

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

是离散价格变动发生的概率 π_i。

此外,从理论上说,只需增加状态数目 m,就能对 Y_k 的取值情况分得更细。只要(3.3.14)式的设定是正确的,m 的增大不会影响 β 的渐近估计值(尽管有限样本的特性可能会有所不同)。不过,在实际应用中,数据对 m 的取值是有限制的。因为当 m 很大时,在极端状态下不会有观测值。这样,有一部分参数不能被识别,也就无法估计它们的值。

价格变动的条件分布

读者可能已经注意到在 $\mathbf{X}_k$ 已知的条件下,(3.3.14)式中的 ϵ_k 不是同分布的。作出这个不太标准的假定是因为无交易数据之间的时间间隔是随机的,没有规律性。比如说,如果交易价格遵循马歇和罗森斐尔德(Marsh and Rosenfeld,1986)的模型,其中 Y_k^* 是服从算术布朗运动的增量,其方差与 $\Delta t_k \equiv t_k - t_{k-1}$ 成比例,那么 σ_k^2 肯定是 Δt_k 的线性函数并随交易时间的变化而变化。

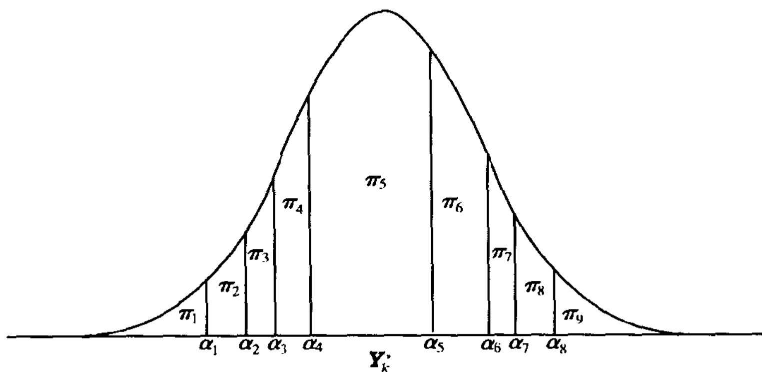


图 3.4 次序 Probit 模型

要考虑条件异方差的更一般的形式,我们假定 σ_k^2 是前定变量向量 $\mathbf{W}_k \equiv [W_{1k}, \cdots, W_{lk}]'$ 的线性函数,则有:

$$\mathrm{E}[\epsilon_k \mid \mathbf{X}_k, \mathbf{W}_k] = 0, \epsilon_k \ \mathbf{INID} \mathcal{N}(0, \sigma_k^2) \tag{3.3.20}$$

$$\sigma_k^2 = \gamma_0^2 + \gamma_1^2 W_{1k} + \cdots + \gamma_l^2 W_{lk} \tag{3.3.21}$$

其中(3.3.20)式代替了(3.3.14)式中相应的假设。(3.3.21)式中系数 $\{\gamma_j\}$ 的平方确保条件方差非负。在这个更一般的框架里,只要设定:

$$\mathbf{X}'_k \boldsymbol{\beta} = \mu \Delta t_k \tag{3.3.22}$$

$$\sigma_k^2 = \tau^2 \Delta t_k \tag{3.3.23}$$

就很容易得到马歇和罗森斐尔德(Marsh and Rosenfeld,1986)的算术布朗运动模型。此时,W_k 只包含一个变量:Δt_k(Δt_k 也是 $\mathbf{X}_k$ 中惟一的变量)。虽然 $\mathbf{X}_k$ 和 $\mathbf{W}_k$ 中包含相同的变量,但这不会造成完全多重共线性,因为一个向量影响 Y_k^* 的条件均值,而另一

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

个向量影响 Y_k^* 的条件方差。

因为有：

$$P(Y_k=s_j \mid Y_{k-1}=s_i)=P(Y_k^* \in A_j \mid Y_{k-1}^* \in A_i) \tag{3.3.24}$$

所以 Y_k^* 的相关性和关于 A_j 的定义显然会引起 Y_k 的相关性。而如果 $\mathbf{X}_k$ 与 $\mathbf{W}_k$ 相互独立，那么观测过程 Y_k 也是个独立过程。当然，这些都是限制性的假定，它们对于下面的统计推断并不是必要条件。我们只要求 ε_k 是条件独立的，这样，所有的序列相关特性都由 $\mathbf{X}_k$ 和 $\mathbf{W}_k$ 所体现。相应地，ε_k 的独立性并不意味着 Y_k^* 是独立分布的，因为并没有限定 $\mathbf{X}_k$ 与 $\mathbf{W}_k$ 相互独立。

观测价格的变动 Y_k 对 $\mathbf{X}_k$ 和 $\mathbf{W}_k$ 的条件分布由分界点和 ε_k 的分布决定。对正态分布的 ε_k，条件分布是：

$$\begin{aligned}
&P(Y_k=s_i \mid \mathbf{X}_k,\mathbf{W}_k)\\
&=P(\mathbf{X}'_k\beta+\varepsilon_k \in A_i \mid \mathbf{X}_k,\mathbf{W}_k) \qquad (3.3.25)\\
&=\begin{cases}
P(\mathbf{X}'_k\beta+\varepsilon_k \leqslant \alpha_1 \mid \mathbf{X}_k,\mathbf{W}_k)，若\ i=1\\
P(\alpha_{i-1}<\mathbf{X}'_k\beta+\varepsilon_k \leqslant \alpha_i \mid \mathbf{X}_k,\mathbf{W}_k)，若\ 1<i<m\\
P(\alpha_{m-1}<\mathbf{X}'_k\beta+\varepsilon_k \mid \mathbf{X}_k,\mathbf{W}_k)，若\ i=m
\end{cases} \qquad (3.3.26)\\
&=\begin{cases}
\Phi\left(\dfrac{\alpha_1-\mathbf{X}'_k\beta}{\sigma_k(\mathbf{W}_k)}\right)，若\ i=1\\
\Phi\left(\dfrac{\alpha_i-\mathbf{X}'_k\beta}{\sigma_k(\mathbf{W}_k)}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha_{i-1}-\mathbf{X}'_k\beta}{\sigma_k(\mathbf{W}_k)}\right)，若\ 1<i<m\\
1-\Phi\left(\dfrac{\alpha_{m-1}-\mathbf{X}'_k\beta}{\sigma_k}\right)，若\ i=m
\end{cases} \qquad (3.3.27)
\end{aligned}$$

其中，$\sigma_k(\mathbf{W}_k)$ 写成 $\mathbf{W}_k$ 的函数形式，以此说明变量 $\mathbf{W}_k$ 在条件分布中的作用。$\Phi(\cdot)$ 是标准正态累计分布函数。

我们注意到任一特定的观测价格变动出现的概率是由条件均值与区间分界点的相对位置决定的。所以，对一个给定的条件均值 $\mathbf{X}'_k\beta$，区间分界点的变动会改变价格变动出现的概率(见图 3.4)。

实际上，如果适当地变动区间分界点，次序 Probit 模型适合任何一种形式的多元正态分布。这说明 ε_k 是正态分布的假设对于确定 Y_k 的概率并没有特别的作用，ε_k 也可以服从逻辑概率分布。不过，次序 Logit 模型很难捕捉到条件异方差性，所以我们选择了正态分布的假设。

在给定区间分界点的情况下，条件均值 $\mathbf{X}'_k\beta$ 越大说明价格变动的极端值出现的概率越大。当然，可以对变动值任意编号，但有序 Probit 模型采用了变动值出现的自然顺序。利用回归变量还可以把不同经济因素的效用区分开来。这些经济因素影响了价格变动的一种状态相对于另一种状态的似然比。例如，假定 X_1 是一个相当大的正数，这通常意味着观测价格的变动会是一个很小的负值；反之亦然。那么，次序 Probit 模型中的系数 β_1 将会是一个符号为负，绝对值很大的数(当然与 σ_k 有关)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

若根据观测数据来确定区间分界点 α、条件均值的系数 β 和条件方差 σ_k^2，则次序 Probit 模型作为经济变量 $\mathbf{X}_k$ 和 $\mathbf{W}_k$ 的函数就反映了连续状态空间 S^* 与离散状态空间 S 之间的实证关系。

极大似然估计

令 $I_k(i)$ 为一指示变量，当 Y_k 的第 k 个观测值是状态 s_i 时，其值为 1；否则，其值为 0。则以解释变量 $\mathbf{X}=[\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\cdots,\mathbf{X}_n]'$ 和 $\mathbf{W}_k=[\mathbf{W}_1,\mathbf{W}_2,\cdots,\mathbf{W}_n]'$ 为条件变量，价格变动向量 $\mathbf{Y}=[Y_1,Y_2,\cdots,Y_n]'$ 的对数似然函数$\mathcal{L}$是：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{Y}|\mathbf{X},\mathbf{W}) = \sum_{k=1}^{n}\Bigg\{&I_k(1)\log\Phi\left(\frac{\alpha_1-\mathbf{X}'_k\boldsymbol{\beta}}{\sigma_k(\mathbf{W}_k)}\right)\\&+\sum_{i=2}^{m-1}I_k(i)\log\left[\Phi\left(\frac{\alpha_i-\mathbf{X}'_k\boldsymbol{\beta}}{\sigma_k(\mathbf{W}_k)}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha_{i-1}-\mathbf{X}'_k\boldsymbol{\beta}}{\sigma_k(\mathbf{W}_k)}\right)\right]\\&+I_k(m)\log\left[1-\Phi\left(\frac{\alpha_{m-1}-\mathbf{X}'_k\beta}{\sigma_k(\mathbf{W}_k)}\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

虽然 σ_k^2 可以是 $\mathbf{W}_k$ 的线性函数，但必须对参数有一些限制条件，以确保(3.3.28)式是可识别的。因为，如果 α,β 和 σ_k 同时扩大一倍，似然函数不变。一个典型的识别假设条件是取 $\gamma_0=1$。这样，在进行估计之前我们要解决三个问题：(1)状态个数 m；(2)回归变量 $\mathbf{X}_k$ 的设定；(3)条件方差 σ_k^2 的设定。

要选定 m 的值，我们必须既考虑到对价格变动的分解同时又兼顾实际的局限：若 m 的值太大，将不会有端点状态 s_1 和 s_m 的观测值出现。例如，若取 $m=101$，并定义状态 s_1 和 s_{101} 分别对应价格变动为−50 个单位和+50 个单位，我们将会发现纽约证券交易所里典型的股票交易价格的变动不会达到 s_1 或 s_{101}，而且也无法估计出与这两个状态相关的参数。也许最早用来估计 m 值的方法就是利用数据实际频数分布来确定 m 值，让 m 的值尽可能的大，但不能出现端点状态没有观测值的情况①。

余下的两个问题必须根据实际情况来解决，因为回归变量和 σ_k^2 的设定主要依赖特定的应用目的。如果要进行预测，那么滞后的价格变动和市场指数可能是合适的回归变量。但要估计关于作市商的垄断权力的结构模型，选取其他变量作为回归变量可能更恰当。

3.4 近期的实证研究成果

关于市场微观结构的实证研究文献非常多，其中既有学术出版物也有工业出版物。

---

① 例如，豪斯曼、罗和麦金雷(Hausman, Lo and MacKinlay, 1992)对于市值较大的股票，令 $m=9$，即其价格变动的极端情况是小于等于−4 个单位和大于等于+4 个单位；对于市值较小的股票，令 $m=5$，即其价格变动的极端情况是小于等于−2 个单位和大于等于+2 个单位。虽然并不一定要求价格的变动状态对称(如令 s_1 小于等于−6 个单位，s_9 大于等于+2 个单位)，但如果价格变动的直方图是对称的，则可以把 s_j 定义为对称的变动状态。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

所以只用几页的篇幅来粗略地回顾一下这些文献是很困难的。因此，在本节中我们将比较深入地介绍三个应用市场微观结构理论的例子。第 3.4.1 节的内容是关于异步交易的实证分析，其中分别利用日收益，周收益和月收益来衡量无交易偏差的大小。第 3.4.2 节中回顾了基于罗尔(Roll,1984)模型的有效买卖价差的实证分析。第 3.4.3 节介绍了关于交易数据的有序 Probit 模型的一个应用例子。

3.4.1 异步交易的实证分析

在对无交易效应进行实证分析之前，我们先总结一下第 3.3.1 节中无交易模型的特性。虽然其中的许多性质也符合其他的异步交易模型，但是比较静态结果和简明的解释却是该模型所独有的。根据第 3.1.1 节中的假设，有以下结论：

(1)异步交易既不会影响单个证券的收益也不会影响证券组合的收益。

(2)异步交易会增大均值不为零的单个证券收益的方差。但收益的均值越小，其方差的增量也越小。

(3) 证券组合的分散程度高且包含的证券具有相同的无交易概率，那么异步交易会降低组合收益的方差。

(4) 对于观测收益均值不为零的单个证券，异步交易会造成观测收益的以几何形式衰减的负序列相关。均值的绝对值越小，自相关系数越接近 0。

(5) 若证券组合的分散程度高且包含的证券具有相同的无交易概率，异步交易会造成证券组合观测收益的以几何形式衰减的正序列相关，即其收益过程是 $AR(1)$过程。

(6) 异步交易会造成证券 i 和证券 j 的观测收益的互自相关，相关系数与 $\beta_i\beta_j$ 同号并以几何形式衰减。这种自相关系数一般不对称。证券 i 当前时刻的收益与证券 j 将来收益的协方差并不一定要等于证券 j 当前时刻的收益与证券 i 将来收益的协方差。造成不对称的原因是不同的证券有不同的无交易概率。

(7) 若证券组合 A 和 B 的分散程度高且各自包含的证券具有相同的无交易概率，那么由于异步交易的存在，这两个组合观测收益之间存在正的互自相关系数，相关系数以几何形式衰减。这种互自相关系数也是不对称的，原因是不同的证券组合包含的证券具有不同的无交易概率。

(8) 若构成等权重指数的每个证券的权数的符号相同，且单个证券的收益都比较小，则异步交易会造成指数的正序列相关。

(9) 时间的累积效应会使无交易引起的单个证券观测收益的负相关系数的最小值更小。随着累积程度的加强，当无交易概率更接近 1 时，负相关系数才会取到最小值。

(10) 对于证券组合来说，无论无交易概率的值是什么，时间的累积效应会减小观测收益的自相关系数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

由于异步交易的效应在以无交易概率分组的证券组合中表现得更加明显，所以我们的实证分析使用的数据是从 1962～1994 年十个按大小分类的证券组合的日收益、周收益和月收益。我们根据证券的市场价值来对证券分组，因为一只股票在市场上的活跃程度与它的总市场价值高度相关，所以市场价值相近的股票的无交易概率也相差不大[①]。我们挑选这十个证券组合的原则是：最大限度地保证每个组合里证券的无交易概率的同一性，同时证券组合的分散化程度又比较合理以使得式(3.1.20)的渐近近似仍然成立[②]。

隐含在自相关系数中的日无交易概率

表 3.4 中的第一列是其中四个证券组合的日收益、周收益和月收益的一阶自相关系数矩阵 Γ_1。计算所用数据取自证券价格研究中心(CRSP)的数据库。证券组合 1 包括市场价值最小的证券，而证券组合 10 包括市场价值最大的证券[③]。很明显这些自相关系数矩阵不对称。表中第二列是自相关系数矩阵减去自己的转置而得到的矩阵。新矩阵里主对角线以下的元素大于主对角线以上的元素。这证实了罗和麦金雷 (Lo and Mackinlay, 1990c)提出的领先—滞后模式。

表 3.4　证券组合收益的自相关系数矩阵

		$\hat{\Gamma}_1$				$\hat{\Gamma}_1-\hat{\Gamma}'_1$			
		1	4	7	10	1	4	7	10
Daily	1	.39	.29	.21	.07	.00	−.13	−.19	−.27
	4	.41	.34	.29	.11	.13	.00	−.09	−.25
	7	.40	.38	.33	.15	.19	.09	.00	−.19
	10	.34	.36	.34	.19	.27	.25	.19	.00
Weekly	1	.37	.19	.12	−.02	.00	−.15	−.20	−.26
	4	.34	.21	.15	−.00	.15	.00	−.08	−.19
	7	.32	.23	.17	.02	.20	.08	.00	−.14
	10	.24	.19	.15	.01	.26	.19	.14	.00

① 这个分析只包括普通股。美国预托证券(ADRs)和其他特殊证券未被包括进来，因为用市场价值来刻画这些证券的无交易概率意义不大。

② 这些证券组合的收益是其中单个证券连续复合收益的算术平均值。我们曾分析过证券组合连续复合收益的相关性，当时证券组合的收益是其中单个证券收益的不加权的几何平均值。对于等权重证券组合的连续复合收益来说，相关分析的结论也是相同的。

③ 为了节省篇幅，我们只给出了四个证券组合的计算结果。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

		$\hat{\Gamma}_1$				$\hat{\Gamma}_1-\hat{\Gamma}'_1$			
		1	4	7	10	1	4	7	10
Monthly	1	.21	.10	.06	.01	.00	−.20	−.25	−.29
	4	.28	.16	.11	.04	.18	.00	−.08	−.14
	7	.30	.19	.14	.05	.24	.08	.00	−.09
	10	.27	.18	.14	.03	.26	.14	.09	.00

注：表中是四个证券组合的观测收益向量$[r_1^o,r_4^o,r_7^o,r_{10}^o]'$的一阶自相关系数矩阵。计算所用的数据是 1962 年 7 月 3 日～1994 年 12 月 30 日在 NYSE 和 AMEX 上市的普通股的日收益、周收益和月收益。此外，每年都要根据股票上一年年底的市场价值把它们分配到不同证券组合中去。如果某只股票的这个市场价值缺失，那么就用其当年年底的市场价值来替代。如果这两个市场价值都缺失，则剔除这只股票。在一个给定的月份中，只有具有完整的日收益记录的股票才能参与证券组合日收益的计算。r_1^o 是市场价值最小的证券组合的收益，r_{10}^o是市场价值最大的证券组合的收益。每个证券组合中证券的个数大致相等。处于第 i 行第 j 列的元素是 r_{it}^o 和 r_{jt+1}^o 的相关系数。为了衡量自相关系数矩阵不对称性的程度，表中还列出了矩阵 $\hat{\Gamma}_1-\hat{\Gamma}'_1$。

市值大的股票收益有引导市值小的股票收益的倾向，这说明异步交易可能是引起相关性的一个原因。但是，周收益和月收益的自相关系数所隐含的日无交易概率的大小却令人难以置信。这一点在表 3.5 中尤为明显。表 3.5 中的数值是对隐含在周收益和月收益的自相关系数里的日无交易概率的估计。

例如，证券组合 1 的周收益的自相关系数是 37%，根据(3.1.40)式，这意味着日无交易概率为 71.7%①。根据(3.1.8)式，交易的平均时间间隔是 2.5 天。

再根据证券组合 1 的月收益的自相关系数计算，日无交易概率是 86.6%，平均无交易期间达 6.5 天之久。

为了便于比较，表 3.5 也列出了根据 CRSP 记录的交易信息和日交易数据估计出的无交易概率。不存在时间累积效应的情况下，证券组合收益的自相关系数是无交易概率的一致估计。这样，表 3.5 中标有"$\hat{\pi}_k(q=1)$"的一列数据也就是表 3.4 中自协方差矩阵中主对角线上的数据。

对于市值小的证券组合来说，无交易期间的点估计值似乎是合理的。但对于市值较大的证券组合来说，其无交易期间的估计长度只是略有缩短。

1/4 天的无交易期间对市值最大的证券组合来说实在是太长了。标有"$\hat{\pi}_k$"的一列数

---

① 对(3.1.8)式和(3.1.40)式进行泰勒展开(见附录 A.4)，并利用日收益、周收益和月收益的一阶自相关系数的异方差一致和自相关系数一致的标准误，可以估计出基于自相关系数的无交易概率和无交易期间的标准误。一阶自相关系数的标准误可以用下面的方法计算：作收益对常量和滞后收益的回归，然后用纽维和韦斯特(Newey and West，1987)方法计算斜率(就是收益的一阶自相关系数)的异方差一致和自相关一致的标准误。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

据更直接地说明了这一点。这列数据是每个交易日里某证券组合中无交易证券个数所占的平均比重[①]。这个均值是根据1962年7月3日～1994年12月30日所有交易日的交易情况得出的(共有8 179个观测日)。将这列数据与表中其他数据进行比较,可以看出异步交易在解释数据自相关现象时的局限。异步交易可能是造成股票收益的时序特性的部分原因,但它决不可能是造成收益自相关性的惟一原因。

表3.5 **日无交易概率的估计**

k	$\hat{\pi}_k$	$\hat{\pi}_k(q=1)$	$\hat{E}[k_t]$	$\hat{\pi}_k(q=5)$	$\hat{E}[k_t]$	$\hat{\pi}_k(q=22)$	$\hat{E}[k_t]$
1	.225	.394	0.65	.717	2.54	.866	6.47
	(0.013)	(0.026)	(0.07)	(0.034)	(0.42)	(0.029)	(1.64)
4	.052	.343	0.52	.560	1.28	.837	5.12
	(0.004)	(0.023)	(0.05)	(0.059)	(0.31)	(0.043)	(1.61)
7	.019	.328	0.49	.497	0.99	.819	4.52
	(0.002)	(0.016)	(0.04)	(0.062)	(0.25)	(0.048)	(1.46)
10	.002	.188	0.23	.139	0.16	.515	1.06
	(0.001)	(0.019)	(0.03)	(0.126)	(0.17)	(0.461)	(1.96)

注:表中数据是根据证券组合周收益和月收益的自相关系数估计出的日无交易概率。标有"$\hat{\pi}_k$"的一列数据是每个交易日里,证券组合k中无交易证券个数所占的平均比重。这个均值是根据股票在1962年7月3日～1994年12月30日所有交易日的交易情况计算得出的。标有"$\hat{\pi}_k(q=1)$"的一列数据是证券组合日收益的一阶自相关系数,它们也是日无交易概率的一致估计。标有"$\hat{\pi}_k(q=5)$"和"$\hat{\pi}_k(q=22)$"的两列数据是根据证券组合周收益和月收益的自相关系数估计出的日无交易概率。其中,计算过程利用了第3.2节中时间累积效应的关系式($q=5$对应周收益,$q=22$对应月收益,因为一周和一个月内的交易日分别是5天和22天)。标有"$\hat{E}[k_t]$"的一列数据是根据它左边紧邻的无交易概率估计值计算出的平均无交易期间的估计值(单位是天数)。括号内的数据是估计值的标准误。所有的估计值都具有异方差并与自相关系数相一致。

异步交易与指数的自相关系数

令r^o_{mt}代表t时期所有N个证券等权重组合的观测收益。这个证券组合的自协方差和自相关系数是:

$$\mathrm{Cov}[r^o_{mt}, r^o_{mt+n}] = \frac{\iota'\Gamma(n)\iota}{N^2},$$

$$\mathrm{Corr}[r^o_{mt}, r^o_{mt+n}] = \frac{\iota'\Gamma(n)\iota}{\iota'\Gamma(0)\iota} \qquad (3.4.1)$$

① CRSP的日志文件记录了这个信息。若一个证券当天没有交易,那么它的收盘价记作负的出价和要价的平均值。无交易概率的标准误根据每日无交易比重的时序数据估算。标准误是异方差一致和自相关系数一致的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中，$\boldsymbol{\Gamma}_{(0)}$是$r_t^0$的协方差矩阵，$\iota$是元素都为1的($N\times1$)向量。如果所有的系数$\beta_i$同号，而且每个证券的平均收益都比较小，那么$r_{mt}^0$就有可能正相关。换句话说，如果互自协方差为正而且其个数多于负的自协方差的个数，那么等权重的指数将会是正序列相关的。

这个现象能够说明罗和麦金雷（Lo and MacKinlay，1988b）为什么拒绝关于CRSP等权重周收益指数(这个指数的一阶自相关系数大于20%)服从随机游走过程的假设吗？

不失一般性，我们令$N=10$，并用前面10个证券组合的收益构成一个等权重的指数，这个指数可以近似地被看作是所有证券收益的等权重指数。根据式(3.1.36)，基于日无交易概率π_i和组合系数β_i我们可以计算出r_{mt}^0的周自相关系数。我们使用两种不同的方法估计π_i，并对β_i赋予两组不同的值。在这四种不同的组合情况下，周收益指数的自相关系数如表3.6所示。

表3.6　　周收益指数的自相关系数

π_i的估计值	指数的相关系数ρ_1(%) ($\beta_1=1,\beta_{10}=1$)	指数的相关系数ρ_1(%) ($\beta_1=1.5,\beta_{10}=0.5$)
直接估计值	1.4	1.8
日收益的一阶自相关系数	4.8	5.9

注：表中数据为十个证券组合的等权重周收益指数的一阶自相关系数ρ_1的估计值。这个指数可以近似地被看作是所有证券收益的等权重指数。我们用两种方法估计π_i的值：一种方法是根据CRSP的记录直接估计；另一种方法是根据证券组合日收益的一阶自相关系数来估计。由于指数自相关系数还依赖组合系数β_i，所以我们选了两组不同的β_i：一组的组合系数β_i都为1；另一组中$\beta_1=1.5,\beta_{10}=0.5$，且组合系数$\beta_i$从$\beta_1$到$\beta_{10}$线性递减。这个等权重周收益指数的子样相关系数是21%。（根据1962年7月3日～1994年12月30日的交易数据计算。）

表3.6中，第一行数据是用根据CRSP的记录得到的无交易概率值(见表3.5)计算得出的。其中，若假定二十个β值都为1，则周收益指数的自相关系数是1.4%；若假定证券组合1的系数$\beta_1=1.5$，证券组合10的系数$\beta_{10}=0.5$，其余系数从β_1到β_{10}线性递减。则周收益指数的自相关系数是1.8%。第二行数据是用根据证券组合日收益的自相关系数估计出的无交易概率值计算得到的，其中日自相关系数的计算利用了(3.1.41)式。

表3.6中等权重周收益指数的一阶自相关系数的最大值是5.9%。若用无交易概率的直接估计值来计算，指数的一阶自相关系数小于2%。这些数值都比等权重收益指数的21%的子样自相关系数小得多。总之，近来的实证研究成果并未证实异步交易是普通股收益(短期或长期)的伪自相关性的一个重要原因①。

① 关于作为自相关性的来源的无交易现象，布道柯赫、理查德森和惠特劳(Boudoukh, Richardson and Whitelaw, 1995)，麦切(Mech, 1993)，赛厄斯和斯塔克斯(Sias and Starks, 1994)还给出了另外的实证结果。虽然他们计算出的自相关系数不同，但是这三篇论文的结论都是：无交易现象不能完全解释观察到的自相关现象。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

3.4.2 有效买卖价差的估计

在应用第 3.2.1 节中的模型时，罗尔(Roll，1984)认为解释买卖价差的百分比 s_r 的意义比解释买卖价差的数量 s 更容易一些。他还给出了收益的一阶自协方差与 s_r 的关系：

$$\mathrm{Cov}[R_{t-1},R_t]=-\frac{s_r^2}{4}-\frac{s_r^4}{16}\approx-\frac{s_r^2}{4} \tag{3.4.2}$$

$$s_r\equiv\frac{s}{\sqrt{P_aP_b}} \tag{3.4.3}$$

其中，s_r 被定义为买卖价差占平均出价 P_b 和平均要价 P_a 的几何平均值的百分比。再由式(3.4.2)，得：

$$s_r\approx2\sqrt{-\mathrm{Cov}[R_{t-1},R_t]} \tag{3.4.4}$$

注意式(3.4.4)和式(3.2.9)只有在收益的自协方差为负时才有意义，因为模型的设定形式限定了出价—要价的波动只会引起收益的一阶负相关。但在实际应用中，收益的一阶正相关系数也是常见的，在这种情况下罗尔将 s_r 定义成(见他编制的表 1 中的脚注 a 和 b)：

$$s_r\equiv-2\sqrt{|\mathrm{Cov}[R_{t-1},R_t]|} \tag{3.4.5}$$

从经济意义上讲，很难说这种处理方法是合理的。因为负的买卖价差通常都与作市商的行为(如保证市场的流动性)有关，所以这种处理方法似乎与收益的正相关系数没有什么关系。当收益的自相关系数出现正值时，一个比较合理的解释是罗尔(Roll，1984)模型的设定形式不正确，必须用另外的模型来解释正序列相关[见乔治等(George，1991)，格劳斯顿和哈里斯(Glosten and Harris，1988)，华恩和斯托尔(Huang and Stoll，1995a)，斯托尔(Stoll，1989)]。

罗尔使用日收益数据估计了从 1963～1982 年在 NYSE 和 AMEX 上市的股票的年有效价差。在 NYSE 上市的股票的有效买卖价差的总平均值是 0.298%，AMEX 的相应值是 1.74%。(在 AMEX 上市的股票的价格较低，所以其价差百分比较大。)不过，对以上数据进行解释说明时要谨慎，因为47 414个有效价差的估计值中，有24 358个是负值，这说明存在严重的设定偏差。另一个说明存在设定偏差的现象是，根据周收益计算的有效价差的估计值相差很大。虽然如此，这些有效价差的大小对于交易数据的实证应用还是非常重要。

格劳斯顿和哈里斯(Glosten and Harris，1988)改进了买卖价差的格劳斯顿(Glosten，1987)分解并使用 NYSE 上市的 250 只股票的交易数据来估计买卖价差的组成部分。他们的结论是交易数据中的确存在不利选择的补偿费用。斯托尔(Stoll，1989)也提出了一种类似的分解方法。他根据在纳斯达克上市的国家市场系统的证券从 1984 年 10 月～12 月的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

交易数据得出如下结论:买卖价差中,不利选择的补偿费用占 43%,盘存成本占 10%,指令处理费用占 47%。乔治、考尔和尼麦棱德瑞(George,Kaul and Nimalendran,1991)认为不可观测的"真实"价格(第 3.2.1 节中的 P_t^*)的期望收益始终在变化。根据 1963～1985 年在 NYSE 和 AMEX 上市的股票和 1983～1987 年在纳斯达克上市的股票的日交易数据和周收益数据,他们估计出买卖价差中不利选择的补偿费用约占 8%～13%,其余部分是指令处理费用,没有盘存成本的迹象。华恩和斯托尔 (Huang and Stoll,1995a)提出了一个更一般的模型,模型中包括作为特殊情况的其他一些设定。他们根据主要的市场指数(共包括 20 只股票)所包含的 19 只股票在 1992 年的交易数据估算出:买卖价差中,不利选择的补偿费用占 21%,盘存成本占 14%,指令处理费用占 65%。

不同的研究得出的估计值相差很大,很难将某一个研究结果作为决定性的结论。研究结果的差别主要是由两个原因造成的:一个是对买卖价差动态性的设定不同,另一个是估算所用的数据集不同。显然,应该进行更为详细、综合的分析,将所有这些不同的设定应用于各种数据集来估量每个模型的解释能力和稳定性。

3.4.3 交易数据的模型

豪斯曼、罗和麦金雷(Hausman,Lo,and MacKinlay,1992)利用第 3.3.3 节的有序 Probit 模型检验了交易数据三个方面的特性:(1)某个特定的交易序列是否会影响价格变动的条件分布? 即+1,−1,+1 这个价格变动序列和−1,+1,+1 这个序列对下一个价格变动的条件分布的影响是否相同?(2)交易量的大小是否会影响价格的变动? 如果有影响,那么从一个交易到下一个交易,每单位交易量对价格变动的影响是多少?(3)价格的离散性重要吗? 特别地,可以不考虑价格的离散性,而将价格变动的条件分布写作价格变动对解释变量的简单线性回归吗?

为了讨论这三个问题,豪斯曼、罗和麦金雷(Hausman,Lo,and MacKinlay,1992)用一百多只股票 1988 年的交易数据估计了一个有序 Probit 模型。为了节省篇幅,我们只集中研究其中一个容量较小的样本。这个样本由六只股票组成:IBM 公司,昆腾化学制品公司(CUE),弗斯特车轮制造公司(FWC),汉迪—哈尔满公司(HNH),奈维斯国际公司(NAV),美国电话电报集团公司(T)。因为已有文献证明股票隔夜的收益与它们在当日内的收益大不相同[如见埃米赫德和蒙德尔森(Amihud and Mendelson,1987),斯托尔和惠利(Stoll and Whaley,1990),伍德、麦金内斯和奥德(Wood, McInish, and Ord,1985)]。所以对于这六只股票,豪斯曼等人也只研究它们在当日内的价格变动。他们还使用了其他几个"过滤器"来排除"有问题"的交易数据和报价,这样每只股票的交易数据从 HNH 的 3 174 个到 IBM 的 206 794 个不等。

他们在分析中还用到了出价和要价。由于只有当出价和要价发生变动时才有这些报

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

价的记录，所以还需要把报价与交易价格对应起来。一个很自然的做法是将每个交易价格与交易前最后一次的报价相对应。但是，布隆夫曼（Bronfman，1991）、李和雷迪（Lee and Ready，1991）已经证明：有时需经过一个时滞才会报出突然引起报价变动的交易的价格。所以，在像"集成磁带"这样的官方记录中，报价的变动和交易价格的顺序是颠倒的。因此，豪斯曼、罗和麦金雷（Hausman，Lo and MacKinlay，1992）将交易价格与至少在交易前 5 秒钟的报价相对应——李和雷迪（Lee and Ready，1991）提供的证据表明这样做将能考虑到绝大多数次序颠倒的情况。当然，这个问题只是交易数据摆在研究者面前的众多独特的挑战之一。

表 3.7 中的概率统计量能给读者一个关于这个巨大数据库的直观印象。这个样本中的价格相当分散，NAV 和 IBM 的最低股价分别是 3.125 美元和 104.250 美元，它们的最高股价分别是 7.875 美元和 129.500 美元。其中，NAV 的市场价值最小，为21 900万美元；IBM 的市场价值最大，为 698 亿美元。

表 3.7　六只股票交易数据的概括统计量

变　量	IBM	CUE	FWC	HNH	NAV	T
最低价	104.250	65.500	11.500	14.250	3.125	24.125
最高价	129.500	108.250	17.250	18.500	7.875	30.375
市场价值（百万美元）	69.815	2.167	0.479	0.219	0.998	28.990
交易数百分比（%）						
交易价格>报价中值	43.81	43.19	37.13	22.53	40.80	32.37
交易价格=报价中值	12.66	18.67	23.58	26.28	18.11	25.92
交易价格<报价中值	43.53	38.14	39.29	51.20	41.09	41.71
价格变动，Y_k						
均值	−0.001 0	0.001 6	−0.001 7	−0.002 8	−0.000 2	0.000 1
标准误	0.753 0	1.235 3	0.639 0	0.749 2	0.644 5	0.654 0
交易的时间间隔，Δt_k						
均值	27.21	203.52	296.54	1 129.37	58.36	31.00
标准误	34.13	282.16	416.49	1 497.44	76.53	34.39
买卖价差，AB_k						
均值	1.947 0	3.290 9	2.083 0	2.470 7	1.461 6	1.656 4
标准误	1.462 5	1.620 3	1.168 2	0.899 4	0.671 3	0.793 6
S&P500 期货收益						
均值	−0.000 0	−0.000 4	−0.001 7	−0.006 4	0.000 1	−0.000 1
标准误	0.071 6	0.138 7	0.147 5	0.196 3	0.103 8	0.076 5

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

变 量	IBM	CUE	FWC	HNH	NAV	T
交易类型指示变量，IBS_k						
均值	0.002 8	0.050 5	−0.021 6	−0.286 7	−0.002 8	−0.093 3
标准误	0.934 6	0.900 5	0.873 9	0.809 5	0.904 9	0.855 6
指示变量与经过变换的货币交易量的乘积						
均值	0.105 9	0.357 4	−0.052 3	−1.954 3	0.033 2	−0.425 6
标准误	6.147 4	5.664 3	6.279 8	6.089 0	6.970 5	7.584 6
货币交易量中位数(美元)	57 375	40 900	6 150	5 363	3 000	7 950

注：以上是交易价格和 IBM(206 794 个交易)，CUE(26 927 个交易)，FWC(18 199 个交易)，HNH(3 174个交易)，NAV(96 127 个交易)，T(180 726 个交易)相应的次序 Probit 模型中解释变量的概括统计量。根据 1988 年 1 月 4 日～1988 年 12 月 30 日的交易数据计算。

在实证分析中，还需要某个指示变量来说明一笔交易是以出价还是以要价成交的；否则，难以说明交易对价格的影响作用——买进 10 万股与卖出 10 万股的影响效果大不相同。显然，这是一项困难的任务，因为每一笔交易都有买方和卖方。我们希望捕捉的信息是哪一方更急于完成这笔交易，于是愿意以接近出价或要价的价格成交。如果以要价成交，那么这笔交易很可能是"买入"；如果以出价成交，交易就很可能是"卖出"。但是，有许多交易的成交价介于出价和要价之间，用这种方法无法标明大多数交易的类型。

豪斯曼、罗和麦金雷(Hausman，Lo and MacKinlay，1992)运用一种众所周知的算法来标明交易的类型：如果交易价格高于当前出价和要价的均值(至少在交易前 5 秒钟设定的最近的一次报价)，那么这笔交易就是"买入"，否则，这笔交易是"卖出"。如果交易价格等于出价和要价的均值，那么不能确定这笔交易的类型。这种方法就使得类型不定的交易数目大大减少了。不过，这种分类方法与其他诸如单位检验(如果交易价格大于、小于或等于上一次的交易价格，那么这笔交易就是"买入"，"卖出"或不确定类型)的方法相比，其优势不得而知，因为实际上无法获得评价这些方法所必需的数据。

实证设定

利用极大似然方法来估计次序 Probit 模型的参数，必须设定以下三个方面的内容：(1)状态数目 m；(2)解释变量 X_k；(3)方差参数 σ_k^2。

要确定 m 的值，我们必须在对价格变动的划分和实际限制之间权衡。因为如果 m 的值太大，那么极端状态 s_1 和 s_m 就不会有观测值。比如，若取 m 的值为 101，定义状态 s_1 和 s_{101} 分别对应价格变动的－50 个单位和＋50 个单位，我们将会发现六只股票的 Y_k 都不会达到这两个状态。豪斯曼、罗和麦金雷(Hausman，Lo and MacKinlay，1992)根据数

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

据的实际分布，对市值较大的股票取 $m=9$，即价格变动的两个极端情况分别是小于等于 -4 个单位和大于等于 $+4$ 个单位。对两个市值较小的股票 FWC 和 HNH，取 $m=5$，即价格变动的极端情况分别是小于等于 -2 个单位和大于等于 $+2$ 个单位。解释变量 X_k 应能反映交易价格变动的这样几个特性：时间效应（如算术布朗运动模型）、买卖价差的效应（许多交易价格都是在出价和要价之间波动）、交易量的大小（这样价格受到的影响可以作为交易量的函数而被确定）和市场的变动对单个股票价格变动的条件分布的影响。由此引入了以下的解释变量：

Δt_k：第 $k-1$ 次交易到第 k 次交易的时间间隔，单位是秒。

AB_{k-1}：在 t_{k-1} 时刻的买卖价差，单位是 1/8 美元。

Y_{k-l}：因变量 Y_k 的三个滞后变量[$l=1,2,3$]。如前所述，若 $m=9$，则令价格变动小于 -4 个单位等同于 -4 个单位的情况（状态 s_1），价格变动大于 $+4$ 个单位等同于 $+4$ 个单位的情况（状态 s_9）。若 $m=5$，也有类似的设定。

V_{k-l}：第 $(k-l)$ 次货币交易量的三个滞后变量[$l=1,2,3$]，等于第 $(k-l)$ 次交易价格（单位是美元）乘以股票的交易数量，即货币交易量是以数百美元来表示的。为了减轻异常值的影响，如果某个股票的交易数量大于其交易数量实际分布的 99.5 分位点，则令这个交易数量等于 99.5 分位点。

$SP500_{k-l}$：标准普尔 500（S&P500）指数期货价格的五分钟内的连续复合收益的三个滞后变量[$l=1,2,3$]。它是交易 $k-l$ 发生当月之后的合约到期的最邻近月份的价格，其中收益是根据 t_{k-l} 时刻之前最邻近一分钟的价格以及在这之前的五分钟的价格来计算的。

IBS_{k-l}：指示变量的三个滞后变量[$l=1,2,3$]。若第 $(k-l)$ 个交易价格大于 t_{k-l} 时刻出价和要价的平均值，指示变量的值为 $+1$；若交易价格小于平均值，其值为 -1，其余情况，其值为 0。即：

$$IBS_{k-l}\equiv\begin{cases}1, \text{若 } P_{k-l}>\frac{1}{2}(P^a_{k-l}+P^b_{k-l})\\ 0, \text{若 } P_{k-l}=\frac{1}{2}(P^a_{k-l}+P^b_{k-l})\\ -1, \text{若 } P_{k-l}<\frac{1}{2}(P^a_{k-l}+P^b_{k-l})\end{cases}$$

则 $X'_k\beta$ 的设定形式是：

$$\begin{aligned}X'_k\beta=&\beta_1\Delta t_k+\beta_2 Y_{k-1}+\beta_3 Y_{k-2}+\beta_4 Y_{k-3}+\beta_5 SP500_{k-1}+\beta_6 SP500_{k-2}\\&+\beta_7 SP500_{k-3}+\beta_8 IBS_{k-1}+\beta_9 IBS_{k-2}+\beta_{10} IBS_{k-3}+\beta_{11}\{T_\lambda(V_{k-1})IBS_{k-1}\}\\&+\beta_{12}\{T_\lambda(V_{k-2})IBS_{k-2}\}+\beta_{13}\{T_\lambda(V_{k-3})IBS_{k-3}\}\end{aligned}$$

X_k 中包括变量 Δt_k 是考虑到时间效应对 Y_k^* 的条件均值的影响。如果交易价格在交易时期内是稳定的，那么 Δt_k 的系数为 0。包括价格变动的滞后项是为了说明序列相

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

关性，包括 S&P500 指数期货价格的滞后收益是要说明整个市场对价格变动的影响。

为了衡量单位交易量对交易价格的影响，还引入了一项 $T_v(V_{k-1})$，这是根据鲍克斯和考克斯(Box and Cox，1964)变换得到的货币交易量的转换形式：

$$T_v(x)=\frac{x^v-1}{v}$$

其中，$v\in[0,1]$是待估计的参数。鲍克斯和考克斯变换使得条件均值成为货币交易量的非线性函数。这是一个重要的改进，因为通常认为价格受到的影响可能会反映与货币交易量有关的经济规律：即虽然价格受到的整体影响有可能会随着交易量的增加而增加，但价格受到的边际影响可能并非如此。鲍克斯和考克斯变换既包括线性变换($v=0$)，又包括凹变换(也包括对数变换($v=1$))。鲍克斯和考克斯变换的曲率估计值将在衡量价格受到的影响时发挥重要的作用。

经过变换的货币交易量与 IBS_{k-l} 相互作用。IBS_{k-l} 是交易类型的指标变量，当交易是“买入”时，$IBS_{k-l}=1$；当交易是“卖出”时，$IBS_{k-1}=-1$；当交易类型不确定时，$IBS_{k-l}=0$。正的 β_{11} 说明“买入”倾向于抬高股票价格；“卖出”倾向于压低股票价格。这个关系已由一些基于信息的交易模型[如埃斯利和奥哈拉(Easley and O’Hara，1987)]预测过了。此外，β_{11} 的大小反映了单位货币交易量对 Y_k^* 的条件均值的影响，也就是单位货币交易量对价格变动的条件概率的影响。β_{12} 和 β_{13} 的符号和大小衡量了价格影响作用的持续情况。

最后，要完成整个设定必须确定条件方差 $\sigma_k^2\equiv\gamma_0^2+\sum\gamma_i^2W_{ik}$ 的前定变量。考虑到解释变量包括了时间效应 Δt_k，而且又有迹象表明买卖价差与信息量和价格变动的易变性有关[如见格劳斯顿(Glosten，1987)]，哈斯布罗克(Hasbrouck，1988，1991a，b)，彼得森和尤姆劳夫(Petersen and Umlauf，1990)]，所以要包括滞后买卖价差 AB_{k-1}。又因为若没有附加的约束条件，无法识别向量 α，β 和 γ，所以令 γ_0^2 为 1。这样，σ_k^2 的设定形式为：

$$\sigma_k^2\equiv1+\gamma_1^2\Delta t_k+\gamma_2^2AB_{k-1}$$

总之，9 个状态的设定需要估计 24 个参数：即分界点 $\alpha_1,\cdots,\alpha_8$、方差的参数 γ_1 和 γ_2、解释变量的系数 $\beta_1,\cdots,\beta_{13}$ 和鲍克斯—考克斯参数 v。而 5 个状态的设定只需要估计 20 个参数。

极大似然估计值

表 3. 8a 和表 3. 8b 中的数据是六只股票的次序 Probit 模型的极大似然估计。表 3. 8a中的数据是分界点向量 α 的估计值。表 3. 8b 中的数据是系数向量 β 的估计值。表中的每列数据分别是每只股票的参数估计值，估计值下面括号内的数据是 z 统计量的值。Z 统计量在相应系数为 0 的原假设下服从标准正态分布。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 3.8a 次序 Probit 模型的临界分位点估计

(股票)参数	IBM	CUE	FWC	HNH	NAV	T
α_1	−4.670	−6.213	−4.378	−4.456	−7.263	−8.073
	(−145.65)	(−18.92)	(−25.24)	(−5.98)	(−39.23)	(−56.95)
α_2	−4.157	−5.447	−1.712	−1.801	−7.010	−7.270
	(−157.75)	(−18.99)	(−25.96)	(−5.92)	(−36.53)	(−62.40)
α_3	−3.109	−2.795	1.679	1.923	−6.251	−5.472
	(−171.59)	(−19.14)	(26.32)	(5.97)	(−37.22)	(−63.43)
α_4	−1.344	−1.764	4.334	4.477	−1.972	−1.850
	(−155.47)	(−18.95)	(25.26)	(5.85)	(−34.59)	(−61.41)
α_5	1.326	1.605	—	—	1.938	1.977
	(154.91)	(18.81)			(34.66)	(62.82)
α_6	3.126	2.774	—	—	6.301	5.378
	(167.81)	(19.11)			(36.36)	(62.43)
α_7	4.205	5.502	—	—	7.742	7.294
	(152.17)	(19.10)			(31.63)	(57.63)
α_8	4.732	6.150	—	—	8.638	8.156
	(138.75)	(18.94)			(30.26)	(56.23)

注：表中的数据是 IBM(206 794 个交易)、CUE(26 927 个交易)、FWC(18 199 个交易)、HNH(3 174 个交易)、NAV(96 127 个交易)和 T(180 726 个交易)的交易价格变动的次序 Probit 模型中，分界点的极大似然估计值。数据根据 1988 年 1 月 4 日～12 月 30 日的价格计算。

表 3.8b 次序 Probit 模型的系数估计

(股票)参数	IBM	CUE	FWC	HNH	NAV	T
$\gamma_1:\Delta t/100$	0.399	0.499	0.275	0.187	0.428	0.387
	(15.57)	(11.62)	(11.26)	(4.07)	(10.01)	(8.89)
$\gamma_2:AB_{-1}$	0.515	1.110	0.723	1.109	0.869	0.868
	(71.08)	(15.39)	(14.54)	(4.48)	(19.93)	(38.16)
$\beta_1:\Delta t/100$	−0.115	−0.014	−0.013	−0.010	−0.032	−0.127
	(−11.42)	(−2.14)	(−3.50)	(−2.69)	(−3.82)	(−9.51)
$\beta_2:Y_{-1}$	−1.012	−0.333	−1.325	−0.740	−2.609	−2.346
	(−135.57)	(−13.46)	(−24.49)	(−5.18)	(−36.32)	(−62.74)
$\beta_3:Y_{-2}$	−0.532	−0.000	−0.638	−0.406	−1.521	−1.412
	(−85.00)	(−0.03)	(−16.45)	(−4.06)	(−34.13)	(−56.52)
$\beta_4:Y_{-3}$	−0.211	−0.020	−0.223	−0.116	−0.536	−0.501
	(−47.15)	(−1.42)	(−9.23)	(−1.84)	(−31.63)	(−47.91)
$\beta_5:SP500_{-1}$	1.120	2.292	1.359	0.472	0.419	0.625
	(54.22)	(13.54)	(13.49)	(1.36)	(8.05)	(17.12)

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

(股票)参数	IBM	CUE	FWC	HNH	NAV	T
β_6：SP500$_{-2}$	−0.257	1.373	0.302	0.448	0.150	0.177
	(−12.06)	(9.61)	(2.93)	(1.20)	(2.87)	(4.96)
β_7：SP500$_{-3}$	0.006	0.677	0.204	0.388	0.159	0.141
	(0.26)	(5.15)	(1.97)	(1.13)	(3.02)	(3.93)
β_8：IBS$_{-1}$	−1.137	−1.915	−0.791	−0.803	−0.501	−0.740
	(−63.64)	(−15.36)	(−7.81)	(−2.89)	(−17.38)	(−23.01)
β_9：IBS$_{-2}$	−0.369	−0.279	−0.184	−0.184	−0.370	−0.340
	(−21.55)	(−3.37)	(−3.66)	(−0.75)	(−15.38)	(−18.11)
β_{10}：IBS$_{-3}$	−0.174	0.079	−0.177	−0.022	−0.301	−0.299
	(−10.29)	(0.98)	(−3.64)	(−0.17)	(−15.37)	(−19.78)
β_{11}：$T_v(V_{-1})$IBS$_{-1}$	0.122	0.217	0.050	0.038	0.013	0.032
	(47.37)	(12.97)	(1.80)	(0.55)	(2.56)	(4.51)
β_{12}：$T_v(V_{-2})$IBS$_{-2}$	0.047	0.036	0.015	0.036	0.011	0.014
	(18.57)	(2.83)	(1.54)	(0.55)	(2.54)	(4.22)
β_{13}：$T_v(V_{-3})$IBS$_{-3}$	0.019	0.007	0.015	−0.006	0.005	0.005
	(7.70)	(0.59)	(1.56)	(−0.34)	(2.09)	(3.02)

注：表中的数据为 IBM(206 794 个交易)、CUE(26 927 个交易)、FWC(18 199 个交易)、HNH(3 174 个交易)、NAV(96 127 个交易)和 T(180 726 个交易)的交易价格变动的次序 Probit 模型的解释变量的系数的极大似然估计值。根据 1988 年 1 月 4 日～12 月 30 日的交易价格计算。

从表 3.8a 可以看到所有股票分界点的估计值的精确度都很高，而且观测值多的股票其相应的 z 统计量的值也比较大。

注意分界点不是等间距的，如 $|\alpha_3-\alpha_4|=1.765$，而 $|\alpha_4-\alpha_5|=2.670$(可以证明这两个值的统计意义也不相同)。这就意味着离散价格的栅栏模型[如，马歇和罗森斐尔德(Marsh and Rosenfeld，1986)的模型]与交易数据并不相符。此外，价格变动的条件分布也不必是正态分布，可以(也的确)呈现出类似于价格变动的无条件分布在 1/8 美元的偶数倍上的聚集现象。

从表 3.8b 可以看出 Δt_k 对六只股票的 Y_k^* 的条件均值影响很弱。而且，z 统计量的值也很小，对样本量大的股票来说，z 统计量的值就更小。但是，Δt 在 σ_k^2 的表达式中是显著的；——实际上，由于 σ_k^2 的所有参数都是显著的，因此可以拒绝同方差的假设——由此可见时间因素是决定条件方差的一个重要因素，但对 Y_k^* 的条件均值来说，时间因素并不重要。注意这并不一定意味着 Y_k 的条件分布(与 Y_k^* 的条件分布之间是非线性关系)也有此特性。例如，Y_k 的条件均值可能会依赖 Y_k^* 的条件方差，从而即使时间因素不影响 Y_k^* 的条件均值，但它仍然会影响价格变动观测值的条件均值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

价格变动序列，离散性和价格受到的影响

更让人感兴趣的结果是滞后价格变动的系数$\hat{\beta}_2$，$\hat{\beta}_3$ 和 $\hat{\beta}_4$ 的符号和显著性。在所有股票的估计模型中，这三个系数都是负数，这也意味着股票价格具有反弹的趋势。例如，如果前三次的价格变动都是一个单位，那么 Y_k^* 的条件均值的变动则是$\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3+\hat{\beta}_4$。但如果前三次的价格变动是 1/−1/1，那么 Y_k^* 的条件均值的变动则是$\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3+\hat{\beta}_4$。对其中任何一只股票的参数估计值来说，这个值都更接近零。

注意，这些系数度量的反弹趋势大于罗尔(Roll，1984)的模型中由恒定的买卖价差所引起的反弹趋势。指示变量 IBS_{k-1}，IBS_{k-2}，IBS_{k-3} 出价—要价波动对条件均值的影响。在缺乏其他信息(如整个市场的变动或股票以前的价格变动)的情况下，这些指示变量反映的是："买入"或"卖出"的价格效应对条件均值所产生的影响。正如我们所预计的，指示变量系数的估计值几乎都是负数，这说明由于交易价格在出价和要价之间波动，所以存在价格的反弹趋势。豪斯曼、罗和麦金雷(Hausman，Lo and MacKinlay，1992)比较了它们的大小，并得到以下的结论：价格变动的条件均值与价格变动的过程相关，即价格变动序列是一个重要的因素。

豪斯曼、罗和麦金雷(Hausman，Lo and MacKinlay，1992)利用这些参数估计值还讨论了他们在前面提出的另外两个问题。价格受到的影响——一笔交易对股票市场价格的影响——可以被非常精确地度量。这种影响随交易的增加而增强，但变化方式是非线性的，而且不同股票的价格受到影响的程度也不同。像 IBM 这种流动性较大的股票，交易量在其价格冲击函数中的作用比较小；而对 HNH 这种流动性较小的股票，它们的价格受到的影响对交易量就很敏感[见豪斯曼、罗和麦金雷(Hausman，Lo and MacKinlay，1992，图 4)]。

此外，离散性也是一个很重要的因素。因为次序 Probit 模型的设定所隐含的价格变动的条件分布可以反映某种非线性——例如，价格总是集中在 1/8 美元的偶数倍上——而其他方法(如最小二乘法)却无法捕获这一特性。

次序 Probit 模型在市场微观结构的研究中是否会有更广泛的应用，关于这一点现在下结论还为时尚早，但它是目前惟一一个能够捕获价格的离散性，无规律的交易期间和经济变量对交易价格的影响作用的模型。

3.5 结 论

多亏有了大量的交易数据库，关于市场微观结构的文献中许多悬而未决的经济和计

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

量经济学的问题现在都能被解决。在本章中，我们只涉及了其中的三个问题：异步交易，买卖价差和为交易数据建模。不过，交易数据库和日益增强的计算能力的结合肯定会产生许多新的研究方向。例如，大的机构投资者一直都在关注交易费用的控制和衡量，但是因为以前缺少必要的数据，所以有关这个问题的学术研究很少。类似地，近期的证券价格的理论模型突出了对市场透明度，流动性和竞争程度的度量，但由于以前缺乏数据，所以实际上不可能将这些理论模型付诸实现。关于实验市场的文献也有助于理解市场微观结构中的问题，但是它的巨大的潜力才刚开始被认识到。倘若学术界，专业投资人士和证券市场的规章制定者对市场微观结构的兴趣日益浓厚，那么今后几年内在该领域中肯定会出现许多令人激动的研究成果。

习 题

3.1 推导第 3.1 节的无交易模型中观测收益序列$\{r_{it}^0\}$的均值、方差、自协方差和自相关系数公式(3.1.9)至公式(3.1.12)。(提示：利用式(3.1.4))

3.2 根据公式(3.1.2)～公式(3.1.3)定义的无交易过程，并假定实际收益是一元线性函数，如式(3.1.1)；说明无交易现象是怎样影响证券β的估计值的。注意，证券的β系数是证券收益对市场组合收益的回归方程中的斜率。

3.3 假定式(3.1.2)定义的交易过程$\{\delta_{it}\}$并非独立同分布，而是服从两状态的马尔可夫过程，其转换概率矩阵是：

$$\begin{array}{cc} & \delta_{it} \\ & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \delta_{it-1} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\begin{pmatrix} \pi_i & 1-\pi_i \\ 1-\pi_i' & \pi_i' \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.5.1}$$

3.3.1 推导出δ_{it}的无条件均值，方差，一阶自协方差以及稳定状态下的分布，将其表示成π_i及π_i'的函数。

3.3.2 计算在(3.5.1)式假定下观测收益过程r_{it}^0的均值、方差和自相关系数，并说明δ_{it}的序列相关性是怎样影响观测收益的矩的。

3.3.3 假定实际收益过程是独立同分布的，用单个证券的日收益来估计参数π_i和π_i'。这些估计值合理吗？

3.4 在罗尔(Roll,1984)模型中引进一个序列相关的次序指示变量：令I_t是一个服从两点马尔可夫过程的变量，它的两个状态是-1和1。推导出ΔP_t关于s和I_t的转换概率的矩表达式。这个结果与独立同分布情况下的结果有什么不同？在这个更一般的出价—要价波动模型中，你怎样重新解释罗尔(Roll,1984)的研究成果？

3.5 价格的离散性是怎样影响收益的均值、标准误和一阶自相关系数估计值的特性的？提示：用各种初始价格来模拟出连续价格，再对它们进行离散化处理，然后计算收益的统计量并将相关的抽样分布列成数表。

3.6 下面的问题涉及到 NYSE 的*TAQ*数据库的记录。这些记录包括 IBM 股票 1988 年 1 月 4 日

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

和 5 日的所有交易数据(共有 2 748 个数据)。

3.6.1 绘出 IBM 股票价格的直方图。图中是否有价格聚集的迹象？绘出 IBM 股票价格变动的直方图。股票价格的变动是否有聚集的迹象？比较和对照两种直方图，分别绘出为 1/8 美元偶数倍的价格变动和为 1/8 美元奇数倍的价格变动的直方图，并评价离散价格在统计推断中的作用。

3.6.2 IBM 的平均交易间隔是多长？为平均交易间隔构造一个 95%的置信区间。利用这些数据和中心极限定理，计算 IBM 在任意一个长度为 1 分钟的时间间隔中不发生交易的概率。用长度为 1 分钟的时间间隔来分割一个交易日，直接估计无交易的无条件概率和条件概率。条件概率是以前 1 分钟是否发生了交易为条件。(提示：可以考虑一下马尔可夫链)无交易过程是否是独立过程？

3.6.3 以时间为横轴，在同一张图中绘出交易价格和交易量的图形。图中是否有无法辨别的图形？对这种可能由经济因素引起的图形进行统计检验(如大宗交易引起的价格变动比小笔交易大①)。

3.6.4 修改并估计度量价格所受到的影响的模型，即交易 n 股 IBM 股票的实际费用。你可以使用任何一种统计方法，这个问题并不是只有一个正确答案(次序 Probit 模型并不一定是最佳的模型)。要仔细地考虑衡量价格所受到的影响的经济上的动机。

3.7 下面的问题涉及到 NYSE 的 *TAQ* 数据库的记录。这些记录包括 IBM 股票 1988 年 1 月 4 日和 5 日的所有出价和要价(共有 1 327 条报价记录)。

3.7.1 绘出 IBM 买卖价差的直方图。你能从中得出买卖价差的动态特性并不重要的结论吗？为什么？要正确地回答这个问题可能还要绘出各种条件直方图。

3.7.2 在修改报价和股票交易之间是否还存在一些未能辨明的关系？是修改报价促使交易发生，还是股票交易引起了报价的修改？提出并估计一个模型来回答这个问题。

3.7.3 出价和要价的变动与交易量有什么关系？例如，是报价的变动促使交易发生，还是股票交易引起报价的变动？提出并估计一个模型来回答这个问题。

3.7.4 考虑一个资产分配原则：投资者全部投资于股票，直到他连续三次遇到股价下跌；然后投资者将完全投资于债券，直到他连续六次遇到价格上涨。用 10 万美元的初始资金来进行这种投资，有两种交易方式：(1)用出价和要价的平均值进行交易；(2)以要价买进，以出价卖出。两个交易日后他还剩多少钱？(在本题中，可以假定无风险利率为 0。)

---

① NYSE 将 1 万股以上的交易规定为大宗交易。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

4. 事件研究分析

衡量一个经济事件对企业的影响是经济学家经常关心的问题。表面上这似乎比较困难，但在利用金融市场数据进行的事件研究中可较容易地构建此类度量。这种事件研究的有用性源于这样的事实，即在理性的市场下某一事件的影响会很快在资产价格上反映出来。由此，事件的经济影响可利用由相对短暂的一段时期内观测到的资产价格来度量。而相比之下，对这种经济影响的直接度量可能需要几个月甚至几年的观测数据。

事件研究方法具有普遍适用性，因此已得到了广泛应用。在会计和金融学术领域，事件研究方法已被应用到了小到公司、大到整个经济的各种经济事件中，如兼并与收购、收益公告、新发行的债券或股票以及关于贸易赤字等宏观经济变量的公告。[①] 但是，该方法在其他领域的应用也是很广泛的，如事件研究被应用到法律和经济学中；度量在调控环境下，某一变化对公司价值的影响[②]；在法律债务案件中，事件研究被用来对损失进行评估。[③] 在大多数应用方面，事件研究主要集中在研究事件对公司的某一类证券价格带来的影响，通常是指对普通股的影响。本章以普通股的应用为例来讨论这一方法。但该方法也可被应用到债券中，几乎不需做任何改动。

事件研究已有很长一段历史，也许从事这一研究首次出版著作的人是多利(Dolley，1933)。多利观察了股本分散转移的价格影响，研究在分散转移时名义价格的变动。多利使用了1921～1931年的95个股本分散转移的样本，发现其中57个价格上升，只有26个价格下降，其余12个价格没有发生变化。从20世纪30年代早期至20世纪60年代末事件研究进一步复杂化。梅耶斯和拜克伊(Mayers and Bakay，1948)，拜克伊(Bakay，1956，1957，1958)，阿什利(Ashley，1962)对此进行了研究和改进，除去了普通股票市场的价格

---

① 我们将在本章的后面进一步讨论前三个例子。麦昆和罗利(McQueen and Roley，1993)利用宏观经济信息披露提供了一个例子。

② 见施沃特(Schwert，1981)。

③ 见米切尔和纳特(Mitchell and Netter，1994)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

变动，并分离出混乱的事件。20 世纪 60 年代末，由鲍尔和布朗(Ball and Brown，1968)以及法马、费雪尔、杰森和罗尔(Fama，Fisher，Jensen and Roll，1969)所进行的富有创造性的研究中引入了我们当今仍然主要使用的研究方法。法马、费雪尔、杰森和罗尔研究了当去除了同期红利增长的影响后，股本分散转移产生的影响。

自这些开创性研究以来，有人对这一方法的许多方面提出了改进的建议。这些改进针对当违背以前工作中所做的统计假设后出现的复杂情况进行了处理，而且还适用于更具体的假设情况。布朗和沃纳(Brown and Warner，1980，1985)所写的文章便是对这些改进的实际重要性进行讨论的较有价值的论文。其中 1980 年的论文考虑了月度样本数据的应用情况，而 1985 年的论文则是针对每日的数据情况进行讨论。

本章解释了事件研究的计量经济方法。第 4.1 节简要概括了事件研究的程序。第 4.2节举了一个应用事件研究方法的一个例子。任何事件研究的重点都是非正常收益的度量。第 4.3 节详细叙述了事件研究的第一个步骤，即正常绩效的度量。第 4.4 节讲述了计算非正常收益、对收益进行统计推断以及对事件多个观察结果求和的一些必要工具。第 4.3 节和第 4.4 节的讨论建立了零假设，即事件对收益分布没有影响。第 4.5 节对原假设进行了修改，收益分布以均值为中心。第 4.6 节分析了事件研究的势。第 4.7 节将一种非参数方法应用到消除了参数结构的事件研究中。在某些情况下理论提供了关于事件非正常收益的大小与公司特征之间的关系。第 4.8 节讨论了在事件研究设计中一些深层次的问题，第 4.10 节对本章做一总结。

4.1 事件研究的概述

本节开始有必要对事件研究的结构进行简要的概述。当不存在惟一结构的事件中，则可从以下七个步骤进行分析：

1. 事件的定义

进行事件研究的第一步就是对重要事件进行定义，并确定该事件涉及到的公司的证券价格进行考察的时期，这一时期称为“事件窗”。例如，如果一个人在查看包括每日数据的收益公告的信息内容时，事件就是收益公告，事件窗则可能是公告中的某一天。实际上，事件窗经常被延长到两天，即公告的当天和公告的第二天。这样做的目的是获得公告日股票市场收盘后公告对价格的影响。事件的前一时期和后一时期可能也很重要，也应分别包括在分析中。例如在收益公告中，市场可能需要关于实际公告以前的收益信息，我们则可以通过考察以前事件的收益来研究这一可能性。

2. 选择标准

在确定了重要事件后，有必要对在研究中是否应将某一公司包括在内确定选择标准。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这一标准应包含数据可获性的限制，如在纽约证券交易所（NYSE）或美国商品交易所（AMEX）的上市公司数据的可获得性的限制，也应包含某一行业的成员限制等。在这一阶段，有必要对数据样本的一些特征进行总结（如公司市场的资本化，产业的代表性以及整个时期各事件的分布），并注意在样本选择过程中可能带来的有偏性。

3. 正常和非正常收益

为了评价事件的影响，我们需要对非正常收益进行度量，非正常收益是事件窗时期证券的实际事后收益减去事件窗时期公司的正常收益。正常收益被定义为事件未发生时的期望利润。对每个公司 i 和时期 t 来说，

$$\varepsilon_{it}^{*}=R_{it}-\mathrm{E}[R_{it}\mid X_{t}] \tag{4.1.1}$$

其中，ε_{it}^{*}，R_{it} 和 $E(R_{it})$ 分别代表 t 时期的非正常收益、实际收益和正常收益。X_{it} 是正常绩效模型的条件信息。正常收益有两种常用模型可供选择，即常量—均值—收益模型（其中 X_{it} 是一个常量）和市场模型（其中 X_{it} 代表市场收益）。常量—均值—收益模型，顾名思义，是假定某一证券的平均收益在一段时期内是一个常量。市场模型则假定市场收益和证券收益之间存在稳定的线性关系。

4. 估计程序

一旦选定了一个正常绩效模型，模型的参数也必须使用被称为估计窗的数据子集进行估计。只要可行，对估计窗数据子集最一般的选择是使用事件窗的前一时期。例如，在使用日数据和市场模型的事件研究中，市场模型参数可通过事件发生前 120 天的数据进行估计。通常说来，事件发生的当期并不包括在估计时期内，以防止该事件影响正常绩效模型的参数估计。

5. 检验程序

当得到正常绩效模型的参数估计后，就可以计算非正常收益了。下一步我们需要设计出检验非正常收益的框架。需重点考虑原假设的设定以及各公司非正常收益的汇总技巧。

6. 实证结果

实证结果是以计量经济学的公式来表达。除表达基本的实证结果，诊断也很有效。有时，尤其是在利用有限的事件观察数据进行研究时，实证结果可能会较大地受到一、两个公司的影响。明白这一点对评价实证结果的价值是很重要的。

7. 解释和结论

从较理想的角度上来说，实证结果有助于了解事件影响证券价格的机制。为了对各种解释进行区分，还应包括一些附加的分析。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

4.2 事件研究举例

财务会计标准委员会(FASB)和证券交易委员会制定各种公告规则，目的是为了通过财务报表和相关信息披露可以了解关于公司价值的信息。在制定规则时，财务披露的信息内容很重要。事件研究为考察披露的信息内容提供了一种理想的工具。

在这一节中，我们选择了一个具体事例来描述事件研究方法。首先考虑一种特殊的信息披露形式——季度收益公告。我们调查了从 1988 年 1 月～1993 年 12 月这五年期间道・琼斯工业指数中 30 家公司的季度收益公告的信息内容。这些公告与 1987 年最后一个季度到 1993 年第三个季度的季度收益相符合。这 30 家公司的五年数据提供了一份 600 个公告的总体样本。每家公司的每一季度都有三项信息：公告日期、实际公告收益以及预期收益的度量。公告数据的来源是 Datastream，实际收益的信息来源是 Compustat。

如果收益公告是向投资者传达信息的话，人们就会期望公告对公司股本市场估价的影响依赖于报告中未预期部分的大小。因此需要计算实际公告收益与市场原来预期收益之间的离差。我们用 I/B/E/S(机构经纪人预测系统)的平均季度收入预测来代表市场的预期收益。I/B/E/S 中编辑了根据许多公司的分析所做的预测，并公布每月汇总的统计资料。平均值预测是来自本季度最后一个月的数值。例如，1990 年第三季度最后一个月九月份的平均收益用于度量 1990 年第三季度的期望收益。

为了考察收益公告对公司资产价值的影响，我们将每一份公告分成三种类别：好消息、无消息或坏消息，根据实际收益与期望收益的离差将每一公告进行分类。如果实际收益比预期收益低于 2.5%以上，则该公告称为坏消息。实际收益在预期收益的 5%的范围内波动，则称该公告为无消息。在 600 份公告中，189 份属于好消息，173 份属于无消息，剩余 238 份是坏消息。

公告进行分类后，下一步就是确定取样区间、事件窗以及将来用来分析公司股本收益行为的估计窗。例如我们假定取样区间为一天，那么就必须计算每日的股票收益。我们选择 41 天作为事件窗，包括事件前的 20 天，事件发生日以及事件后的 20 天。对每一份公告使用事件窗前 250 个交易日作为估计窗，叙述了事件研究方法之后举出具体事例加以说明。

4.3 正常绩效度量模型

计算某一证券的正常收益有许多方法。这些方法可以不太严格地分为两类——统计

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

方法和经济方法。第一种方法是以关于资产收益行为的统计假设为基础，而不依赖于任何经济理论。相比较，第二种方法以有关投资者行为的假设为基础，并不只依赖于统计假设。但是在实际中使用经济模型时必须进行统计假设。因此经济模型的潜在优势不是不需要统计假设，而是有可能运用经济的各种限制条件更精确地度量正常收益。

为方便起见，统计模型假定各种资产收益联合服从多变量的独立同分布。用正规的形式表达，即：

(A1)令 $\mathbf{R}_t$ 是公历日 t 期资产收益的 $(N\times 1)$ 阶行向量。对每一个 t，$\mathbf{R}_t$ 服从独立的多元正态分布，均值为 μ，协方差矩阵为 $\mathbf{\Omega}$。

在这一分布假设下，可以正确地确定常量—均值—收益模型和市场模型，并可对估计量和统计数据的有限样本的分布结果进行拓展。利用这种正态收益模型进行的推断对从假设得出的离差是有根据的。进一步使用推广的矩法可明确地调节离差。

4.3.1 常量—均值—收益模型

令 μ_i，μ 的第 i 个值是资产 i 的平均收益。那么常量—均值—收益模型为：

$$R_{it}=\mu_i+\xi_{it}$$

$$E[\xi_{it}]=0 \quad \mathrm{Var}[\xi_{it}]=\sigma^2_{\xi_i} \tag{4.3.1}$$

其中，R_{it} 是 $\mathbf{R}_t$ 的第 i 个元素，是证券 i 的 t 期收益，ξ_{it} 是扰动项，$\sigma^2_{\xi_i}$ 是 $\mathbf{\Omega}$ 的第 (i,i) 个元素。

尽管常量—均值—收益模型可能是最简单的模型，布朗和沃纳(Brown and Warner，1980，1985)发现该模型产生的结果与那些更复杂模型的结果很相似。由于在选择了一个更加复杂的模型后非正常收益的方差通常减少不大，因此造成了模型选择的不敏感性。当使用日数据时，模型可被典型地应用到名义收益中。当使用月度数据时该模型可被运用于实际收益或剩余收益(通常是指超过根据美国财政法案测定的名义无风险收益的剩余收益)。

4.3.2 市场模型

市场模型是某一证券的收益对市场证券组合收益相关的统计模型。模型的线性识别是以假定资产收益服从联合正态分布为基础。[①] 对任何证券 i，我们有：

$$R_{it}=\alpha_i+\beta_i\cdot R_{mt}+\varepsilon_{it} \tag{4.3.2}$$

① 这一规范实际上要求市场证券组合中各资产的份额保持恒定。然而，市场证券组合份额在时间上的变化对实证结果的影响极小。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$E[\varepsilon_{it}]=0 \quad Var[\varepsilon_{it}]=\sigma_{\varepsilon_i}^2$$

其中，R_{it}和R_{mt}分别是证券i和市场证券投资组合在t期的收益，ε_{it}是零均值扰动项。α_i、β_i和$\sigma_{\varepsilon_i}^2$都是市场模型的参数。在实际应用中，市场投资组合使用广义的股票指数，比较受欢迎的指数有S&P500指数、CRSP加权指数以及CRSP等权指数。

市场模型是对常量—均值—收益模型改进的一种模型。通过除去与市场收益变化有关的收益部分，减少了非正常收益的方差。这样可以增强检测事件效应的能力。使用市场模型的优点取决于市场模型回归的R^2值。R^2值越大，非正常收益的方差减少的就越多，收益就越大。第4.4.4节专门就这一点进行了讨论。

4.3.3 其他统计模型

其他许多统计模型可以用于正常收益的建模。一般的统计模型是因素模型。因素模型可以更多地解释正常收益的方差，因此具有可以减少非正常收益方差的优点。典型地来说，各个因素是买卖证券的投资组合。市场模型是单因素模型的例子，但在多因素模型中，除了市场这一因素外，还可以包括行业指数。夏普(Sharpe,1970)和夏普、亚历山大和贝利(Sharpe,Alexander and Bailey,1995)在行业分类的基础上讨论了多因素的指数模型。因素模型的另一变量是通过相同规模公司的实际收益和投资组合之间的差异来计算非正常收益，而公司的规模则是根据股本的市场价值来计算。在这种方法中，通常考虑十种规模组，规模投资组合的载荷受一致性的约束。这一过程假定期望收益与股本的市场价值直接相关。

实际上，事件研究使用多因素模型的优点是很有限的。原因在于除了市场因素以外，附加因素的边际解释能力很小，因此不能减少非正常收益的方差。当样本公司有共同的特征，如他们都属于同一行业或集中于同一市场资本化集团时，方差减少最多。在这些情况下应考虑使用多因素模型。

有时由于数据获取的有限性就需使用有约束的模型，如市场调节收益模型。对某些事件来说，正态模型参数不太可能有一个事件前估计期，因此就必须使用市场调节的非正常收益。市场调节收益模型可看成是α_i受约束于0、β_i受约束于1的受限制的市场模型。由于模型系数预先规定好了，参数估计就不需要确定估计期了。这一模型经常被用于研究初次公开发行的证券折价①。我们建议这种受约束的模型仅作为最后考虑的方法，并切记如果约束条件错误，就会带来偏误。

① 例子见里特(Ritter,1990)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

4.3.4 经济模型

为了得到更受约束的正态收益模型，经济模型对统计模型的参数进行限制。两个相同的经济模型是资本资产定价模型(CAPM)和套利定价模型(APT)。夏普(Sharpe，1964)和林特纳(Lintner，1965b)认为 APT 模型是一个平衡理论，某一特定资产的预期收益是市场投资组合的协方差的线性方程。罗斯(Ross，1976)认为 APT 模型是资产定价模型，在没有无担保套利时，某一给定资产的期望收益由多因素的协方差决定。第 5 章和第 6 章对这两个模型进行了拓展。

20 世纪 70 年代的事件研究中，资本资产定价模型得到了广泛应用。但在过去的十年中，已发现 CAPM 模型出现了偏差，这对 CAPM 对市场模型带来的约束的有效性提出了质疑。因此事件研究几乎停止使用了 CAPM 模型。

一些研究已使用以 APT 理论为基础的多因素正常绩效模型。APT 模型可用于拟合平均收益的横截面，正如法马和弗兰切(Fama and French，1996A)及其他人所述。所以一个正确选择的 APT 模型不会给平均收益带来错误约束。另一方面 APT 的使用使事件研究的应用复杂化，并相对于不受限制的市场模型来说几乎没有实际优势，正如布朗和温斯坦(Brown and Weinstein，1985)所述。看来在事件研究中，使用经济模型而不使用统计模型是没有任何理由的。

4.4 度量和分析非正常收益

本节我们将讨论度量和分析非正常收益的问题。我们将市场模型作为正常绩效收益模型，但这一分析实际上与常量—均值—收益模型的分析相同。

我们首先定义一些符号，用 τ 表示事件时间的收益。$\tau=0$ 作为事件日，$\tau=T_1+1$ 至 $\tau=T_2$ 代表事件窗，$\tau=T_0+1$ 至 $\tau=T_1$ 构成了预期窗。令 $L_1=T_1-T_0$，$L_2=T_2-T_1$ 分别代表估计窗和事件窗的长度。若被考虑的事件是指定日的公告，那么 $T_2=T_1+1$，$L_2=1$。如果合适的话，后事件窗将从 $\tau=T_2+1$ 至 $\tau=T_3$，其长度为：

$L_3=T_3-T_2$。时间序列表示在图 4.1 的时间轴上，如下：

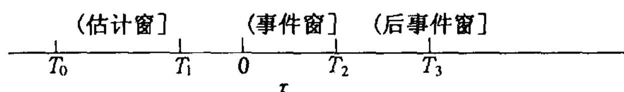


图 4.1 事件研究的时间轴

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

我们将事件窗的非正常收益定义为事件对公司价值(或其股本)影响程度的度量。那么,这一方法内在地就假定事件相对于证券的市场价格的变化是外生的。换句话说,公司价值的改变是由事件引起的。在大多数情况下,这一方法是适用的,但也有例外。可举出一些事例,说明事件是由于证券市场价值的变化引起的,在这种情况下事件是外生的,因此通常的解释就是不正确的。

一般情况下,估计窗和事件窗不会发生重叠。这一方法为正常收益模型的系数提供了估计值,而正常收益模型并不受与事件相关收益的影响。将事件窗包括在正态模型参数的估计中,可能会造成事件收益对正常收益度量带来较大的影响。在这种情况下,正常收益和非正常收益将反映事件的影响。由于这一方法是建立在非正常收益对事件造成影响这一假设上的,这就会带来一些问题。第 4.5 节我们考虑了将原假设进行扩展,将事件中公司的风险变化包括进来,此时就必须设计出使用事件窗收益的估计模型。

4.4.1 市场模型的估计

回忆证券 i,事件期观察值 τ 的市场模型是:

$$R_{i\tau}=\alpha_i+\beta_i\cdot R_{m\tau}+\varepsilon_{i\tau} \tag{4.4.1}$$

估计值窗观察值可表示成一个回归系统:

$$\boldsymbol{R}_i=\mathbf{X}_i\boldsymbol{\theta}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{4.4.2}$$

其中,$\mathbf{R}_i=[R_{iT_0+1}\cdots R_{iT_1}{}']$是估计窗收益的$(L_1\times 1)$阶行向量。$X_i=[\iota R_m]$是$(L_2\times 2)$阶矩阵,第一列是全为 1 的向量,第二列是市场收益观察值 $\mathbf{R}_m=[R_{mT_0+1}\cdots R_{mT_1}]'$,$\theta_i=[\alpha_i\beta_i]'$是$(2\times 1)$阶参数向量。$\mathbf{X}$ 带角标,是因为对每个公司 i 都有一个特定的时间。普通最小二乘法(OLS)是市场模型参数的一致估计方法。若第 4.3 节的假设给定 OLS 是有效的。使用 L_i 估计窗观察值的市场参数模型的 OLS 估计量为:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i=(\mathbf{X}'_i\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}'_i\boldsymbol{R}_i \tag{4.4.3}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_i}=\frac{1}{L_1-2}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_i\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \tag{4.4.4}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i=\boldsymbol{R}_i-\mathbf{X}_i\hat{\boldsymbol{\theta}}_i \tag{4.4.5}$$

$$\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_i]=(\mathbf{X}'_i\mathbf{X}_i)^{-1}\cdot\sigma^2_{\varepsilon_i} \tag{4.4.6}$$

我们下一步就来讲如何用 OLS(最小二乘估计)来度量非正常收益的统计特性。首先我们考虑某一给定证券的非正常收益的特性,然后我们对各类证券进行加总。

4.4.2 非正常收益的统计特性

假定市场模型的参数估计已知,我们就可以度量和分析非正常收益。令 $\hat{\varepsilon}_i{}^*$ 是公司 i

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

从 T_1+1 至 T_2 的非正常收益样本的($L_2\times1$)阶向量。然后根据公式(4.4.3)利用市场模型度量正常收益的 OLS 估计量，于是我们就得到非正常收益向量：

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_i^* &= \mathbf{R}_i^* - \hat{\alpha}_i \iota - \hat{\beta}_i \mathbf{R}_m^* \\ &= \mathbf{R}_i^* - \mathbf{X}_i^* \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

其中，$\mathbf{R}_i^*=[R_{iT_1+1}\cdots R_{iT_2}]'$是估计窗收益的($L_2\times1$)阶行向量。$\mathbf{X}_i^*=[\iota R_{1m}]$是($L_2\times 2$)阶矩阵，第一列是全为 1 的向量，第二列是市场收益观察值 $\mathbf{R}_m^*=[R_{mT_1+1}\cdots R_{mT_2}]'$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i=[\hat{\alpha}_i\hat{\beta}_i]'$是($2\times1$)阶参数估计。以事件窗的市场收益为条件，非正常收益服从条件均值为0、条件协方差矩阵 $\mathbf{V}_i$ 的联合正态分布，分别如(4.4.8)式和(4.4.9)式所示。

$$\begin{aligned}E[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^* \mid \mathbf{X}_i^*] &= E[\mathbf{R}_i^* - \mathbf{X}_i^* \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \mid \mathbf{X}_i^*] \\ &= E[(\mathbf{R}_i^* - \mathbf{X}_i^* \boldsymbol{\theta}_i) - \mathbf{X}_i^* (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_i) \mid \mathbf{X}_i^*] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_i &= E[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^* \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{*\prime} \mid \mathbf{X}_i^*] \\ &= E[[\boldsymbol{\varepsilon}_i^* - \mathbf{X}_i^* (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_i)][\boldsymbol{\varepsilon}_i^* - \mathbf{X}_i^* (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_i)]' \mid X_i^*] \\ &= E[\boldsymbol{\varepsilon}_i^* \boldsymbol{\varepsilon}_i^{*\prime} - \boldsymbol{\varepsilon}_i^* (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_i)' \mathbf{X}_i^{*\prime} - \mathbf{X}_i^* (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_i) \boldsymbol{\varepsilon}_i^{*\prime} \\ &\quad - \mathbf{X}_i^* (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_i)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_i)' \mathbf{X}_i^{*\prime} \mid \mathbf{X}_i^*] \\ &= \mathbf{I}\sigma_{\epsilon_i}^2 + \mathbf{X}_i^* (\mathbf{X}'_i \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^{*\prime} \sigma_{\epsilon_i}^2 \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

其中，$\mathbf{I}$ 是($L_1\times L_2$)阶单位矩阵。

从(4.4.8)式我们可以看出非正常收益向量，期望为零，具有无偏性。从(4.4.9)式得到的非正常收益向量的协方差矩阵由两部分组成。和式的第一项是源于未来扰动项造成的方差，第二项源于 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ 的抽样误差造成的附加方差。这一抽样误差对非正态收益向量的所有元素来说都是普遍存在的，虽然真正的扰动项始终相互独立，但会造成非正常收益之间序列相关，随着估计窗 L_1 长度的增大，当参数的抽样误差消失时，第二项就近似等于零，并且各时期的非正常收益将相互独立。

在原假设 H_0 的条件下，假定已知事件对收益的均值和方差无影响，我们利用(4.4.8)式和(4.4.9)式以及非正常收益的联合正态分布的性质可以进行推断。满足 H_0 时，对与事件窗样本的非正常收益，我们可以得到：

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^* \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{V}_i) \tag{4.4.10}$$

(4.4.10)式描述了任何单个非正常收益观察值的分布。下一步我们在这一结论的基础上对非正常收益进行加总。

4.4.3 非正常收益的加总

为了对重要事件进行整体推断，就必须对非正常收益的观察值进行加总。总和包括两个方面——各个时期和各种证券。我们首先考虑一种证券各个时期的加总，然后考虑

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

各种证券各个时期的加总。

我们在事件窗的范围内引入累积非正常收益以调节多样本区间。将 $CAR(\tau_1,\tau_2)$定义为证券 i 从 τ_1 至 τ_2 的累积非正常收益，其中 $T_1<\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant T_2$。令 γ 是$(L_2\times1)$维向量，τ_1-T_1 至 τ_2-T_2 为 0，其余为 0。然后我们有：

$$\widehat{CAR}_i(\tau_{\tau_1},\tau_2)\equiv\gamma'\hat{\varepsilon}_i^* \tag{4.4.11}$$

$$\mathrm{Var}[\widehat{CAR}_i(\tau_1,\tau_2)]=\sigma_i^2(\tau_1,\tau_2)=\gamma'\mathbf{V}_i\gamma \tag{4.4.12}$$

在原假设 H_0 的条件下，由(4.4.10)式可得到

$$\widehat{CAR}_i(\tau_1,\tau_2)\sim\mathcal{N}(0,\sigma_i^2(\tau_1,\tau_2)) \tag{4.4.13}$$

我们可以使用标准化的累积非正常收益通过(4.4.13)式对证券 i 构造 H_0 检验：

$$\widehat{SCAR}_i(\tau_1,\tau_2)=\frac{\widehat{CAR}_i(\tau_1,\tau_2)}{\hat{\sigma}_i(\tau_1,\tau_2)} \tag{4.4.14}$$

其中，$\hat{\sigma}_i^2(\tau_1,\tau_2)$ 是 $\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2$ 通过(4.4.4)式代替 $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ 所得。在原假设下$\widehat{SCAR}_i(\tau_1,\tau_2)$的分布服从自由度为 L_1-2 的学生 t 分布。根据学生 t 分布的性质，$\widehat{SCAR}_i^2(\tau_1,\tau_2)$的期望为 0，方差为$\left(\frac{L_1-2}{L_1-4}\right)$。对一个较大的估计窗(如 $L_1>30$)，$\widehat{SCAR}_i(\tau_1,\tau_2)$的分布可以用标准正态来近似。

以上结果仅适用于一个事件的样本，对于由许多事件观察值组成的样本进行加总这一通常情况下，这一结果就必须加以扩展。如果要对不同证券各个时期进行加总，我们就必须假定各证券的非正常收益之间不相关。这通常是指没有聚类的情况，即所包括证券的事件窗之间没有重叠。当不存在重叠并符合分布假设的情况下，各证券的非正常收益和累积非正常收益将相互独立。聚类推断我们将在以后讨论。

单个证券的非正常收益可以通过(4.4.7)式用 $\hat{\varepsilon}_i^*$ 进行平均。给定 N 个事件的一个样本，定义 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ 为 N 个非正常收益向量的样本平均值，我们得到：

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^* \tag{4.4.15}$$

$$\mathrm{Var}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*]=\mathbf{V}=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{V}_i \tag{4.4.16}$$

我们可以用处理单个证券非正常收益向量的方法，将各平均非正常收益向量的各元素加总。将$\overline{CAR}(\tau_1,\tau_2)$定义为从 τ_1 至 τ_2 的累积非正常平均收益，其中 $T_1<\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant T_2$，令 γ 是$(L_2\times1)$维向量，τ_1-T_1 至 τ_2-T_2 的个元素为 1，其余元素为 0。对于累积非正常平均收益，我们可得到：

$$\overline{CAR}(\tau_1,\tau_2)\equiv\gamma'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \tag{4.4.17}$$

$$\mathrm{Var}[\overline{CAR}(\tau_1,\tau_2)]=\bar{\sigma}^2(\tau_1,\tau_2)=\gamma'\mathbf{V}\gamma \tag{4.4.18}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

同样地，为得到$\overline{\mathrm{CAR}}(\tau_1,\tau_2)$，我们可以对每一证券 i 的样本累积非正常收益进行加总。对于 N 个事件，有：

$$\overline{\mathrm{CAR}}(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\mathrm{CAR}}_i(\tau_1,\tau_2) \tag{4.4.19}$$

$$\mathrm{Var}[\overline{\mathrm{CAR}}(\tau_1,\tau_2)]=\bar{\sigma}^2(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2(\tau_1,\tau_2) \tag{4.4.20}$$

在(4.4.16)式、(4.4.18)式、(4.4.20)式中，我们假设 N 个证券的事件窗不重叠，协方差项为 0。我们可以通过：

$$\overline{\mathrm{CAR}}(\tau_1,\tau_2)\sim\mathcal{N}(0,\bar{\sigma}^2(\tau_1,\tau_2)) \tag{4.4.21}$$

推断累积非正常收益。在原假设条件下，非正常收益的期望为 0。实际上，由于$\bar{\sigma}^2(\tau_1,\tau_2)$未知，我们可以将$\hat{\bar{\sigma}}^2(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\hat{\sigma}_i^2(\tau_1,\tau_2)$作为一致估计量，继续用：

$$J_1=\frac{\overline{\mathrm{CAR}}(\tau_1,\tau_2)}{[\hat{\bar{\sigma}}^2(\tau_1,\tau_2)]^{\frac{1}{2}}}\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,1) \tag{4.4.22}$$

检验 H_0。

由于方差估计量出现在分母上，因此分布结果只使用于大样本，而且并不精确。加总的第二种方法是给每个SCAR_i 赋予相同的权重。将$\overline{\mathrm{SCAR}}(\tau_1,\tau_2)$定义为 N 个证券在事件期 τ_1 至 τ_2 的平均值，于是得到：

$$\overline{\mathrm{SCAR}}(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\mathrm{SCAR}}_i(\tau_1,\tau_2) \tag{4.4.23}$$

假设 H_0 条件下，N 种证券的事件窗在公历日不发生重叠，$\overline{\mathrm{SCAR}}(\tau_1,\tau_2)$在大样本下服从均值为 0，方差为$\left(\frac{L_1-2}{N(L_1-4)}\right)$的正态分布。我们用：

$$J_2=\left(\frac{N(L_1-4)}{L_1-2}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{\mathrm{SCAR}}(\tau_1,\tau_2)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,1) \tag{4.4.24}$$

对原假设进行检验。

当进行事件研究时，我们必须选择 J_1 或 J_2 作为检验统计量，人们喜欢选用具有较高检验功效的统计量，而这也需取决于备选假设。若真正的非正常收益在各证券间是常量，则较好的选择是对非正常收益方差较小的证券赋予较大的权数，而这正是 J_2 统计量所体现的。另一方面，如果实际非正常收益比具有较大方差证券的非正常收益大，那么最好的选择就是给每一种证券已实现的累积非正常收益赋予相同的权重。在大多数研究中，由于各种证券 CAR 的方差具有相同的大小，研究结果对选择 J_1 还是 J_2 不太敏感。

4.4.4 正常收益模型的敏感性

我们将市场模型作为正常收益模型已得到了结果。正如前面所述，使用市场模型，而

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

不用常量—均值—收益模型，可以减少非正常收益的方差，这一点可以通过比较各非正常收益的方差看出。为进行例证，我们假定正常收益模型的参数已知。

市场模型的非正常收益的方差为：

$$\begin{aligned}\sigma_{\epsilon_i}^2 &= \mathrm{Var}[R_{it} - \alpha_i - \beta_i R_{mt}] \\ &= \mathrm{Var}[R_{it}] - \beta_i^2 \mathrm{Var}[R_{mt}] \\ &= (1 - R_i^2)\mathrm{Var}[R_{it}] \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

其中，R_i^2 是证券 i 的市场模型的回归值 R^2。

对于常量—均值—收益模型，非正常收益 ξ_{it} 的收益是无条件收益的方差 $\mathrm{Var}[R_{it}]$，即：

$$\sigma_{\xi_i}^2 = \mathrm{Var}[R_{it} - \mu_i] = \mathrm{Var}[R_{it}] \tag{4.4.26}$$

由(4.4.25)式和(4.4.26)式，我们可以得到：

$$\sigma_{\epsilon_i}^2 = (1 - R_i^2)\sigma_{\xi_i}^2 \tag{4.4.27}$$

由于 R_i^2 的值在 0 和 1 之间，市场模型的非正常收益的方差小于等于常量—均值—收益模型的非正常收益的方差。市场模型较小的方差会影响所有非正常收益的总度量。因此使用市场模型可以得到更精确的推断。对具有较高市场模型 R^2 值统计量的证券样本，收益达到最大。

原则上，通过使用多因素模型可以使 R^2 进一步增大。但实际上，通过增加因素而增加的 R^2 值通常很小。

4.4.5 收入公告例子的 CARs

这个收入公告的例子阐明了非正常收益样本和累积非正常收益样本的使用。表 4.1 显示了 30 个公司各自的平均非正常收益，也显示了三种收入消息分类中每一种的平均累积非正常收益。我们可以考虑两个正常收益模型：市场模型以及与之相比较的平均收益不变模型。图 4.2a 显示的是市场模型得到的 CARs，而图 4.2b 显示的则是由平均收益不变模型得到的 CARs，累积非正常收益的平面图也包括在内。

表 4.1　收益公告信息内容的事件研究的非正常收益

事件日	市场模型						常量—均值—收益模型					
	好消息		无消息		坏消息		好消息		无消息		坏消息	
	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{\mathrm{CAR}}$	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{\mathrm{CAR}}$	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{\mathrm{CAR}}$	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{\mathrm{CAR}}$	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{\mathrm{CAR}}$	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{\mathrm{CAR}}$
−20	.093	.093	.080	.080	−.107	−.107	.105	.105	.019	.019	−.077	−.077
−19	−.177	−.084	.018	.098	−.180	−.286	−.235	−.129	−.048	−.029	−.142	−.219
−18	.088	.004	.012	.110	.029	−.258	.069	−.060	−.086	−.115	−.043	−.262

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

事件日	市场模型						常量—均值—收益模型					
	好消息		无消息		坏消息		好消息		无消息		坏消息	
	$\bar{\varepsilon}^*$	CAR	$\bar{\varepsilon}^*$	CAR	$\bar{\varepsilon}^*$	CAR	$\bar{\varepsilon}^*$	CAR	$\bar{\varepsilon}^*$	CAR	$\bar{\varepsilon}^*$	CAR
—17	.024	.029	—.151	—.041	—.079	—.337	—.026	—.086	—.140	—.255	—.057	—.319
—16	—.018	.011	—.019	—.060	—.010	—.346	—.086	—.172	.039	—.216	—.075	—.394
—15	—.040	—.029	.013	—.047	—.054	—.401	—.183	—.355	.099	—.117	—.037	—.431
—14	.038	.008	.040	—.007	—.021	—.421	—.020	—.375	—.150	—.266	—.101	—.532
—13	.056	.064	—.057	—.065	.007	—.414	—.025	—.399	—.191	—.458	—.069	—.601
—12	.065	.129	.146	.081	—.090	—.504	.101	—.298	.133	—.325	—.106	—.707
—11	.069	.199	—.020	.061	—.088	—.592	.126	—.172	.006	—.319	—.169	—.876
—10	.028	.227	.025	.087	—.092	—.683	.134	—.038	.103	—.216	—.009	—.885
—9	.155	.382	.115	.202	—.040	—.724	.210	.172	.022	—.194	.011	—.874
—8	.057	.438	.070	.272	.072	—.652	.106	.278	.163	—.031	.135	—.738
—7	—.010	.428	—.106	.166	—.026	—.677	—.002	.277	.009	—.022	—.027	—.765
—6	.104	.532	.026	.192	—.013	—.690	.011	.288	—.029	—.051	.030	—.735
—5	.085	.616	—.085	.107	.164	—.527	.061	.349	—.068	—.120	.320	—.415
—4	.099	.715	.040	.147	—.139	—.666	.031	.379	.089	—.031	—.205	—.620
—3	.117	.832	.036	.183	.098	—.568	.067	.447	.013	—.018	.085	—.536
—2	.006	.838	.226	.409	—.112	—.680	.010	.456	.311	.294	—.256	—.791
—1	.164	1.001	—.168	.241	—.180	—.860	.198	.654	—.170	.124	—.227	—1.018
0	.965	1.966	—.091	.150	—.679	—1.539	1.034	1.688	—.164	—.040	—.643	—1.661
1	.251	2.217	—.008	.142	—.204	—1.743	.357	2.045	—.170	—.210	—.212	—1.873
2	—.014	2.203	.007	.148	.072	—1.672	—.013	2.033	.054	—.156	.078	—1.795
3	—.164	2.039	.042	.190	.083	—1.589	—.088	1.944	—.121	—.277	.146	—1.648
4	—.014	2.024	.000	.190	.106	—1.483	.041	1.985	.023	—.253	.149	—1.499
5	.135	2.160	—.038	.152	.194	—1.289	.248	2.233	—.003	—.256	.286	—1.214
6	—.052	2.107	—.302	—.150	.076	—1.213	—.035	2.198	—.319	—.575	.070	—1.143
7	.060	2.167	—.199	—.349	.120	—1.093	.017	2.215	—.112	—.687	.102	—1.041
8	.155	2.323	—.108	—.457	—.041	—1.134	.112	2.326	—.187	—.874	.056	—.986
9	—.008	2.315	—.146	—.603	—.069	—1.203	—.052	2.274	—.057	—.931	—.071	—1.056
10	.164	2.479	.082	—.521	.130	—1.073	.147	2.421	.203	—.728	.267	—.789
11	—.081	2.398	.040	—.481	—.009	—1.082	—.013	2.407	.045	—.683	.006	—.783

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

事件日	市场模型						常量—均值—收益模型					
	好消息		无消息		坏消息		好消息		无消息		坏消息	
	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{CAR}$	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{CAR}$	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{CAR}$	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{CAR}$	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{CAR}$	$\bar{\varepsilon}^*$	$\overline{CAR}$
12	−.058	2.431	.246	−.235	−.038	−1.119	−.054	2.354	.299	−.384	.017	−.766
13	−.165	2.176	.014	−.222	.071	−1.048	−.246	2.107	−.067	−.451	.114	−.652
14	−.081	2.095	−.091	−.312	.019	−1.029	−.011	2.096	−.024	−.475	.089	−.564
15	−.007	2.088	−.001	−.314	−.043	−1.072	−.027	2.068	−.059	−.534	−.022	−.585
16	.065	2.153	−.020	−.334	−.086	−1.159	.103	2.171	−.046	−.580	−.084	−.670
17	.081	2.234	.017	−.317	−.050	−1.208	.066	2.237	−.098	−.677	−.054	−.724
18	.172	2.406	.054	−.263	.066	−1.142	.110	2.347	.021	−.656	−.071	−.795
19	−.043	2.363	.119	−.144	−.088	−1.230	−.055	2.292	.088	−.568	.026	−.769
20	.013	2.377	.094	−.050	−.028	−1.258	.019	2.311	.013	−.554	−.115	−.884

注：该样本包括了 1989 年 1 月～1993 年 12 月 5 年期间道—琼斯工业指数中 30 家公司的 600 份季度报告。模型考虑了使用 CRSP 的值权指数的市场模型和常量—均值—收益模型两种情况。报告分为三种类别：好消息、无消息和坏消息。$\bar{\varepsilon}^*$ 是事件时间指定日的样本平均非正常收益，$\overline{CAR}$是指定日前 20 天样本平均累积非正常收益。事件时间是相对于公告日而言的。

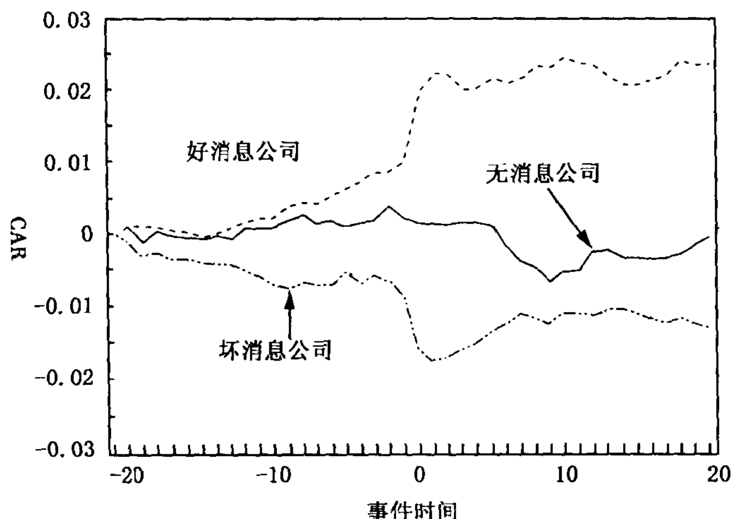


图 4.2a　收益公告的市场模型的累积非正常收益图

表 4.4 当以一日为间隔区间的企业异常收益平均方差平方根是 4% 时，对于不同的抽样间隔区间，拒绝原假设异常收益为零的事件研究检验统计量 J_1 的权值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

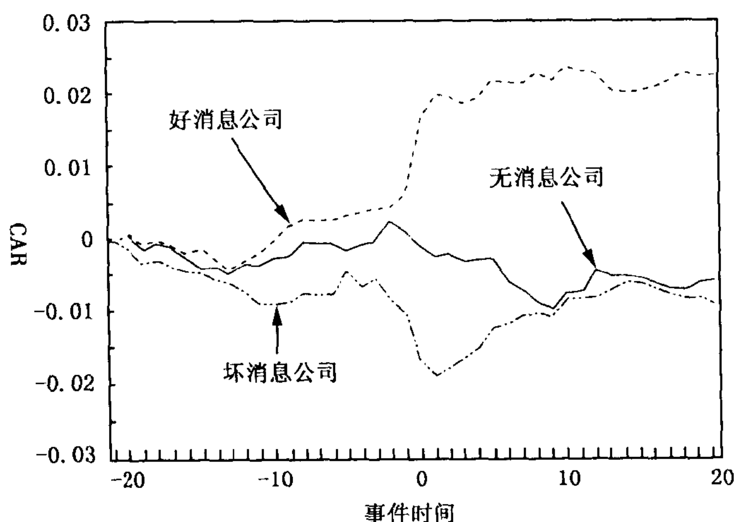


图 4.2b 收益公告的常量—均值—收益模型的累积非正常收益图

这个例子的结果跟现存文献中收入内容的信息大体一致。这个现象强有力地支持了这样一个假设:收入公告确实传递了对公司进行评估的有用信息。集中在公告日(日 0)的具有好消息的公司使用市场模型所得到的样本平均非正常收益为 0.965%。由于一日好消息的平均非正常收益标准差为 0.104%,因此 J_1 的估计为 9.28,而事件没有影响的原假设则被强有力地拒绝。对于具坏消息的公司也会出现相同的情况。事件日样本的非正常收益是−0.679%,其标准差是 0.098%,这些导致 J_1 的值为−6.93。再次表明了对原假设的强烈拒绝。正如预期的那样,无消息公司的非正常收益小,只有−0.091%,小于以零为起点的一个标准差,这里的标准差为 0.098%。同样也表现出公告对日 1 有某种影响的迹象具好消息或坏消息的公司的平均非正常收益分别是 0.251%和−0.204%。这些值远大于以零为起点的两个标准差。这些日 1 的影响可能来源于股票市场收市后对事件日 0 所做的一些收入公布。这些情况下此种影响在日 1 的收入中得到体现。

运用从平均收益不变模型求得的非正常收益所推出的结论与市场模型所得的结论是一致的。但是,当三种类别的平均非正常收益方差增长的时候,使用平均收益不变模型会有一些精度上的损失。在测度由平均收益不变模型得到的非正常收益时,具好消息的公司其标准差从 0.104%增加到 0.130%,无消息的公司从 0.098%增加到 0.124%,而坏消息公司则从 0.098%增加到 0.131%。当考虑一些大公司样本(比如一些道·琼斯指数股公司)的时候,因为这些公司的股票都是市场的重要组成部分,而且他们的可变性已经用市场模型加以消除,所以前面所提到的增加是可以预期的。

CAR 平面图显示了某种程度上市场在逐渐地学习即将来临的公告。具好消息的公

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

司的平均 CAR 逐渐的从－20 向－1 变化，而具坏消息的公司的平均 CAR 在这段时期则逐渐的向下变化。正如预期的那样，虽然对于具坏消息的公司而言，在 2～8 天期间，其 CAR 有些许的增加（这种增加在统计上是无意义的），但是总的来说，在发布公告后的日子里，CAR 是相对稳定的。

4.4.6 聚类推理

在分析聚集的非正常利润中，迄今我们已经假设了这些个人有价证券的非正常收益在截面上并不是相互关联的。一般而言，假如所包含的有价证券的事件窗口在时间安排上是不重叠的话，那么这个假设是合理的。该假设允许我们计算这个集合样本的累积非正常收益的方差，而不考虑个体样本 CARs 之间的协方差，因为它们的值为零。但是，当这个事件窗口有交迭情况出现的时候，非正常收益之间的协方差可能就不再是零值了，这些聚集的非正常收益所显现的分布结果也就不适用了。伯纳德（Bernard，1987）讨论过聚类在这方面的一些问题。

当时间安排上有一个事件日期时，可以有两种不同的方法来处理聚类问题。一种方法是可以将非正常收益计入一个投资组合，这种投资组合是用事件时间来记录的，第 4.4 节的证券水平分析可以应用于这个投资组合。这种方法允许这些非正常收益有交叉的关系存在。

另外一种处理聚类的方法是不用集合来分析非正常收益。可以证明这样一个原假设，即事件对使用非集合的证券与证券之间的数据没有影响。这种基本方法是带有虚拟变量的多变量回归模型对事件日期的一个应用。它和第 5 章讨论的 CAPM 中的多变量 F 检验很相似。这种方法在希珀和汤普森（Schipper and Thompson，1983，1985），麦勒泰斯特和汤普森（Malatesta and Thompson，1985），以及科林斯和丹特（Collins and Dent，1984）的论文中得到完善和发展。这种方法相对于投资组合的方法而言有些优势之处。首先是它允许可选择的假设，即一些公司可以有负的非正常收益，而另一些公司可以有正的非正常收益。其次，它能处理局部聚类的问题，所谓的局部聚类就是各个公司的事件日期不相同，从而在事件窗口有交迭。然而，这种方法也有一些缺点。在许多情况中，检验统计量在有限样本下的性质较差，且通常对某些经济合理的备选假设有很小的功效。

4.5 修正原假设

迄今为止，我们集中于单一的原假设——特定事件对有价证券收益的行为没有影响。在这个原假设前提下，均值或者是方差的影响意味着一种违背。然而在一些应用中我们

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

可能仅仅对检验均值的影响有兴趣。在这些情况下，我们需要对原假设有所扩展，即允许改变（通常是增加）方差。

为了达到这个目的，我们在估计聚集的累积非正常收益的方差时需要消除对以往收益的任何依赖。代替的方法是用累积的非正常收益的截面来对方差进行估计。波赫默、穆休麦西和普尔森（Boehmer，Musumeci and Pouslsen，1991）论述过这种方法，这种方法在用平均收益不变模型估量非正常利润中得到了极好的应用。

用这种截面的方法来估量方差既适用于平均累积非正常收益（$\overline{\mathrm{CAR}}(\tau_1,\tau_2)$）也适用于平均标准累积非正常收益（$\overline{\mathrm{SCAR}}(\tau_1,\tau_2)$）。用这个截面来估计方差，我们有：

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\overline{\mathrm{CAR}}(\tau_1,\tau_2)] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(\mathrm{CAR}_i(\tau_1,\tau_2) - \overline{\mathrm{CAR}}(\tau_1,\tau_2))^2 \tag{4.5.1}$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\overline{\mathrm{SCAR}}(\tau_1,\tau_2)] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(\mathrm{SCAR}_i(\tau_1,\tau_2) - \overline{\mathrm{SCAR}}(\tau_1,\tau_2))^2 \tag{4.5.2}$$

因为这些方差的估计是一致的，我们要求非正常收益在截面是不相关的。不存在聚类是满足这种要求的充分条件。值得注意的是，对于一致性而言，截面的同方差是不必要的。给定这些方差估计量，累积非正常收益为零的原假设便能在（4.5.2）式和（4.5.1）式给出的方差的一致估计量下使用大样本理论进行检验。

有人可能也会对事件对公司风险的影响有兴趣。这种风险的相关措施必须在风险得到处理前被详细说明。一种处理风险的选择就是资产定价模型中暗含的市场模型 β。给定这种选择，市场模型就能系统明确地表达，这种表达允许 β 在事件窗口变化，而 β 的稳定性也能得到检验。详细内容可以参阅坎恩和尤纳尔（Kane and Unal，1988）有关这一方法的应用。

4.6 势分析

要想对一个事件研究进行解释，我们需要知道如何检测非零的非正常收益的存在。这一小节我们研究的是在一个与事件密切相关的给定水平的非正常收益下，一个事件研究的检验拒绝原假设的可能性是多少的问题，也就是说我们需评价这个检验的势。

我们用公式（4.4.22）中以累积非正常收益为基础的统计量 J_1 来考虑原假设双边检验。我们假设各个有价证券的非正常收益不相关联，因此$\overline{\mathrm{CAR}}$的方差是 $\bar{\sigma}^2(\tau_1,\tau_2)$，这里 $\bar{\sigma}^2(\tau_1,\tau_2)=1/N^2\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2(\tau_1,\tau_2)$，而 N 则是样本长度。在原假设中，J_1 是标准正态分布。对于 α 大小的双边检验，假如 $J_1<\Phi^{-1}(\alpha/2)$ 或 $J_1>\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$，则我们否决原假设；这里 $\Phi(\cdot)$是标准正态累积分布函数（CDF）。

给定备择假设 $\mathrm{H_A}$ 以及针对这个假设的 J_1 的 CDF 函数，我们就能够用以下的公式

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

将 α 大小检验的势制成表格：

$$P(\alpha,\mathrm{H}_A)=\Pr\left(J_1<\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mid \mathrm{H}_A\right)+\Pr\left(J_1>\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\mid \mathrm{H}_A\right) \tag{4.6.1}$$

将这个公式置于适当的地方，我们需要提出明确的备择假设。备择假设的提出将跟事件研究相一致，而这种事件研究所使用的是以日为时间间隔的样本数据。针对四种不同水平的非正常收益值，即 0.5%、1.0%、1.5%和 2.0%，以及两种水准的一个取样时间间隔中的特定证券的非正常收益的均方差：0.000 4 和 0.001 6，我们建立了八种备择假设。这些方差与 2%以及 4%的标准偏离分别对应。样本的长度，也就是事件发生的有价证券的数量，是在 1～200 之间变化的。我们引证以 5%为显著性水平的检验（$\alpha=0.05$）的势，而赋予 $\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$ 和 $\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ 的值分别为 −1.96 和 1.96。当然在应用时，检验的势应该与所选的显著性水平相对应。

这个势的结果可参见表 4.2 以及图 4.3a 和图 4.3b。在表 4.2 的左边和图 4.3a 中显示的是均方差为 0.000 4 的情况，对应于 2%的标准偏差。对于没有导致增长的方差的事件而言，这是一个合理的值，可以用一日的事件窗口来检验。这种情况可能是给了事件研究方法最大的势值。这个结果也阐明了当非正常收益仅为 0.5%时，势值可以是比较小的。例如，一个显著性水平 5%的检验，样本长度为 20 的势值仅为 0.2。如果想要势值达到 0.50，我们所需要的样本长度应超过 60。然而，对于一个给定的样本长度，当非正常收益比较大时，势值的增长也是比较大的。例如，当非正常收益为 2.0%，对于一个 20 个公司样本、显著性水平是 5%的检验，其势值将接近于 100，等于 0.99。在方差是 0.000 4 时，一般的结果就是非正常收益大于 1%时，势值很大，即使是一个小样本也是这种情况。而当非正常收益小的时候，一个大样本长度对于高的势值是必需的。

表 4.2 的右边和图 4.3b 是累积非正常收益的方差为 0.001 6 的情况下势值的结果，它对应于 4%的标准偏差。这种情况粗略地对应于这样两种事件窗口，即或者是一个多日事件窗口，或者是一个一日事件窗口，而这个事件将会导致作为原假设一部分的方差的增加。这里我们看到显著性水平为 5%检验中势值剧烈下降。当 CAR 为 0.5%时，20 个公司样本的势值仅为 0.9，而 200 个公司样本的势值仅为 0.42。在较大的方差 0.001 6 情况下，非正常收益大小的检测是很困难的。相对而言，当 CAR 值为较大的 1.5%和 2.0%时，显著性水平为 5%的检验依然有合理的势值。例如，当非正常收益为 1.5%，样本长度为 30 时，势值为 0.54。一般而言，如果非正常收益大，我们将很容易拒绝无非正常利润的原假设。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 4.2　　拒绝非正常收益为零的原假设的事件研究检验统计量 J_1 的势值

样本容量	非正常收益				非正常收益			
	0.5%	1.0%	1.5%	2.0%	0.5%	1.0%	1.5%	2.0%
	$\sigma=2\%$				$\sigma=4\%$			
1	0.06	0.08	0.12	0.17	0.05	0.06	0.07	0.08
2	0.06	0.11	0.19	0.29	0.05	0.06	0.08	0.11
3	0.07	0.14	0.25	0.41	0.06	0.07	0.10	0.14
4	0.08	0.17	0.32	0.52	0.06	0.08	0.12	0.17
5	0.09	0.20	0.39	0.61	0.06	0.09	0.13	0.20
6	0.09	0.23	0.45	0.69	0.06	0.09	0.15	0.23
7	0.10	0.26	0.51	0.75	0.06	0.10	0.17	0.26
8	0.11	0.29	0.56	0.81	0.06	0.11	0.19	0.29
9	0.12	0.32	0.61	0.85	0.07	0.12	0.20	0.32
10	0.12	0.35	0.66	0.89	0.07	0.12	0.22	0.35
11	0.13	0.38	0.70	0.91	0.07	0.13	0.24	0.38
12	0.14	0.41	0.74	0.93	0.07	0.14	0.25	0.41
13	0.15	0.44	0.77	0.95	0.07	0.15	0.27	0.44
14	0.15	0.46	0.80	0.96	0.08	0.15	0.29	0.46
15	0.16	0.49	0.83	0.97	0.08	0.16	0.31	0.49
16	0.17	0.52	0.85	0.98	0.08	0.17	0.32	0.52
17	0.18	0.54	0.87	0.98	0.08	0.18	0.34	0.54
18	0.19	0.56	0.89	0.99	0.08	0.19	0.36	0.56
19	0.19	0.59	0.90	0.99	0.08	0.19	0.37	0.59
20	0.20	0.61	0.92	0.99	0.09	0.20	0.39	0.61
25	0.24	0.71	0.96	1.00	0.10	0.24	0.47	0.71
30	0.28	0.78	0.98	1.00	0.11	0.28	0.54	0.78
35	0.32	0.84	0.99	1.00	0.11	0.32	0.60	0.84
40	0.35	0.89	1.00	1.00	0.12	0.35	0.66	0.89
45	0.39	0.92	1.00	1.00	0.13	0.39	0.71	0.92
50	0.42	0.94	1.00	1.00	0.14	0.42	0.76	0.94
60	0.49	0.97	1.00	1.00	0.16	0.49	0.83	0.97
70	0.55	0.99	1.00	1.00	0.18	0.55	0.88	0.99
80	0.61	0.99	1.00	1.00	0.20	0.61	0.92	0.99
90	0.66	1.00	1.00	1.00	0.22	0.66	0.94	1.00
100	0.71	1.00	1.00	1.00	0.24	0.71	0.96	1.00
120	0.78	1.00	1.00	1.00	0.28	0.78	0.98	1.00
140	0.84	1.00	1.00	1.00	0.32	0.84	0.99	1.00
160	0.89	1.00	1.00	1.00	0.35	0.89	1.00	1.00
180	0.92	1.00	1.00	1.00	0.39	0.92	1.00	1.00
200	0.94	1.00	1.00	1.00	0.42	0.94	1.00	1.00

注：这个势值是由一个显著性水平为 5% 的检验得到的。样本大小则是事件研究中事件观测的数目，而 σ 是公司非正常收益均方差的平方根。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

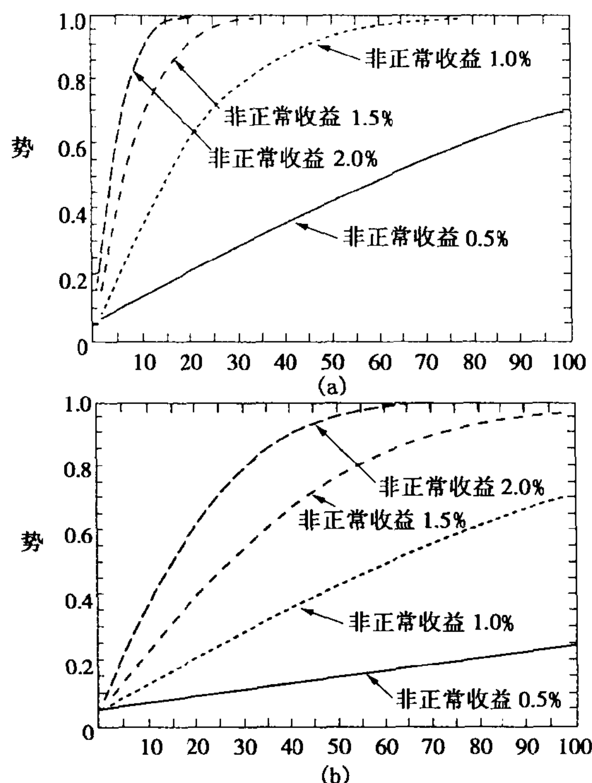


图 4.3 拒绝非正常收益为零的原假设的事件研究检验统计量 J_1 的势值，此时公司非正常收益均方差的平方根是(a)2%和(b)4%。

我们已经用分布的假设有分析地计算势值。假如这些分布假设不正确，那我们的势值计算也就不精确了。但是，布朗和沃纳(Brown and Warner，1985)曾经探究过这个问题，发现分析计算所得的势值与经验的势值很相近。

要得到有关用事件研究的方法检测非零非正常收益的一般性结论是比较困难的。当进行一个事件研究时，评价在给定研究参数和目标的情况下的势值是必须的。假如势值足够大，我们就能进行研究，否则，我们只有通过增加势值来进行研究。可以通过增加样本长度，减少事件窗口，或者提出原假设的更为明确的预测等方法来增加势值。

4.7 非参数检验

因为已经明确地假设了非正常收益的分布，这里讨论的方法本质上是参数性的，此外还有一些可选的非参数方法，这种方法将不受收益分布的特定假设的限制。这一节，我们

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

讨论两种普遍的事件研究的非参数检验方法。一种是符号检验，另一种是秩检验。

符号检验是以非正常收益的符号为基础的，它要求各个有价证券的非正常收益(更多情况下是累积的非正常收益)相互独立，原假设下正的非正常收益的比例为0.5。这种检验的基础是在原假设前提下，CAR为正或负的可能性是均等的。例如，假如原假设下有个与给定事件相联系的正的非正常收益，这个原假设就是 $H_0: p \leqslant 0.5$，备择假设为 $H_A: p > 0.5$，这里 $p = P_r(CAR_i \geqslant 0.0)$。计算这个检验统计量我们需要非正常收益为正值，$N^+$ 情况的数值以及总的情况的数值 N。J_3 作为这个检验统计量，当 N 增加时，渐近的服从标准正态分布为：

$$J_3 = \left[\frac{N^+}{N} - 0.5\right]\frac{N^{1/2}}{0.5} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

对于显著性水平为$(1-\alpha)$的检验来说，假如 $J_3 > \Phi^{-1}(\alpha)$，则 H_0 的假设将被拒绝。

符号检验的一个缺点是：如果这个非正常收益的分布是不对称的话，这个检验就不再是明确有效的了，在日数据的情况下就有这种结果。对于不对称的非正常收益，即使是在原假设条件下，可以预期的正的非正常收益的比例跟0.5也有显著差异。针对这种可能出现的缺憾，科雷德(Corrado，1989)提出了非参数的秩检验方法，用来解决事件研究中的反常表现。我们简单地描述这个检验的原假设就是没有事件日的非正常收益为零。这个假设能很容易地转变到发生多天的事件。

先介绍一下引用的符号，考虑一下一个 L_2 样本的 N 种有价证券中每一种证券的非正常收益。进行这个排列检验必须将每一种证券按非正常收益从1到 L_2 排列。定义 $K_{i\tau}$ 为在事件时间段 τ 证券 i 的非正常收益的排列。τ 从 T_1+1 到 T_2，而事件日的 $\tau=0$。秩检验运用这个事实，即在原假设下预期的秩值为$\frac{L_2+1}{2}$。对于事件日0的非正常收益为零的原假设的检验统计量为：

$$J_4 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{i0} - \frac{L_2+1}{2}\right)/s(L_2) \tag{4.7.1}$$

$$s(L_2) = \sqrt{\frac{1}{L_2}\sum_{\tau=T_1+1}^{T_2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{i\tau} - \frac{L_2+1}{2}\right)\right)^2} \tag{4.7.2}$$

原假设的检验可以通过使用 J_4 的渐近分布是标准正态分布来实现。科雷德(Corrado，1989)给出了更为深入的细节阐述。

有代表性的是，这些非参数检验方法并不是独立使用，而是跟他们参数检验方法联合在一起使用的。非参数检验能让我们检测在参数检验基础上得到的结论的稳健性。正如坎贝尔和瓦斯利(Campbell and Wasley，1993)论文中阐明的那样，这样的检查是值得的。他们发现对于纳斯达克股票的日收益，非参数的排列检验提供了比标准参数检验更加可靠的结论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

4.8 截面模型

理论模型经常假设在非正常收益的大小和事件观测的特定性质之间应该存在某种联系。为研究这种联系，一个合适的工具是以利率为特性的非正常收益的截面回归。建立这样的模型，定义 $\mathbf{y}$ 为累积非正态收益观测值的 $(N\times 1)$ 维向量，$\mathbf{X}$ 为特性的 $(N\times K)$ 维矩阵。$\mathbf{X}$ 的第一列是特性的一个向量，而剩下的 $(K-1)$ 列是一个向量，由每一个事件观测的特性组成。于是，对于这个模型，我们就得到了下面的回归等式：

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\eta} \tag{4.8.1}$$

这里的 $\boldsymbol{\theta}$ 是 $(K\times 1)$ 维系数向量，$\boldsymbol{\eta}$ 则是 $(N\times 1)$ 维误差向量。假设 $E[\mathbf{X}'\boldsymbol{\eta}]=0$，我们能运用 OLS 法得到 $\boldsymbol{\theta}$ 的一致估计。

由最小二乘估计，我们得到：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \tag{4.8.2}$$

假设误差项 η 是截面相互独立并且具有相同的方差，则可以利用普通的 OLS 标准误差得到结论。定义 σ_{η}^2 为误差项 $\boldsymbol{\eta}$ 的方差，我们有：

$$\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\sigma_{\eta}^2 \tag{4.8.3}$$

利用 σ_{η}^2 的无偏估计得：

$$\hat{\sigma}_{\eta}^2=\frac{1}{(N-K)}\hat{\boldsymbol{\eta}}'\hat{\boldsymbol{\eta}} \tag{4.8.4}$$

这里，$\hat{\boldsymbol{\eta}}=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}$，我们可以构造 t 统计量来评价 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的统计重要性。另一种方法是，不假设同方差，我们能构造异方差一致的 z 统计量，用以下公式：

$$\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]=\frac{1}{N}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}'_i\hat{\boldsymbol{\eta}}_i^2\right](\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \tag{4.8.5}$$

这里 $\mathbf{x}'_i$ 是 $\mathbf{X}$ 的第 i 行向量值，而 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i$ 则是 $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ 的第 i 个元素。这种标准误差的表达可以由附录第 A.2 节的广义矩方法得到，它是怀特(White，1980)所得结果的延续。这种异方差一致的标准误差的使用被推广是因为没有理由希望(4.8.1)式的残差是同方差的。

艾斯奎斯和穆林斯(Asquith and Mullins，1986)提供了这种方法的一个例子。对一项股票出售公告的两日累积非正常收益进行回归，它以上市股票价值占公司总的股票价值的比重大小和先于此报告月份前 11 个月的累积非正常收益作为回归因子。他们发现，与股票出售公告相关联的非正常收益的大小与上述两变量均相关。较大的先前事件的累积非正常收益与较小的负的非正常收益相关，而大量股票出售又跟负得更多的非正常收益相关。这些发现跟他们讨论的理论预期是一致的。

在解释这个截面回归方法所得结果时必须小心。在许多情况下，事件窗口的非正常

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

收益与公司特性有关，这种关系不仅是通过事件的评估效应而且通过公司特性与事件的参与程度之间的联系来体现。当投资者能理性地使用公司的特性来预测事件发生可能性时，它才可能发生。在这些情况中，公司特性跟事件的评估效应之间的线性关系可能被隐藏。麦勒泰斯特和汤普森（Malatesta and Thompson，1985）以及莱恁和汤普森（Lanen and Thompson，1988）提供了这种情况的许多例子。

从技术层面讲，这种公司特性和事件参与程度之间的联系提出了一种选择偏差。回归残差跟回归量是不相关的假设，即 $E[\mathbf{X}'\boldsymbol{\eta}]=0$ 失效了。而 OLS 方法所得的估计也不一致了。一致的估计可以通过明确地允许选择偏差而得到。爱查亚（Acharya，1988，1993）以及埃克鲍、麦克西莫维柯和威廉斯（Eckbo，Maksimovic and Williams，1990）提供了这种情况的一些例子。普雷波哈拉（Prabhala，1995）为这个问题和其可能的解决方法提供了一个很好的论述。他认为在弱条件下，尽管不规范，这种 OLS 方法还是能用作推断的，而 t 统计量可解释为估计量的真实显著水平下的置信下限。

4.9 进一步的问题

当进行一项事件研究时，会出现许多的深层次问题，在这一节我们将讨论其中的一些问题。

4.9.1 抽样区间的作用

如果精确地知道一个事件的时间测定，则在统计上确定事件影响的能力对一个相对较短的抽样区间将更加提高。这种提高来自于非正常收益的方差减少，但是不改变其均值。我们通过比较检验统计量 J_1 势值的解析公式，用以日样本时间间隔和以周和月为时间间隔情况下的差异来评价这个问题在实证上的重要性。我们假设一周有 5 天，一个月有 22 天。一个单独事件观测的非正常收益的方差假设为$(4\%)^2$，并且以日时间间隔为基础，在时间上是线性的。

在图 4.4 中，相对于另一种有事件影响的检验而言，我们绘制了 1～200 种有价证券 1%的非正常收益的无事件影响检验的势值。正如第 4.6 小节分析所预期的那样，从日时间间隔到月时间间隔势发生剧烈的减少。例如，用由 50 种证券组成的使用日数据的 5%检验其势，得出的值为 0.94，而相应使用周数据和月数据所得的势值分别为 0.35 和 0.12。这里可以清楚地看到，减少事件窗口的长度可以导致势值的增长，这是一个真实的抵冲关系。莫斯（Morse，1984）提供了日数据和月数据之间选择的具体分析并得到了相同的结论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

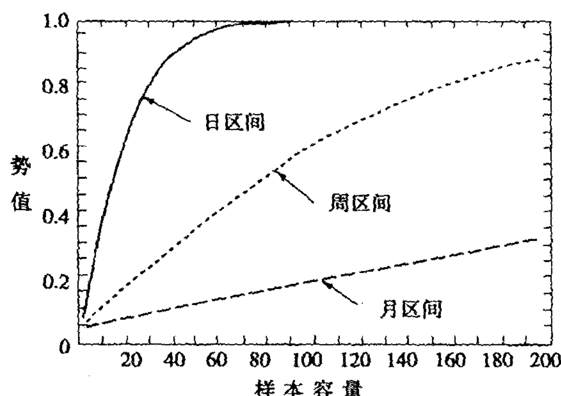


图 4.4　对于不同的样本时间间隔，拒绝非正常收益为零的原假设的事件研究检验统计量 J_1 的势值，此时日时间间隔的公司非正常收益平均方差的平方根为 4%

一天的抽样间隔并不是可能的最短间隔。随着交易数据有效性的增加，最近的研究已经可以使用间隔少于一天的观测数据。然而，这种一天之内数据的使用也产生了在第 3章讨论过的那些相关并发问题。因此很短时间间隔的净收益是不清楚的。巴克雷和利曾伯格(Barclay and Litzenberger，1988)讨论过事件研究中天内数据的使用。

4.9.2　事件日期不确定性的推理

迄今我们假设的都是事件日期能确定的识别。但是，在一些研究中识别完整的日期是很困难的。一个普遍的例子就是从类似于“华尔街日报”这样的金融出版物上收集来的日期。当看到报纸上刊登的事件公告时，我们不能确定获悉的市场行情是否是前一个交易日收市前的信息。可能前一天是事件日，也可能当天就是事件日。处理这种问题的通常办法是扩展事件窗口到 2 天——$T0$ 和 $T+1$。虽然扩展事件窗口有成本，但第 4.6 节的结果表明两天事件窗口的势值性质依然是良好的。这就意味着承受成本来避免事件缺失的风险是值得的。

鲍尔和托劳斯(Boll and Torous，1988)研究过这个问题。他们提出了一种极大似然估计程序，这种方法允许事件日期的不确定，他们还比较了这种明确方法跟扩展事件窗口这种非正常方法的结果，结果显示后者更有效。而极大似然这种更为复杂精细的估计方法并不能获得更多的信息。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

4.9.3 可能的偏差

事件研究会受到一些可能发生的偏差的影响。非同步交易可以产生偏差。要求在一个确定长度的时间间隔上记录价格，而事实上可能在其他长度不规则时间间隔上进行了记录，这时候非交易或非同步交易的影响就会产生。比如，在事件研究中所使用的证券日价格一般是“结束”价，即在交易日发生的各种有价证券最近的交易价格。这些结束价格一般不发生在同一天，但是我们称它们为“日”价格，这就隐含了假设这些价格等可能的分布在 24 小时的时间间隔中，而这种假设可能是不正确的。正如我们在第 3 章第 3.1 节所说明的那样，这种在利润的时间分布上不一致的非交易影响就导致了偏差的产生。

这种非交易影响对单个股票和投资组合方差、协方差的作用会自然地产生对市场模型中贝塔的偏差。斯科尔斯和威廉斯(Scholes and Williams，1977)以整个时间段里真实的收益获得是不相关这个假设为基础，提出了非交易情形下贝塔的一致估计。他们也提出了一些经验性的证据来说明不活跃交易的证券，其非交易影响已调整过所得的贝塔估计比未调整非交易影响所得到的贝塔估计大 10%～20%。然而对于活跃的有价证券而言，这种调整的作用一般比较小，也就显得不重要了。

杰恩(Jain，1986)考虑过清淡交易对从估计贝塔的市场模型得到的非正常收益分布的影响，这种市场模型使用的就是斯科尔斯—威廉斯的方法。他比较这种方法所得到的和使用通常的 OLS 的贝塔所得的非正常收益的分布，发现两者之间的差异很小，这也就暗示着一般意义上对清淡交易的调整是不重要的结论。

第 4.3、第 4.4、第 4.5 小节的统计分析建立在以下的假设基础上：即收益是连续的正常的，在时间上是独立同分布的。从这个假设出发就会产生偏差。常态的假设对于完整的有限样本的结果而言很重要。如果没有常态的假设，所有的结果都只是渐近的。但是，一般而言这对于事件研究并不是一个问题，因为检验统计量很快地会聚于他们的渐近分布。布朗和沃纳(Brown and Warner，1985)讨论过这个问题。

当使用通常的方法计算累积的非正常收益时，其得到的非正常收益有一个向上的偏差，这种偏差是通过并列观察得出的，即在计算聚集的累积非正常收益(与交易价格的使用紧密结合)时，隐含地赋予了每个观测以同等的权重，而此时的交易价格代表了市场出价和要价双方面的价格。布鲁姆和斯坦博(Blume and Stambaugh，1987)分析了这种偏差，分析显示，对于低市场资本化的公司而言——这些公司按照百分比考虑有大量的要价和出价存在——偏差的研究显得尤为重要。在这些情况下，通过采用购买—持有策略所得的累积非正常收益，偏差是可以得到消除的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

4.10 结 论

最后，我们来简要讨论一下事件研究成功的例子及其局限性。可能事件研究最成功的应用是在公司融资领域。事件研究在这个领域的经验研究占据主导地位。重要的例子包括合并和获得对财富的影响以及公司融资决策对价格的影响。这些事件的研究典型地集中于第一份公告发布日所在周围时间段的非正常收益。

20 世纪 60 年代很少有经验证据表明合并和获得是有影响的。比如，曼(Manne，1965)讨论过多方面的有关赞成和反对合并的论点。在那时候争论的重点在于合并应该被调整到何种程度以求在产品市场中培养竞争意识。曼争论道，合并表现的是法人控制的有效运作市场的一种自然结果，从而为股东提供了保护。而他对合并将减少竞争的争论则不予重视。在他的论文结论中，曼提出，对于合并双方而言，通过研究合并对双方公司的价格影响，两方相互竞争的假设可以得到分离。他假设如果合并创造了市场力量，我们将观测到对于被合并方和和合并方而言，他们的价格都能增长。相比较而言，如果合并体现的是合并公司为控制被合并公司而有支付行为，则应该仅观测被合并公司的价格增长而不考虑合并公司的情况。但是，在那时候曼关于合并对价格影响的结论是“……这个问题的相关数据目前为止无从获得”。

从那时起，大量的有关合并和获得的经验证据得到了发展，在事件研究中占据了主导地位。一般的结果是，一个特定的成功接管中，被合并方的非正常收益是巨大且为正值，而合并方的非正常收益则接近于零。杰雷尔和普尔森(Jarrell and Poulsen，1989)发现在 1960～1985 年期间在由 663 个成功接管样本组成的统计数据中，被合并方股东的平均非正常收益超过 20%，而相对的合并方股东的平均非正常收益则接近于零，仅为 1.14%，在 1980 年甚至于出现了－1.10%的负值。

埃克鲍(Eckbo，1983)在解释跟合并相关的非正常收益时明确地强调了日渐增长的市场力量的作用。他将竞争性企业的合并与其他类合并分开考察，没有发现竞争性公司的合并对财产产生特别的影响。此外，他也没有找到公司合并的竞争者普遍经历负的非正常收益的证据。根据以上这些情况他得出结论：在产品市场上减少竞争并不是使合并双方财富增加的重要解释。埃克鲍用共同控制的竞争提供了一个更可能的解释。在合并和获得领域，许多额外的经验性工作已经引进。杰森和鲁拜克(Jensen and Ruback，1983)，杰雷尔、布里克利和纳特(Jarrell，Brickley and Netter，1988)都在这方面做过详细的调查。

许多稳健的结果已经在公司融资决策的事件研究中得到了发展。当一个公司宣布将在一个平均为负的非正常收益的国外市场增加资本时，其正常收益的大小依靠国外筹集

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

资金的途径。艾斯奎斯和穆林斯(Asquith and Mullins,1986)研究了一个1963～1981年期间的样本,此样本由266个公布资产净值的公司组成,结果发现它们的两日平均非正常收益为－2.7%,而在另一个1972～1982年由80个公司组成的样本研究中,米凯尔森和帕切(Mikkelson and Partch,1986)发现,两日平均非正常收益为－3.56%。相比较而言,当公司决定运用直接债务融资时,平均非正常收益则接近于零。米凯尔森和帕切(Mikkelson and Partch,1986)发现在一个171个发行公司组成的样本中,其债务发行的非正常收益为－0.23%。上面这些结果给新理论的发展提供了有力支持。例如,这些国外融资结果促进了梅耶斯和麦杰拉夫(Myers and Majluf,1984)提出的资本结构强弱次序理论的发展。

在公司融资领域与这些结果相关的一个主要成果是美国高等法院对事件研究方法的采纳应用,高等法院在对国内贸易案件中的物质性以及在许多欺诈的案件中适当的返还数目进行判决的时候含蓄地运用了事件研究的方法。米切尔和纳特(Mitchell and Netter,1994)曾经讨论过在1988年的BIL案件中法院含蓄地接受这种方法的情况以及这种方法对于证券法规的重要作用。

当然,也有事件研究方法较少成功的应用。一个成功的事件研究的重要特性是精确识别事件日期的能力。在许多例子中,日期很难识别或者是事件只是部分地被预期,这时候事件研究也就很难有作为了。例如,针对受影响公司的调整性变化对财产的影响很难通过事件研究的方法来检测。问题是调整性变化长期以来一直在政治舞台上被争论,当采用调整变化的可能性增加的时候,任何伴随的财产影响将逐渐并入公司的价值。

丹恩和詹姆(Dann and Jame,1982)在研究紧缩政策时的存款利率最高限度的相关影响时讨论过这个问题。他们考虑利率最高限度的变化,但决定不考虑在1973年的利率最高限度变化,因为那是立法行为的结果,因此可能已经被市场所预期到。希珀和汤普森(Schipper and Thompson,1983,1985)在研究跟合并相关的规则时也遇到了这个问题。他们试图在调整性变化发生的可能性增加或者减少的时候,通过识别日期来克服这个可预期的调整变化问题。然而,他们却得到了大量无意义的结果,他们揭示了明确的事件日期的缺乏导致财富影响缺乏的可能性。

对事件研究方法使用的研究可以让我们学到许多。正如我们期望的那样,大多数情况下,事件研究在一个理性的市场揭示了价格对新信息的反应。我们希望事件研究继续作为一种有价值的、广泛使用的工具在经济和金融领域得到应用。

习 题

4.1 证明在利用市场模型来估量非正常收益时,当估计窗口 L_1 的长度增加到无限长时,由等式(4.4.7)得到的样本非正常收益是渐近独立的。

4.2 给你有关一个事件的下列信息:抽取以一天为时间间隔的非正常收益为样本,事件窗口长度

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

为3天，在这样的事件窗口中平均非正常收益为每天0.3%。样本有50个事件观测组成，像每个事件日期对应于一个事件观察那样，每个事件观察的非正常收益是相互独立的。其中25个观测的非正常收益的日标准偏离为3%，而另外的25个观测的日标准偏离为6%。由这些信息，利用(4.4.22)式的累积非正常收益检验统计量，所得到的事件研究的检验势值是多少？如果用等式(4.4.24)标准累积非正常收益检验统计量，所得到的势值又是多少？在势值计算中，假设非正常收益的标准偏离是知道的。

4.3　假如25个具有较大标准偏离的公司每天的平均非正常收益为0.6%，则习题4.2中的势值又是多少？

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

5. 资本资产定价模型

现代金融经济学的重要问题之一是权衡风险和预期收益的量化问题。虽然，人们普遍认为诸如股票市场之类的风险投资其回报一般应当高于无风险投资，然而，也只是在资本资产定价模型创立以后，经济学家们才能够从数量上分析风险及其为承受风险而得到的回报之间的关系。资本资产定价模型的前提是建立在资产的预期收益对于其市场投资组合收益的方差为线性的关系上的。本章我们讨论该模型的计量经济分析。

本章的组织结构如下：第 5.1 节我们简短说明资本资产定价模型；第 5.2 节罗列一些对理解资本资产定价模型(CAPM)计量经济检验直观意义很重要的有关数学有效集的结果；第 5.3 节介绍估计和检验的方法；第 5.4 节我们讨论在大样本基础上的检验以及确定检验的尺度问题；第 5.5 节讨论检验的功效问题；第 5.6 节讨论具有弱分布假设的检验问题；第 5.7 节和第 5.8 节截面回归基础上的一些其他检验问题。

5.1 资本资产定价模型的说明

资本资产定价模型(CAPM)的基础是在 1959 年由马柯维茨(Markowitz，1959)建立的。他在一项专门的研究中，从预期收益和收益的方差角度提出了投资者选择的组合问题。他认为投资者将会最优地选择均值—方差有效组合，也就是说在方差给定的时候，投资者将会选择收益最高的投资组合。夏普(Sharpe，1964)和林特纳(Lintner，1965)进一步拓展了马柯维茨的研究成果，使其在经济上具有更广的涵义。他们证明了如果投资者具有相同的预期和最优地选择均值—方差有效组合，那么在没有市场摩擦的条件下，所有投资财富的组合或者市场组合本身就是均值—方差有效组合。通常的 CAPM 方程直接就揭示了市场组合均值—方差有效性的涵义。

夏普和林特纳建立的 CAPM 假定资产的租与借是按照无风险利率计息的，于是按照

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

该模型可以得到资产 i 的期望收益：

$$\mathrm{E}(R_i)=R_f+\beta_{im}[\mathrm{E}(R_m)-R_f] \tag{5.1.1}$$

$$\beta_{im}=\frac{\mathrm{Cov}(R_i,R_m)}{\mathrm{Var}[R_m]} \tag{5.1.2}$$

这里 R_m 是关于市场组合的收益，R_f 是关于无风险资产的收益。夏普和林特纳(Sharpe-Linter)建立的 CAPM 也许最简洁地由超过无风险报酬的收益或者称超额收益表达出来了。令 Z_i 代表第 i 个资产的超过无风险报酬的收益，即 $Z_i\equiv R_i-R_f$，则对夏普和林特纳建立的 CAPM 有：

$$\mathrm{E}[Z_i]=\beta_{im}\mathrm{E}[Z_m] \tag{5.1.3}$$

$$\beta_{im}=\frac{\mathrm{Cov}(Z_i,Z_m)}{\mathrm{Var}[Z_m]} \tag{5.1.4}$$

这里 Z_m 代表关于资产市场组合的超额收益。由于无风险收益率是非随机的，所以(5.1.2)式与(5.1.4)式是等价的。在实证应用中，无风险收益率的替代量是随机的，于是相应的贝塔系数也是不同的。大多数实证工作都是用超额收益和(5.1.4)式来叙述 Sharpe-Lintner 的资本资产定价模型的。

(5.1.3)式 Sharpe-Lintner 的 CAPM 集中反映了三个涵义：(1)截距为零；(2)贝塔系数完全刻画了截面层上的预期超额收益的波动；(3)市场风险溢酬 $\mathrm{E}[Z_m]$ 是正的。本章大部分篇幅将讨论第一个涵义，后两个涵义我们在第 5.8 节予以考虑。

在没有无风险资产的情况下，1972 年布莱克得到了更一般的 CAPM。在这个模型中，以零贝塔收益显示的资产 i 的期望收益关于它的贝塔系数的关系是线性的。特别对资产 i 的期望收益 $E(R_i)$，我们有：

$$\mathrm{E}[R_i]=\mathrm{E}[R_{0m}]+\beta_{im}(\mathrm{E}[R_m]-\mathrm{E}[R_{0m}]) \tag{5.1.5}$$

这里 R_m 是市场组合的收益；R_{0m} 是市场的零贝塔组合收益，它定义为与 m(即市场)不相关的组合中具有最小方差的那个组合(注意，任何其他与 m(即市场)不相关的组合虽具有相同的期望收益，但方差较大)。因为财富以实际价格计量更恰当，所以对 Black 的 CAPM，收益一般应该经过通货膨胀的调整。以实际价格计量定义的 β_{im} 为：

$$\beta_{im}=\frac{\mathrm{Cov}[R_i,R_m]}{\mathrm{Var}[R_m]} \tag{5.1.6}$$

由于 Black 的 CAPM 的计量经济分析把零贝塔组合收益当作不可观测量来处理，这样就比分析(Sharpe-Lintner)的资本资产定价模型来得更复杂。Black 模型可以被当作对实际收益市场模型的一个约束来检验。实际收益市场模型为：

$$\mathrm{E}[R_i]=\alpha_{im}+\beta_{im}\mathrm{E}[R_m] \tag{5.1.7}$$

按照(5.1.5)式的涵义，我们对任意的 i 有：

$$\alpha_{im}=\mathrm{E}[R_{0m}](1-\beta_{im})\ \forall i \tag{5.1.8}$$

(5.1.8)式告诉我们，Black 模型限制了实际收益市场模型中资产对应的截距项，并使其等于期望零贝塔组合收益乘上 1 减去资产的贝塔系数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

CAPM 是一个单时期模型，所以(5.1.3)式和(5.1.5)式就没有时间维数。要对模型进行计量经济分析就应加上有关收益的时间序列特性和有关在时序上估计模型的假定。假定收益关于时间是独立同分布的，其联合分布是多变量正态。这个假定在 Sharpe-Lintner 模型中是用于分析超额收益，而在布莱克模型中是用于分析实际收益。在上述强假定下，用逐期 CAPM 模型的好处是在理论上它具有一致性。对使用月度间隔的观测来说，它还是一个好的经验近似。我们将在第 5.6 节讨论放松该假设的问题。

CAPM 模型具有广泛的应用，我们比较熟悉的就有股票收益的度量，资本成本的估计，投资组合作用的评估以及事件分析，等等。这里我们简短地讨论资本成本的估计问题。权益成本在公司资本预算决策和为控制边际效用确定适当收益率的具体工作中是不可少的。运用 CAPM 模型需要三个要素：股票的贝塔系数，市场风险溢酬和无风险收益。权益资本贝塔系数的一般估计量是超额收益市场模型斜率系数的 OLS 估计量，即：

$$Z_{it}=\alpha_{im}+\beta_{im}Z_{mt}+\epsilon_{it} \qquad (5.1.9)$$

这里 i 表示资产，而 t 表示时期，$t=1,\cdots;T$；Z_{it} 和 Z_{mt} 分别代表时期 t 资产 i 的收益与市场组合所实现的超额收益。很显然，标准普尔 500 指数可以作为一个市场组合，而美国财政部债券的收益率可以作为无风险收益。对(5.1.9)式的估计最普遍的是采用 5 年的月度数据($T=60$)。在得到贝塔系数的估计后，资本成本的计算就要分别使用标准普尔 500 指数和财政部债券超额收益的历史平均数值。一般来讲，只有 CAPM 模型能够提供良好的数据描述，这类应用的结构才比较合理。

5.2 来自数学有效集的一些结果

本节我们考察有关均值—方差有效集的数学问题，详细内容请有兴趣的读者参阅默顿(Merton，1972)和罗尔(Roll，1977)的有关文献。理解本专题对解释大量有关 CAPM 的实证研究是很有用的，因为 CAPM 最有意义的涵义是风险资产的市场组合为均值—方差有效的组合。数学有效集在第 6 章分析多因素定价模型中同样有作用。

我们先从一些概念开始讲起。设有 N 个具有均值、向量为 μ、协方差矩阵为 Ω 的风险资产。假定至少有两个资产的期望收益是不同的，并且收益的协方差矩阵是满秩的。定义 ω_a 为任意一个组合 a 的($N\times1$)阶组合权重向量，并且所有权重分量的和为 1。显然，组合 a 具有均值 $\mu_a=\omega_a'\mu$，方差 $\sigma_a^2=\omega_a'\Omega\omega_a$。任何两个组合 a 和 b 之间的协方差是 $\omega_a'\Omega\omega_b$。在资产总体给定并且没有无风险资产的条件下，我们接下去考虑最小方差的组合问题。

定义：如果某个组合 p 的组合权重向量是下述带约束条件优化问题的解，即：

$$\min_{\omega}\ \omega'\Omega\omega \qquad (5.2.1)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

约束条件为：

$$\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\mu}=\mu_p \tag{5.2.2}$$

$$\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\iota}=1 \tag{5.2.3}$$

则组合 p 在所有均值收益为 μ_p 的组合中方差达到最小。

为求解该问题，我们先构造拉格朗日函数(Lagrangian function)L，然后对 L 关于 ω 求微分，并使微分结果为0，最后再解得 ω。

首先我们构造如下拉格朗日函数：

$$L=\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}+\delta_1(\mu_p-\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\mu})+\delta_2(1-\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\iota}) \tag{5.2.4}$$

这里 $\iota=(1,1,\cdots,1)'$，δ_1 和 δ_2 是拉格朗日乘数。对 L 关于 ω 求微分，并使微分结果等于0，我们有：

$$2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}-\delta_1\boldsymbol{\mu}-\delta_2\boldsymbol{\iota}=0 \tag{5.2.5}$$

结合(5.2.2)式，(5.2.3)式和(5.2.5)式，我们得到如下解：

$$\boldsymbol{\omega}_p=\mathbf{g}+\boldsymbol{h}\mu_p \tag{5.2.6}$$

这里，**g** 和 **h** 是 $(N\times1)$ 阶向量，即：

$$\mathbf{g}=\frac{1}{D}[B(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\iota)-A(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu})] \tag{5.2.7}$$

$$\mathbf{h}=\frac{1}{D}[C(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu})-A(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\iota)] \tag{5.2.8}$$

以及 $A=\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}$，$B=\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}$，$C=\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\iota}$ 和 $D=BC-A^2$。

下面我们对最小方差组合归纳出一些来自数学有效集的结果。这些结果由(5.2.6)式最小方差组合权重解的形式得到：

结果1：最小方差的边界可以由任何两个不同的最小方差组合所产生。

结果1'：任何最小方差组合的组合还是一个最小方差组合。

结果2：令 p 和 r 为任意二个最小方差组合。则组合 P 的收益和组合 r 的收益之间协方差为：

$$\mathrm{Cov}[R_p,R_r]=\frac{C}{D}\left(\mu_p-\frac{A}{C}\right)\left(\mu_r-\frac{A}{C}\right)+\frac{1}{C} \tag{5.2.9}$$

结果3：定义组合 g 是球最小方差组合。则对组合 g，我们有：

$$\boldsymbol{\omega}_g=\frac{1}{C}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\iota} \tag{5.2.10}$$

$$\mu_g=\frac{A}{C} \tag{5.2.11}$$

$$\sigma_g^2=\frac{1}{C} \tag{5.2.12}$$

结果4：除了球最小方差组合 g 之外，对每个最小方差组合 p，存在惟一的与组合 p 的协方差为0的最小方差组合。这个组合就称为关于组合 p 的零贝塔系数组合。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

结果 4'：球最小方差组合与任何资产或资产组合 a 之间收益的协方差是：

$$\mathrm{Cov}[R_g, R_a] = \frac{1}{C} \tag{5.2.13}$$

图 5.1 从均值—标准差二维空间的角度分析说明了没有无风险资产情况下的最小方差组合集。最小方差组合的期望收益大于或等于球最小方差组合的期望收益，所以它是有效组合。这些组合在所有具有相等或较低的收益方差的组合中，它们的期望收益是最高的。在图 5.1 中，球最小方差组合 g 是方差最小的组合。组合 p 是一个有效的组合。组合 op 关于 p 是零贝塔系数组合。从图 5.1 中可以证明零贝塔系数组合的期望收益是组合 p 的期望收益减去在其最小方差边界上 p 点的斜率与其标准差的乘积。

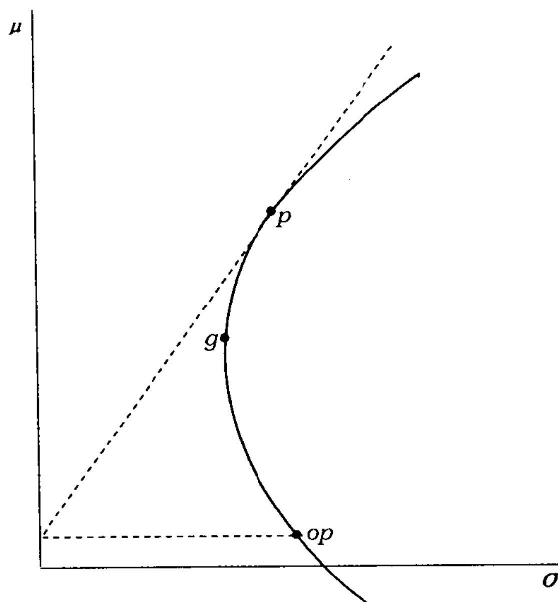


图 5.1 不存在无风险资产的最小方差组合

结果 5：考虑关于任何资产收益的多元回归，或者就是组合 a 的收益 R_a 关于任何最小方差组合的收益 R_p（球最小方差组合除外）及其相应的零贝塔系数组合的收益 R_{0p} 的回归，即：

$$R_a = \beta_0 + \beta_1 R_{0p} + \beta_2 R_p + \varepsilon_p \tag{5.2.14}$$

$$\mathrm{E}[\varepsilon_p | R_p, R_{0p}] = 0 \tag{5.2.15}$$

我们可以得到上式的理论回归系数：

$$\beta_2 = \frac{\mathrm{Cov}[R_a, R_p]}{\sigma_p^2} = \beta_{ap} \tag{5.2.16}$$

$$\beta_1 = \frac{\mathrm{Cov}[R_a, R_{0p}]}{\sigma_{0p}^2} = 1 - \beta_{ap} \tag{5.2.17}$$

$$\beta_0 = 0 \tag{5.2.18}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这里，β_{ap} 为资产 a 关于组合 p 的贝塔系数。

结果 5'：资产 a 的期望收益为：

$$\mu_a=(1-\beta_{ap})\mu_{op}+\beta_{ap}\mu_p \tag{5.2.19}$$

接下来我们将把无风险资产引入具体的分析，考虑 N 个包含风险资产和无风险资产构成的组合问题。在引入无风险资产之后，风险资产组合权重的加总就不再限制为 1，因为 $(1-\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\iota})$ 的份额可能是无风险资产投资的。给定无风险资产的收益为 R_f，最小方差组合的期望收益为 μ_p，则风险资产组合的权重就是下述带约束优化问题的解：

$$\min_{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Omega\omega} \tag{5.2.20}$$

约束条件为：

$$\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\mu}+(1-\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\iota})R_f=\mu_p \tag{5.2.21}$$

同前面的问题一样，我们先构造拉格朗日函数 L，然后对 L 关于 ω 求微分，并使微分结果为 0，最后再解得 ω。

我们构造如下拉格朗日函数：

$$L=\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Omega\omega}+\delta[\mu_p-\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\mu}-(1-\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\iota})R_f] \tag{5.2.22}$$

对 L 关于 ω 求微分，并使微分结果为 0，我们有：

$$2\boldsymbol{\Omega\omega}-\delta(\boldsymbol{\mu}-R_f\boldsymbol{\iota})=0 \tag{5.2.23}$$

结合(5.2.21)式和(5.2.23)式，我们有：

$$\boldsymbol{\omega}_p=\frac{(\mu_p-R_f)}{(\boldsymbol{\mu}-R_f\boldsymbol{\iota})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-R_f\boldsymbol{\iota})}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-R_f\boldsymbol{\iota}) \tag{5.2.24}$$

注意，我们可以把 $\boldsymbol{\omega}_p$ 表达成依赖于组合 p 的均值乘以不依赖于组合 p 的权重向量的一个标量，即：

$$\boldsymbol{\omega}_p=c_p\bar{\boldsymbol{\omega}} \tag{5.2.25}$$

这里，

$$c_p=\frac{(\mu_p-R_f)}{(\boldsymbol{\mu}-R_f\boldsymbol{\iota})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-R_f\boldsymbol{\iota})} \tag{5.2.26}$$

以及，

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-R_f\boldsymbol{\iota}) \tag{5.2.27}$$

于是，在有无风险资产的前提下，所有最小方差组合就是权重与 $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ 成比例的给定风险资产组合与无风险资产的组合。这个风险资产组合称为切线组合，其权重向量为：

$$\boldsymbol{\omega}_q=\frac{1}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-R_f\boldsymbol{\iota})}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-R_f\boldsymbol{\iota}) \tag{5.2.28}$$

我们用 q 作为切线组合的标识。(5.2.28)式实际上就是 $\frac{\bar{\omega}}{\iota'\bar{\omega}}$，$\bar{\omega}$ 由(5.2.27)式决定这样就保证得到的向量的所有分量之和为 1，也就是切线组合的权重向量。图 5.2 说明了存在无风险资产情况下的最小方差组合集。在存在无风险资产的情况下，所有有效的组合都位于从无风险资产到组合 q 的直线上。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

单位风险的期望超额收益为 CAPM 检验的经济解释提供了有用的基础。夏普率(Sharpe ratio)就是相应的度量。对任何资产或资产组合 a，夏普率定义为均值超额收益除以收益的标准差，即：

$$sr_a=\frac{\mu_a-R_f}{\sigma_a} \tag{5.2.29}$$

图 5.2 中的夏普率就是无风险收益$(R_f,0)$与组合(μ_a,σ_a)连线的斜率。切线组合 q 特征可以由所有风险组合中具有最大夏普率的组合来反映。检验给定组合的均值—方差有效性就等价于检验该组合的夏普率是否在所有可能组合的夏普率中达到最大。

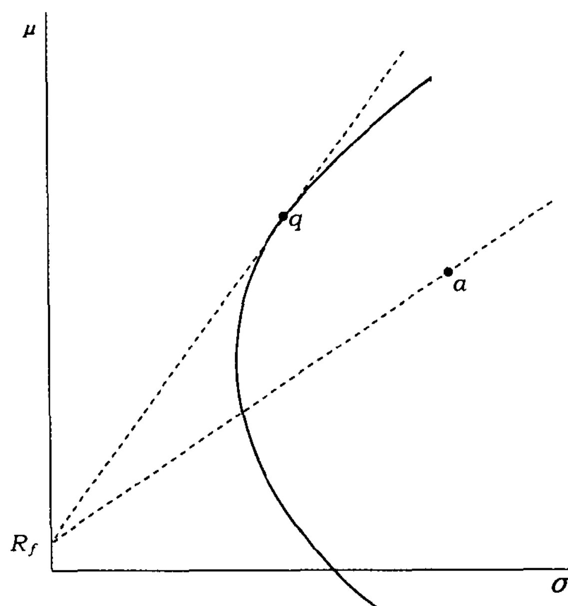


图 5.2 存在无风险资产的最小方差组合

5.3 估计和检验的统计框架

我们先使用投资者可以按无风险收益率借和租的假设，接着考虑 Sharpe-Lintner 的 CAPM 模型，最后我们取消这个假设分析 Black 的 CAPM 模型。

5.3.1 夏普和林特纳(Sharpe-Lintner)的 CAPM

定义 $\mathbf{Z}_t$ 是 N 个资产(或资产组合)的$(N\times1)$阶超额收益向量。对这 N 个资产，超额

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

收益可以用超额收益市场模型来描述：

$$\mathbf{Z}_t=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}Z_{mt}+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{5.3.1}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t]=0 \tag{5.3.2}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}'_t]=\boldsymbol{\Sigma} \tag{5.3.3}$$

$$\mathrm{E}[Z_{mt}]=\mu_m,\mathrm{E}[(Z_{mt}-\mu_m)^2]=\sigma_m^2 \tag{5.3.4}$$

$$\mathrm{Cov}(Z_{mt},\varepsilon_t)=0 \tag{5.3.5}$$

β 是$(N\times1)$阶贝塔系数向量，Z_{mt} 是时期 t 市场组合的超额收益，$\boldsymbol{\alpha}$ 和 ε_t 分别是$(N\times1)$阶资产收益截距向量和随机扰动向量。本章我们都不考虑 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 和 ε_t 关于市场组合或它们的替代量之间的依存关系。为方便起见，对夏普和林特纳的 CAPM 模型，我们定义 $\boldsymbol{\mu}$ 为期望超额收益。

对(5.3.1)式 Sharpe-Lintner 的 CAPM 来说向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的所有元素都为 0，这实际上来自(5.3.1)式的无条件期望与(5.1.3)式的比较结果以及构造检验模型的主要假设。如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的所有元素都为 0，则 m 就是切线组合。

我们使用最大似然方法来获得无约束模型的估计量。用普通最小二乘法进行资产对资产的回归也能获得 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 同样的估计量。我们考虑超额收益 $\mathbf{Z}_t$ 关于市场超额收益 Z_{mt} 的条件概率密度函数(pdf)。假定超额收益 Z_t 关于市场超额收益 Z_{mt} 的条件概率密度函数为联合正态分布，即：

$$f(\mathbf{Z}_t\mid Z_{mt})=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\mid\boldsymbol{\Sigma}\mid^{-\frac{1}{2}}\times\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Z}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}Z_{mt})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Z}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}Z_{mt})\right] \tag{5.3.6}$$

由于超额收益是同期 IID 的，当给定 T 个观测值时，联合概率密度函数为：

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2,\cdots,\mathbf{Z}_T\mid Z_{m1},Z_{m2},\cdots,Z_{mT})\\
&=\prod_{t=1}^{T}p(\mathbf{Z}_t\mid \mathbf{Z}_{mt}) \qquad (5.3.7)\\
&=\prod_{t=1}^{T}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\mid\boldsymbol{\Sigma}\mid^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad\times\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Z}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}Z_{mt})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Z}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}Z_{mt})\right]
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

给定(5.3.8)式和超额收益的观测，超额收益市场模型的参数可以用最大似然方法来估计。最大似然方法在统计上是一种很好的估计方法，它在一定的正规条件下具有一致性、渐近有效性和渐近正态性。为定义最大似然估计量，我们构造对数似然函数，也就是对联合概率密度函数取对数，并把它作为未知参数 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 和 Σ 的函数。用 $\mathcal{L}$ 表示对数似然函数，我们有：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\Sigma})=&-\frac{NT}{2}\log(2\pi)-\frac{T}{2}\log\mid\boldsymbol{\Sigma}\mid\\
&-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}Z_{mt})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Z}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}Z_{mt})
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

最大似然估计量就是使$\mathcal{L}$达到最大的参数值。为找出这些估计量，我们对$\mathcal{L}$关于未知参数 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 求微分，并分别使这些微分结果为 0。这些偏微分结果是：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} Z_{mt})\right] \tag{5.3.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} Z_{mt})Z_{mt}\right] \tag{5.3.11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{T}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} Z_{mt})(\boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} Z_{mt})'\right]\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tag{5.3.12}$$

令(5.3.10)式、(5.3.11)式和(5.3.12)式为 0，我们可以解得如下最大似然估计量：

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\mu}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\boldsymbol{\mu}}_m \tag{5.3.13}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(Z_{mt} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m)}{\sum_{t=1}^{T}(Z_{mt} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m)^2} \tag{5.3.14}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{N}(\boldsymbol{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}} Z_{mt})(\boldsymbol{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}} Z_{mt})' \tag{5.3.15}$$

这里，

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{N}\boldsymbol{Z}_t \text{ 以及 } \hat{\mu}_m = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{N}Z_{mt}$$

显然，可以注意到，这些公式就是参数的 OLS 估计量。

最大似然估计量关于市场超额收益 $Z_{m1}, Z_{m2}, \cdots, Z_{mT}$ 的条件分布可以从超额收益的联合正态和 IID 的假设中获得。估计量的方差和协方差可以用费雪尔信息矩阵的逆求得。费雪尔信息矩阵是对数似然函数关于参数向量二阶倒数的负期望值。有关费雪尔信息矩阵我们将在附录中讨论。

上述最大似然估计量的条件分布为：

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\alpha}, \frac{1}{T}\left[1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\boldsymbol{\Sigma}\right) \tag{5.3.16}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\boldsymbol{\Sigma}\right) \tag{5.3.17}$$

$$T\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \sim \mathcal{W}_N(T-2, \boldsymbol{\Sigma}) \tag{5.3.18}$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Z_{mt} - \hat{\mu}_m)^2$$

这里，$\mathcal{W}_N(T-2, \boldsymbol{\Sigma})$表示$(N \times N)$矩阵 $T\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 服从自由度为$(T-2)$协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的维夏特分布。这个分布是多变量卡方分布的推广。安德森(Anderson，1984)和缪俄希德(Muirhead，1983)对该分布的性质进行了讨论。

$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 的协方差为：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\mathrm{Cov}[\hat{\boldsymbol{\alpha}},\hat{\boldsymbol{\beta}}]=-\frac{1}{T}\left[\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\boldsymbol{\Sigma} \tag{5.3.19}$$

$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 独立。

运用无约束估计量，我们可以构造如下零假设的 Wald 检验统计量：

$$\mathrm{H}_0:\boldsymbol{\alpha}=0 \tag{5.3.20}$$

相应的备择假设为：

$$\mathrm{H}_A:\boldsymbol{\alpha}\neq 0 \tag{5.3.21}$$

Wald 检验统计量 J_0 为：

$$\begin{aligned}J_0&=\hat{\boldsymbol{\alpha}}[\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})]^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\\&=T\left[1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\end{aligned} \tag{5.3.22}$$

这里我们已经把(5.3.16)式替换了 $\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]$。在零假设之下 J_0 将具有自由度为 N 的卡方分布。因为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是未知的，所以用 J_0 检验 H_0，我们将在(5.3.22)式中以估计量 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 替代 $\boldsymbol{\Sigma}$，由于最大似然估计量 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 可以作为一致估计量，这样在零假设之下 J_0 将渐近地具有自由度为 N 的卡方分布。

于是，在此情形中使用 Wald 检验我们就不必借助大样本理论进行推断。由麦金雷(MacKinlay，1987)，吉邦斯、罗斯和尚肯(Gibbons，Ross and Shanken，1989)等发展起来的有限样本分布，在此就可以应用缪俄希德(Muirhead，1983)提出的下述定理来确定：

定理：令 m 维向量 $\mathbf{x}$ 服从正态分布 $\mathcal{N}(0,\boldsymbol{\Omega})$，$(m\times m)$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 服从 $\mathcal{W}_m(n,\boldsymbol{\Omega})(n\geqslant m)$，以及设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{A}$ 独立，则：

$$\frac{(n-m+1)}{m}\mathbf{x}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\sim F_{m,n-m+1}$$

为应用这个定理，我们设 $\mathbf{x}=\left[1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$，$\mathbf{A}=T\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$，$m=N$ 以及 $n=(T-2)$ 。则定义下述检验统计量 J_1：

$$J_1=\frac{(T-N-1)}{N}\left[1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \tag{5.3.23}$$

在零假设之下，检验统计量 J_1 的无条件分布是自由度为 $(N,T-N-1)$ 中心 F 分布。

我们仅仅使用来自无约束模型(即超额收益市场模型)的估计量就能够构造 Wald 检验 J_0 和有限样本 F 检验 J_1。现在考虑第三个检验，即所谓似然比检验。此时，我们需要来自带约束模型的估计量。带约束的模型就是 Sharpe-Lintner 的 CAPM，当 $\boldsymbol{\alpha}$ 被限制为 0 的时候，我们可以从(5.3.11)式和(5.3.12)式解得参数 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的带约束估计量，即：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^*=\frac{\sum_{t=1}^{T}\mathbf{Z}_t Z_{mt}}{\sum_{t=1}^{T}Z_{mt}^2} \tag{5.3.24}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^* = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\beta}}^* Z_{mt})(\mathbf{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\beta}}^* Z_{mt})' \tag{5.3.25}$$

在零假设之下，带约束估计量的分布是：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\hat{\mu}_m^2 + \hat{\sigma}_m^2}\right]\boldsymbol{\Sigma}\right) \tag{5.3.26}$$

$$T\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^* \sim \mathcal{W}_N(T-1, \boldsymbol{\Sigma}) \tag{5.3.27}$$

得到无约束和带约束的最大似然估计量以后，我们可以用似然比方法检验 Sharpe-Lintner 的 CAPM 模型所蕴涵的约束。

似然比检验是在似然比对数的基础上，用在最大似然估计量上计算的带约束对数似然函数减去无约束的对数似然函数的值来定义。我们用$\mathcal{LR}$表示对数似然比，即有：

$$\begin{aligned}\mathcal{LR} &= \mathcal{L}^* - \mathcal{L} \\ &= -\frac{T}{2}[\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*| - \log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|]\end{aligned} \tag{5.3.28}$$

这里，$\mathcal{L}^*$表示带约束的对数似然函数。为得到(5.3.28)式我们实际上已经使用了对无约束和带约束似然函数在最大似然估计量上的数值加总可以简化为 NT 的事实。现在，我们对无约束似然函数证明这个结果。对(5.3.9)式的最后一项在最大似然估计量上的数值进行加总，我们有：

$$\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\mathbf{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt}) \tag{5.3.29}$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\text{trace}[\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\mathbf{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt})(\mathbf{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt})'] \tag{5.3.30}$$

$$= \text{trace}\left[\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt})(\mathbf{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt})'\right] \tag{5.3.31}$$

$$= \text{trace}[\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(T\hat{\boldsymbol{\Sigma}})] = T\text{trace}[I] = NT. \tag{5.3.32}$$

注意，从(5.3.29)式到(5.3.30)式这步我们使用了 $\text{trace}AB = \text{trace}BA$，再到(5.3.31)式这步我们使用了和的迹等于迹的和。在(5.3.32)式这一步我们使用了单位矩阵的迹等于它的维数。

似然比检验依据的渐近结论是，在零假设之下，-2 乘以对数似然比服从自由度为 H_0 之下约束条件数的卡方分布。也就是我们检验 H_0 可以使用：

$$J_2 = -2\,\mathcal{LR} = T[\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*| - \log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|] \overset{a}{\sim} \chi_N^2 \tag{5.3.33}$$

有趣的是，这里我们也不必借助大样本理论来指导似然比检验。(5.3.23)式中的 J_1 本身就是一个似然比检验统计量，这个结果我们可继续运用。根据 J_1 是 J_2 的单调变换的事实，带约束的最大似然估计量可以被表示为无约束的最大似然估计量。对 $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ 我们有：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\mu}_m^2 + \hat{\sigma}_m^2}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \tag{5.3.34}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

以及对 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*$ 我们有：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^* &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_t-\hat{\boldsymbol{\beta}}^* Z_{mt})(\mathbf{Z}_t-\hat{\boldsymbol{\beta}}^* Z_{mt})' \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[(\mathbf{Z}_t-\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt})+\left(1-\frac{\hat{\mu}_m Z_{mt}}{\hat{\mu}_m^2+\hat{\sigma}_m^2}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}}\right] \\ &\quad\times\left[(\mathbf{Z}_t-\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt})+\left(1-\frac{\hat{\mu}_m Z_{mt}}{\hat{\mu}_m^2+\hat{\sigma}_m^2}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}}\right]' \end{aligned} \tag{5.3.35}$$

注意到：

$$\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_t-\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}Z_{mt})'\left(1-\frac{\hat{\mu}_m Z_{mt}}{\hat{\mu}_m^2+\hat{\sigma}_m^2}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}}=0 \tag{5.3.36}$$

我们有：

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}+\left(\frac{\hat{\sigma}_m^2}{\hat{\mu}_m^2+\hat{\sigma}_m^2}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}' \tag{5.3.37}$$

对上式两边取行列式有：

$$|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*|=|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|\left[\left(\frac{\hat{\sigma}_m^2}{\hat{\mu}_m^2+\hat{\sigma}_m^2}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}+1\right] \tag{5.3.38}$$

这里，从(5.3.37)式到(5.3.38)式我们提取了 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 因子并对单位矩阵 $\mathbf{I}$ 和向量 $\mathbf{x}$ 使用了 $|\mathbf{I}+\mathbf{x}\mathbf{x}'|=(1+\mathbf{x}'\mathbf{x})$ 的结论。用(5.3.38)式替换(5.3.28)式有：

$$\mathcal{LR}=-\frac{T}{2}\log\left[\left(\frac{\hat{\sigma}_m^2}{\hat{\mu}_m^2+\hat{\sigma}_m^2}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}+1\right] \tag{5.3.39}$$

以及对 J_1 我们有：

$$J_1=\frac{(T-N-1)}{N}\left(\exp\left[\frac{J_2}{T}\right]-1\right) \tag{5.3.40}$$

(5.3.40)式表明 J_1 是 J_2 的单调变换，这就证明 J_1 可以被解释为一个似然比检验。

因为 J_1 的有限样本分布是已知的，所以方程(5.3.40)可以被用来获得 J_2 的有限样本分布。我们将看到，在零假设之下 J_2 的有限样本分布不同于它的大样本分布。乔伯森和科基(Jobson and Korkie，1982)对 J_2 进行了调整，使其具有更好的有限样本性质。定义 J_3 为修正后的统计量，我们有：

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{\left(T-\frac{N}{2}-2\right)}{T}J_2 \\ &= \left(T-\frac{N}{2}-2\right)[\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*|-\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|]\overset{a}{\sim}\chi_N^2 \end{aligned} \tag{5.3.41}$$

我们将在第 5.4 节回顾 J_2 和 J_3 的有限样本性质问题。

使用数学有效集的结果，对检验统计量 J_1 我们可以作出有用的经济解释。吉邦斯、罗斯和尚肯(Gibbons，Ross and Shanken，1989)证明：

$$J_1=\frac{(T-N-1)}{N}\left(\frac{\dfrac{\hat{\mu}_q^2}{\hat{\sigma}_q^2}-\dfrac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}}{1+\dfrac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}}\right) \tag{5.3.42}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这里，通过 q 说明的组合代表了由(5.2.28)式中包括资产和市场组合的 N 个资产构造的事后切线组合。回到第 5.2 节那个在所有组合中具有最大平方夏普率的组合就是切线组合。于是，当事后市场组合是切线组合时，J_1 将等于 0；随市场的平方夏普率减小，J_1 将增大，显示出了对市场组合有效性的有力证据。我们将在第 5.7.2 节提出一个使用 J_1 的实证例子。

5.3.2 布莱克的 CAPM

在没有风险资产的情况下，我们考虑了(5.1.5)式中的 Black 的 CAPM。在该模型中，零贝塔组合的期望收益 $\mathrm{E}[R_{0m}]$ 被视为不可观测的，于是就成为未知的模型参数。定义零贝塔组合的期望收益为 γ，Black 的 CAPM 是：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathbf{R}_t] &= \boldsymbol{\iota}\gamma+\boldsymbol{\beta}(\mathrm{E}[R_{mt}]-\gamma)\\ &= (\boldsymbol{\iota}-\boldsymbol{\beta})\gamma+\boldsymbol{\beta}\mathrm{E}[R_{mt}]\end{aligned} \tag{5.3.43}$$

就 Black 模型而言，无约束模型就是实际收益模型。定义 $\mathbf{R}_t$ 为一个 N 个资产或资产组合的 $(N\times1)$ 阶实际收益向量。对这 N 个资产，实际收益模型是：

$$\mathbf{R}_t=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}R_{mt}+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{5.3.44}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t]=0 \tag{5.3.45}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}'_t]=\boldsymbol{\Sigma} \tag{5.3.46}$$

$$\mathrm{E}[R_{mt}]=\mu_m,\ \mathrm{E}[(R_{mt}-\mu_m)^2]=\sigma_m^2 \tag{5.3.47}$$

$$\mathrm{Cov}[R_{mt},\boldsymbol{\varepsilon}_t]=0 \tag{5.3.48}$$

β 是 $(N\times1)$ 阶资产贝塔系数向量，R_{mt} 是时期 t 市场组合收益，$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 分别是 $(N\times1)$ 阶资产收益截距和随机扰动项的向量。

Black 模型可检验的蕴涵从(5.3.44)式的无条件期望与(5.3.43)式的比较中反映得非常明显。该蕴涵就是：

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\iota}-\boldsymbol{\beta})\gamma \tag{5.3.49}$$

这个蕴涵对检验来说比 Sharpe-Lintner 模型的零截距约束更复杂，因为参数 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 呈现了非线性的关系。

在给定收益的 IID 和联合正态假设之下，布莱克模型可用最大似然方法来估计和检验。无约束模型的最大似然估计量，即(5.3.44)式中的实际收益模型的最大似然估计量，与超额收益市场模型是一致的，除非实际收益由超额收益来替代。从而，像 $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ 现在就是实际收益样本均值向量。对参数的最大似然估计量，我们有：

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m \tag{5.3.50}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\frac{\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t-\hat{\boldsymbol{\mu}})(R_{mt}-\hat{\mu}_m)}{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt}-\hat{\mu}_m)^2} \tag{5.3.51}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}R_{mt})(\mathbf{R}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}R_{mt})' \tag{5.3.52}$$

这里，

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{R}_t \text{ 和 } \hat{\mu}_m = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}R_{mt}$$

上述参数关于市场实际收益 $R_{m1}, R_{m2}, \cdots, R_{mT}$ 的条件分布是：

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\alpha}, \frac{1}{T}\left[1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\mathbf{\Sigma}\right) \tag{5.3.53}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \frac{1}{T}\left[\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\mathbf{\Sigma}\right) \tag{5.3.54}$$

$$T\hat{\mathbf{\Sigma}} \sim \mathcal{W}_N(T-2, \mathbf{\Sigma}) \tag{5.3.55}$$

这里，

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - \hat{\mu}_m)^2$$

$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 的协方差是：

$$\text{Cov}[\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}'] = -\left[\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\mathbf{\Sigma} \tag{5.3.56}$$

对带约束的模型，即 Black 的 CAPM，其对数似然函数是：

$$\mathcal{L}(\gamma, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{\Sigma}) = -\frac{NT}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|\mathbf{\Sigma}| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t - \gamma(\boldsymbol{\iota} - \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}R_{mt})'\mathbf{\Sigma}^{-1} \times (\mathbf{R}_t - \gamma(\boldsymbol{\iota} - \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}R_{mt}) \tag{5.3.57}$$

(5.3.57)式关于 $\gamma, \boldsymbol{\beta}$ 和 $\mathbf{\Sigma}$ 求微分，我们有：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma} = (\boldsymbol{\iota} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t - \gamma((\boldsymbol{\iota} - \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}R_{mt})\right] \tag{5.3.58}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t - \gamma((\boldsymbol{\iota} - \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}R_{mt})(R_{mt} - \gamma)\right] \tag{5.3.59}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{\Sigma}} = -\frac{T}{2}\mathbf{\Sigma}^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t - \gamma(\boldsymbol{\iota} - \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}R_{mt})(\mathbf{R}_t - \gamma(\boldsymbol{\iota} - \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}R_{mt})'\right]\mathbf{\Sigma}^{-1} \tag{5.3.60}$$

令(5.3.58)式、(5.3.59)式和(5.3.60)式为 0，我们可以解出最大似然估计量，它们是：

$$\hat{\gamma}^* = \frac{(\boldsymbol{\iota} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{*-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*\hat{\mu}_m)}{(\boldsymbol{\iota} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{*-1}(\boldsymbol{\iota} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)} \tag{5.3.61}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t - \hat{\gamma}^*\boldsymbol{\iota})(R_{mt} - \hat{\gamma}^*)}{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt} - \hat{\gamma}^*)^2} \tag{5.3.62}$$

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}^* = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t - \hat{\gamma}^*(\boldsymbol{\iota} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*) - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*R_{mt})(\mathbf{R}_t - \hat{\gamma}^*(\boldsymbol{\iota} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*) - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*R_{mt})' \tag{5.3.63}$$

从(5.3.61)式，(5.3.62)式和(5.3.63)式中我们可以看出，$\hat{\gamma}^*$ 中含有 $\hat{\beta}^*$，$\hat{\Sigma}^*$，而 $\hat{\beta}^*$ 中又含有 $\hat{\gamma}^*$，我们无法从中求出解析的最大似然估计量。因此，我们只能用 β 和 Σ 初始

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的一致估计量对(5.3.61)式,(5.3.62)式和(5.3.63)式进行迭代至收敛得到最大似然估计量。至于 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 初始的一致估计量我们分别采用无约束估计量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$。

给出了带约束和无约束的最大似然估计量后,我们可以构造零假设①的渐近似然比检验。零假设和备择假设为:

$$H_0:\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\iota}-\boldsymbol{\beta})\gamma \tag{5.3.64}$$

$$H_A:\boldsymbol{\alpha}\neq(\boldsymbol{\iota}-\boldsymbol{\beta})\gamma \tag{5.3.65}$$

似然比检验可以按类似于(5.3.33)式中检验(Sharpe-Lintner)模型的方式来构造。于是,我们定义如下 J_4 作为检验统计量,即:

$$J_4=T[\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*|-\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|]\overset{a}{\sim}\chi^2_{N-1} \tag{5.3.66}$$

注意,相对于 Sharpe-Lintner 模型,Black 的 CAPM 由于零贝塔期望收益是自由参数而丢失了一个自由度。除了残差协方差矩阵有 $N(N-1)/2$ 个参数外,无约束的实际收益模型具有 $2N$ 个参数,N 个构成了参数向量 $\boldsymbol{\alpha}$,还有 N 个构成了参数向量 $\boldsymbol{\beta}$。同样,对带约束的 Black CAPM,除了残差协方差矩阵具有与无约束模型相同的参数外,N 个参数构成了参数向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和期望零贝塔收益 γ 参数。于是,无约束模型就比带约束模型多出($N-1$)个参数。

我们同样可以通过调整 J_4 来改善其有限样本的性质。定义 J_5 为调整后的检验统计量,我们有:

$$J_5=\left(T-\frac{N}{2}-2\right)[\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*|-\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|]\overset{a}{\sim}\chi^2_{N-1} \tag{5.3.67}$$

在有限样本和零假设之下,J_5 的分布将更接近于卡方分布。(可参见第 5.4 节 Sharpe-Lintner 模型内容中的比较部分)。

上面讨论过的方法有两个不足。第一,由于估计量关于一阶条件必须进行迭代运算,所以在估计上存在着一些繁琐;第二,根据大样本理论得到的检验其有限样本性质可能很差。我们使用坎德尔(Kandel,1984)和尚肯(Shanken,1986)的研究结果来克服这些不足。他们提出了怎样计算精确的最大似然估计量以及怎样构造具有良好有限样本性质的近似检验。

对无约束模型,我们考虑用期望零贝塔收益 γ 的超额收益表达市场模型:

$$\mathbf{R}_t-\gamma\boldsymbol{\iota}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}(R_{mt}-\gamma)+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{5.3.68}$$

假设 γ 是已知的,则无约束模型的最大似然估计量为:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\gamma)=\hat{\boldsymbol{\mu}}-\gamma\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\mu}_m-\gamma), \tag{5.3.69}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\frac{\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t-\hat{\boldsymbol{\mu}})(R_{mt}-\hat{\mu}_m)}{\sum_{t=1}^{T}(R_{mt}-\hat{\mu}_m)^2} \tag{5.3.70}$$

① 在布莱克的 CAPM 的内容中,吉邦斯(Gibbons,1982)首次建立了这个检验,尚肯(Shanken,1985b)则提出了详细的分析过程。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

以及，

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[\mathbf{R}_t-\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}(R_{mt}-\hat{\mu}_m)][\mathbf{R}_t-\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}(R_{mt}-\hat{\mu}_m)]' \quad (5.3.71)$$

这里，$\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的无约束估计量不依赖 γ 的数值，但如上所示 $\boldsymbol{\alpha}$ 却依赖 γ 的值。无约束对数似然函数在最大似然估计量处的数值是：

$$\mathcal{L}=-\frac{NT}{2}\log(2\pi)-\frac{T}{2}\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|-\frac{NT}{2} \quad (5.3.72)$$

显然，(5.3.72)式就不依赖 γ 的数值。

我们把 $\boldsymbol{\alpha}$ 限制为 0，这样带约束的估计量就是：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*}=\frac{\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t-\gamma\boldsymbol{\iota})(R_{mt}-\gamma)}{\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_{mt}-\gamma)^2} \quad (5.3.73)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[\mathbf{R}_t-\gamma(\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*})-\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*}R_{mt}]\times[\mathbf{R}_t-\gamma(\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*})-\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*}R_{mt}]' \quad (5.3.74)$$

以及带约束似然函数的数值是：

$$\mathcal{L}^{*}(\gamma)=-\frac{NT}{2}\log(2\pi)-\frac{T}{2}\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*}(\gamma)|-\frac{NT}{2} \quad (5.3.75)$$

注意，带约束似然函数的数值依赖于 γ。从而我们构造如下对数似然比：

$$\mathcal{LR}(\gamma)=\mathcal{L}^{*}(\gamma)-\mathcal{L}=-\frac{T}{2}[\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*}(\gamma)|-\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|] \quad (5.3.76)$$

使对数似然比达到最小的 γ 的值就是使带约束对数似然函数达到最大的值，也就是 γ 的最大似然估计量。

对 Sharpe-Lintner 模型使用同样的手段和方法，其对数似然比可简化为：

$$\begin{aligned}\mathcal{LR}(\gamma)&=-\frac{T}{2}\log\left[\left(\frac{\hat{\sigma}_m^2}{(\hat{\mu}_m-\gamma)^2+\hat{\sigma}_m^2}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\gamma)'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\gamma)+1\right]\\&=-\frac{T}{2}\log\left[\left(\frac{\hat{\sigma}_m^2}{(\hat{\mu}_m-\gamma)^2+\hat{\sigma}_m^2}\right)[\hat{\boldsymbol{\mu}}-\gamma\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\mu}_m-\gamma)]'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\times[\hat{\boldsymbol{\mu}}-\gamma\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\mu}_m-\gamma)]+1\right]\end{aligned} \quad (5.3.77)$$

关于 γ 最小化$\mathcal{LR}$等价于最大化如下 G，即：

$$G=\left(\frac{\hat{\sigma}_m^2}{(\hat{\mu}_m-\gamma)^2+\hat{\sigma}_m^2}\right)[\hat{\boldsymbol{\mu}}-\gamma\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\mu}_m-\gamma)]'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}[\hat{\boldsymbol{\mu}}-\gamma\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\mu}_m-\gamma)] \quad (5.3.78)$$

于是，使 G 达到最大的 γ 数值就是最大似然估计量。对方程 $\frac{\partial G}{\partial \gamma}=0$ 有两个解，它们是如下二次方程的实数根，即：

$$H(\gamma)=A\gamma^2+B\gamma+C \quad (5.3.79)$$

这里，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$A\equiv\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}(\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m)-\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m^2}(\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

$$B\equiv\left(1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right)(\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}})-\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}(\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m)'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m)$$

$$C\equiv-\left(1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right)(\boldsymbol{\iota}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m)-\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m^2}(\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m)'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m)$$

如果 A 大于 0，最大似然估计量 $\hat{\gamma}^*$ 是最小的根，如果 A 小于 0，最大似然估计量 $\hat{\gamma}^*$ 就是最大的根。如果 $\hat{\mu}_m$ 大于球最小方差关于样本的均值收益，则 A 大于 0；也就是，市场组合在带约束的均值—方差边界的有效部分上面。我们无须借助迭代过程就可以通过把 $\hat{\gamma}^*$ 替换进入(5.3.62)式和(5.3.63)式来获得 $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*$ 。

我们用(5.3.68)式中 γ 的超额收益来构造 Black 模型的近似检验。如果 γ 是已知的，同样的方法可以构造 Sharpe-Lintner 模型的 F 检验，该检验在(5.3.23)式中用于检验零贝塔超额收益市场模型截距为 0 的零假设。这个检验统计量为：

$$J_6(\gamma)=\frac{(T-N-1)}{N}\left[1+\frac{(\hat{\mu}_m-\gamma)^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\gamma)'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\gamma)\sim \boldsymbol{F}_{N,T-N-1} \tag{5.3.80}$$

由于 γ 是未知的，所以在(5.3.80)式中的检验不能被直接运用。但是其近似检验 $J_6(\hat{\gamma}^*)$ 却可以被运用。因为，$\gamma=\hat{\gamma}^*$ 使对数似然比达到最小，当然也就使 $J_6(\gamma)$ 达到最小了。从而 $J_6(\hat{\gamma}^*)\leqslant J_6(\gamma_0)$，这里 γ_0 是 γ 的未知真实值。于是，使用 $J_6(\hat{\gamma}^*)$ 的检验会过度接受零假设。倘若使用 $\hat{\gamma}^*$ 零假设被拒绝，那么对任何 γ_0 零假设也将被拒绝。这种检验方法可以提供人们对零假设进行有用的检查。因为在(5.3.77)式中通常的渐近似然比检验也被发现是过度拒绝零假设的。

最后，我们考虑对期望零贝塔组合收益的推断问题。给出 γ 的最大似然估计量，我们需要对它的渐近方差作出推断。使用费雪尔信息矩阵，γ 的最大似然估计量的渐近方差是：

$$\mathrm{Var}[\hat{\gamma}^*]\overset{a}{=}\frac{1}{T}\left(1+\frac{(\mu_m-\gamma)^2}{\sigma_m^2}\right)[(\boldsymbol{\iota}-\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\iota}-\boldsymbol{\beta})]^{-1} \tag{5.3.81}$$

上述方差的估计量可以在最大似然估计处被计算，有关 γ 数值的推断可以由 $\hat{\gamma}^*$ 的渐近正态性给出。

5.4 检验尺度

一些计量经济模型在有限样本情形下其估计量的性质没有解析结果，此时普遍的做法是依赖大样本统计量进行推断。如果样本容量不够大以至于渐近结果无法提供良好的近似时，这种通过概率，也就是通过检验尺度表现的推断就不会准确了。因为在大样本理

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

论中没有提过可应用的标准样本容量是多少，它完全是研究理论合理有效性的一种良好实践。

如果人们依赖渐近分布理论进行推断，那么我们建立的多变量 F 检验为说明该问题提供了结构性思路。利用已知的 F 检验统计量 J_1 的有限样本分布，对各种渐近检验我们可以计算有限样本容量，因为我们已经知道渐近检验统计量是 J_1 的单调变换。

我们利用 J_1 与大样本检验统计量的关系，对 J_0 通过比较(5.3.22)式和(5.3.23)式两式，得到：

$$J_1=\frac{(T-N-1)}{NT}J_0 \tag{5.4.1}$$

对 J_2 我们回到(5.3.40)式，有：

$$J_1=\frac{(T-N-1)}{N}\left(\exp\left[\frac{J_2}{T}\right]-1\right) \tag{5.4.2}$$

对 J_3 我们看(5.4.2)式和(5.3.41)式，有：

$$J_1=\frac{(T-N-1)}{N}\left\{\exp\left[\frac{J_3}{\left(T-\frac{N}{2}-2\right)}\right]-1\right\} \tag{5.4.3}$$

在零假设之下，J_0，J_2 和 J_3 都是渐近服从自由度为 N 的卡方分布，此时和 J_1 的精确分布是 $F_{N,T-N-1}$。

根据给定的大样本统计量和 5%的渐近临界值我们可以计算精确的检验尺度。例如，考虑使用 J_0 和 10 个组合 60 个月度数据的一个检验。在此情形和零假设之下，J_0 可渐近地被看作为自由度为 10 的卡方随机变量。在此分布下，5%的渐近检验尺度的临界值是 18.31。从(5.4.1)式中可知，J_0 取值 18.31 相应于 J_1 的临界值是 1.495，根据零假设之下 J_1 的精确分布为 $F_{10,49}$，则 J_1 相应的检验尺度就为 17.0%。于是，5%检验尺度的渐近检验在 60 个月度数据样本中其检验尺度就为 17.0%，拒绝零假设的可能性扩大了 3 倍多以上。

表 5.1 列出了 N 取值为 10、20 和 40 以及 T 取值为 60、120、180、240 和 360 情况下 J_0，J_2 和 J_3 的计算结果。从表 5.1 可以很明显地看到，有限样本的检验尺度要大于 5%的渐近检验尺度。于是，大样本检验将会过度拒绝零假设。这个问题对建立在 J_0 和 J_2 基础上的渐近检验是严重的。当 $N=10$ 时，这个问题对 T 的低数值来说最重要。例如，在 5%的渐近尺度下，有限样本检验尺度 J_0 和 J_2 分别为 17.0%和 9.6%。当 N 增加时问题的严重性随之增加。当 $N=40$ 和 $T=60$ 时，5%的渐近尺度所对应的有限样本检验尺度 J_0 和 J_2 分别是 98.5%和 80.5%。在这些情况下，即便零假设是真实的，绝大多数情况下它还是被拒绝的。而在 $N=40$ 之下，即便 $N=360$，5%的渐近尺度仍然是有些夸大的。

对于在 J_3 基础上进行了有限样本调整的渐近检验，其表现就要比相应没有进行有限样本调整的渐近检验好得多。仅仅在 $N=40$ 和 $T=60$ 时其精确的检验尺度有些夸大。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这就证明了渐近检验统计量的有效样本调整有重要的作用。

表 5.1 使用大样本检验统计量的 Sharpe-Lintner CAPM 的有限样本检验尺度

N	T	J_0	J_2	J_3
10	60	0.170	0.096	0.051
	120	0.099	0.070	0.050
	180	0.080	0.062	0.050
	240	0.072	0.059	0.050
	360	0.064	0.056	0.050
20	60	0.462	0.211	0.057
	120	0.200	0.105	0.051
	180	0.136	0.082	0.051
	240	0.109	0.073	0.050
	360	0.086	0.064	0.050
40	60	0.985	0.805	0.141
	120	0.610	0.275	0.059
	180	0.368	0.164	0.053
	240	0.257	0.124	0.052
	360	0.165	0.092	0.051

注：这里列出的精确有限样本容量是对具有 5%渐近尺度的检验而言的。有限样本容量利用了 J_1 分布以及 J_1 分布与大样本统计量 J_0，J_2 和 J_3 之间的关系。N 是被解释的组合数，T 是时间序列的观测数。

5.5 检验的功效

当我们使用给定的检验统计量进行推断时必须考虑其功效。所谓检验的功效就是备择假设为真时拒绝零假设的概率。对于有意义的备择假设来说，低功效说明检验在区分备择假设和零假设方面是没有使用价值的。另一方面，虽然高功效表明检验可能非常富有价值，但对于很接近零假设的备择假设，它同样会拒绝零假设。在这种情况下如果有一个来自于零假设很小的、经济上不重要的偏差的话，就会拒绝很接近零假设的备择假设。

为描述检验的功效，有必要说明所选择的数据发生过程和检验尺度。对给定的检验尺度，功效就是在备择假设是真实的条件下检验统计量大于零假设之下临界值的概率。

为说明 CAPM 检验的功效，我们将把重点放在使用来自(5.3.23)式的 J_1 的 Sharpe-

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Lintner 模型上。这个检验的功效应当是有代表性的，并且描述起来也很方便。因为在零假设和备择假设下，J_1 的精确有限样本分布是已知的。在市场组合的超额收益条件下，对(5.3.23)式中定义的 J_1 的分布，我们有：

$$J_1 \sim F_{N,T-N-1}(\delta) \tag{5.5.1}$$

这里 δ 是 F 分布的非中心化参数，并且：

$$\delta = T\left[1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \tag{5.5.2}$$

为确定在零假设和备择假设下 J_1 分布，我们需要设定 S、N 和 T。

在零假设之下 α 为 0，于是此时 δ 也为 0，这样我们就有前面曾经得到过的该分布服从自由度分别为 N 和 $T-N-1$ 的中心化 $F_{N,T-N-1}$ 分布的结论。在备择假设之下，要确定 δ 就必须事先知道 $\hat{\mu}_m^2/\hat{\sigma}_m^2$ 的数值以及确定 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ 的数值。对于 $\hat{\mu}_m^2/\hat{\sigma}_m^2$ 的数值，在给定了一个月度观测区间的前提下，我们选择了相应于 8%事后年度化超额收益均值和 20%的样本年度化标准差的数值 0.013。

对二次型 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ 的数值，我们不必单独确定 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$，只要使用吉邦斯、罗斯和尚肯(Gibbons, Ross and Shanken, 1989)①的结果就可以了。我们设 q 是切线组合，而 m 是市场组合，则有：

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mu_q^2}{\sigma_q^2} - \frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2} = sr_q^2 - sr_m^2 \tag{5.5.3}$$

运用这个关系式，我们仅仅需要确定切线组合和市场组合夏普率的平方差就行了。切线组合是对包括市场组合在内的 N 个组合构成的总体而言的。这里，对切线组合的参数我们考虑四组数值。首先，对所有情形切线组合的年度化标准差我们设定为 16%；其次，年度化超额期望收益取 8.5%、10.2%、11.6%和 13.0%四个值。利用对市场的 8%年度化期望超额收益和对市场超额收益的 20%的年度化标准差，前面的四个数值 0.01，0.02，0.03 和 0.04 就对应于 δ/T。

对 N 我们考虑五个数值：1、5、10、20 和 40。对 T 我们考虑 60、120、240 和 360 这四个数值，它们对应于 5、10、20 和 30 年的月度数据。5%检验尺度的功效数值列在表 5.2 中。

对不同的实验设计和选择，检验的功效在数值上的大幅波动在表 5.2 中的反映是很明显的。对固定的 N，随着 T 的增大，功效就会有可观的增长。例如，对选择 2 来说，如果 $N=10$，当 T 从 60 增大到 360，功效就从 0.082 增加到 0.380。

对一个固定的选择，当 N 减小时功效的得益也是很大的。例如，对选择 3 来说，如果 $T=120$，当 N 从 40 减小到 1，功效就从 0.093 增加到 0.475。当然，这样的得益也许在实际当中不可行。当 N 减小时，除非这些组合与其权重是按比例联系在一起的，否则，切线

① 我们将在第 6 章讨论这个结果。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

组合的夏普率(和 F 分布的非中心化参数)将衰减。选择 N 使功效达到最大将依赖于当资产归在一起时切线组合的夏普率将衰减的那个比率。

虽然,从有关多变量检验的设计问题中我们得不到一般的结果,但是从对功效的分析中我们却可以得到不少启发。首先,增加时间序列的长度在功效上就会有显著的得益;还有,功效对 N 的取值十分敏感。由此得出 N 应尽量取小的值,也许不能再大于 10。

表 5.2　　利用统计量 J_1 对 Sharpe-Lintner CAPM 模型的 F 检验的功效

	$N=1$	$N=5$	$N=10$	$N=20$	$N=40$
选择 1:$\mu_q=8.5\%,\sigma_q=16\%$					
T=60	0.117	0.075	0.065	0.059	0.053
T=120	0.191	0.106	0.086	0.072	0.062
T=240	0.341	0.178	0.134	0.103	0.082
T=360	0.480	0.259	0.190	0.139	0.105
选择 2:$\mu_q=10.2\%,\sigma_q=16\%$					
T=60	0.189	0.103	0.082	0.068	0.057
T=120	0.339	0.174	0.130	0.098	0.077
T=240	0.597	0.340	0.247	0.174	0.124
T=360	0.770	0.508	0.380	0.267	0.183
选择 3:$\mu_q=11.6\%,\sigma_q=16\%$					
T=60	0.262	0.134	0.101	0.078	0.061
T=120	0.475	0.251	0.180	0.128	0.093
T=240	0.769	0.504	0.374	0.261	0.175
T=360	0.908	0.711	0.570	0.416	0.280
选择 4:$\mu_q=13.0\%,\sigma_q=16\%$					
T=60	0.334	0.167	0.121	0.089	0.065
T=120	0.593	0.332	0.237	0.163	0.110
T=240	0.873	0.647	0.502	0.356	0.234
T=360	0.965	0.845	0.726	0.563	0.389

注:备择假设的特征由期望超额收益的数值和切线的标准差的数值来反映。切线组合是对包括市场组合在内的 N 个组合构成的总体而言的。μ_q 是切线组合的期望超额收益,而 σ_q 是市场组合超额收益的年度化标准差。假定市场组合具有 8%的期望超额收益以及 20%的标准差。在零假设之下市场组合就是切线组合。N 是包含在检验中的组合个数,T 是所含月度数据的个数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

5.6 非正态和非独立同分布收益

本节我们集中考虑有关收益随时间偏离联合正态和独立同分布假设的统计推断问题。我们考虑伴随有非正态性，异方差性和收益的同期相关性的检验。对这样的检验人们之所以感兴趣，主要有如下二个理由：第一，当正态性的假设充分的话，就没有必要把 CAPM 作为理论模型。采用正态性假设主要是从统计目的考虑。没有正态性的假设，资本资产定价模型检验的有限样本性质就难以获得。第二，证券的月度收益偏离正态性是已经被证明了的①。同样，关于股票收益也存在着大量的异方差性和同期相关性的事实。② 即使同期相关性使人们不能把 CAPM 当作精确的理论模型来对待，它对检查模型的经验特征还是有意义的。由此考虑放松这些统计假设就是值得的。

我们可以运用广义矩方法(GMM)的框架结构来构造 CAPM 的稳健检验。我们的重点集中在 Sharpe-Lintner CAPM 的检验。当然，用同样的方式也可以构造 Black 模型的稳健检验。在 GMM 的框架结构中，资产组合收益关于市场收益的条件分布不仅可以是序列相关，还可以是条件异方差的。我们只要假定超额资产收益是平稳的和具有有限的四阶矩就行了。以后的分析将在附录包含 GMM 方法一般推广的 A. 2 部分加以描述。我们继续用含 T 个时间序列观测和 N 个资产的样本。按照附录的要求，我们需要建立具有 0 期望值的矩条件向量。所要求的矩条件来自于超额收益市场模型。残差向量提供 N 个矩条件，市场的超额收益与残差向量的乘积提供另外 N 个矩条件。使用附录中的概念，对 $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta})$ 我们有：

$$\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{h}_t\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{5.6.1}$$

这里，$\mathbf{h}'_t=[1,Z_{mt}]$，$\boldsymbol{\varepsilon}_t=\mathbf{Z}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}Z_{mt}$，以及 $\boldsymbol{\theta}'=[\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}']$。

超额收益市场模型的设定蕴涵着矩条件 $\mathrm{E}[\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)]=0$，这里 $\boldsymbol{\theta}_0$ 是真实参数向量。该矩条件构成了使用广义矩方法进行估计和检验的基础。广义矩方法(GMM)选择的估计量满足该矩条件样本平均的线性组合是零。对于样本平均，我们有：

$$\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}) \tag{5.6.2}$$

选择 GMM 估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$，使其满足以下二次型达到最小：

$$\mathbf{Q}_T(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})'\mathbf{W}\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta}) \tag{5.6.3}$$

这里 $\mathbf{W}$ 是$(2N\times2N)$阶正定加权矩阵。由于在该情况下，我们有 $2N$ 个矩条件方程

---

① 见法马(Fama，1965，1976)，布莱特伯格和戈内德斯(Blattberg and Gonedes，1974)，艾弗勒克—格雷夫斯和麦唐纳德(Affleck-Graves and McDonald，1989)的相关文献以及第 1 章的表 1.1。

② 见第 2 章和第 12 章以及这 2 章中所给的参考文献。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

和 $2N$ 个未知参数，所以系统可以被准确识别以及可以选择 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 使得样本矩的平均值 $\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})$ 等于 0。由于对任何加权矩阵 $\mathbf{Q}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ 将达到零最小值，所以 GMM 估计量将不再依赖 $\mathbf{W}$。于是，来自 GMM 过程的估计量等价于在(5.3.13)式和(5.3.14)式中的最大似然估计量。这些估计量是：

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m \tag{5.6.4}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\frac{\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_t-\hat{\boldsymbol{\mu}})(Z_{mt}-\hat{\mu}_m)}{\sum_{t=1}^{T}(Z_{mt}-\hat{\mu}_m)^2} \tag{5.6.5}$$

GMM 方法在这里应用的重要性是能够构造估计量的稳健协方差矩阵。而 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 的方差将与最大似然方法得到同样估计量的方差不同。GMM 估计量 $\hat{\theta}$ 的协方差矩阵根据附录中(A.2.8)式有：

$$\mathbf{V}=[\mathbf{D}'_0\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{D}_0]^{-1} \tag{5.6.6}$$

这里

$$\mathbf{D}_0=E\left[\frac{\partial\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}'}\right] \tag{5.6.7}$$

以及

$$\mathbf{S}_0=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}E[\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta})\mathbf{f}_{t-l}(\boldsymbol{\theta})'] \tag{5.6.8}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的渐近分布是正态的，于是我们有：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\overset{a}{\sim}\mathcal{N}\left(\theta,\frac{1}{T}[\mathbf{D}'_0\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{D}_0]^{-1}\right) \tag{5.6.9}$$

由于 $\mathbf{D}_0$ 和 $\mathbf{S}_0$ 都是未知的，所以应用(5.6.9)式中的分布结果要求它们的一致估计量。在这种情况下，对 $\mathbf{D}_0$ 我们有：

$$\mathbf{D}_0=-\begin{bmatrix}1 & \mu_m\\ \mu_m & (\sigma_m^2+\mu_m^2)\end{bmatrix}\otimes\mathbf{I}_N \tag{5.6.10}$$

使用 μ_m 和 σ_m^2 的最大似然估计量我们可以很容易地构造 $\mathbf{D}_0$ 的一致估计量 $\mathbf{D}_T$。为计算 $\mathbf{S}_0$ 的一致估计量，有必要增加把(5.6.8)式中的无限项和式简化为有限项和式的假设。附录 A.3 中讨论了各种可能的假设。定义 $\mathbf{S}_T$ 为 $\mathbf{S}_0$ 的一致估计量，则 $\frac{1}{T}\mathbf{R}[\mathbf{D}'_T\mathbf{S}_T^{-1}\mathbf{D}_T]^{-1}$ 就是 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的协方差矩阵的一致估计量。注意 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\theta}}$，这里 $\mathbf{R}=(1\quad 0)\otimes\mathbf{I}_N$；$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ 的稳健估计量是 $\frac{1}{T}\mathbf{R}[\mathbf{D}'_T\mathbf{S}_T^{-1}\mathbf{D}_T]^{-1}\mathbf{R}'$。使用这些结果我们可以构造(5.3.22)式中 Sharp-Lintner 模型的卡方检验。检验统计量是：

$$J_7=T\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\left[\mathbf{R}[\mathbf{D}'_T\mathbf{S}_T^{-1}\mathbf{D}_T]^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \tag{5.6.11}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在零假设 $\boldsymbol{\alpha}=0$ 的情况下，

$$J_7 \overset{a}{\sim} \chi^2_N \tag{5.6.12}$$

麦金雷和理查德森(MacKinlay and Richardson，1991)说明了在违反标准分布假设时使用标准 CAPM 检验统计量可能产生的偏差。他们尤其考虑了同期条件异方差性的情形。在具有同期条件异方差性的情况下，(5.3.3)式市场模型残差的方差依赖于同期市场收益。在他们的例子中，超额收益的 IID 和服从联合多变量 t 分布的假设导致了条件异方差性。当然，超额收益服从联合多变量 t 分布的假设也许是出于实证和理论两方面的动机。大部分来自收益分布的实证结果表明收益具有比其在正态情况下更厚的尾部和更高的峰顶。这样的结果就与收益服从多变量 t 分布的假设一致了。进一步还有，收益服从多变量 t 分布使得均值一方差分析与期望效用最大化一致起来了。这就从理论上对收益的分布给出了倾向性地选择①。

对 t 分布情形并且使用标准 CAPM 检验尺度，我们看到偏差依赖于市场组合的夏普率和 t 分布的自由度。麦金雷和理查德森(MacKinlay and Richardson，1991)给出了各种夏普率和从 5 到 10 的 t 分布自由度潜在的偏差的估计。他们发现一般情况下偏差是小的，但是如果夏普率高而 t 分布自由度小，则偏差也许会很大，并且可能会导致错误的统计推断。根据由 GMM 方法得到的 J_7 检验统计量对模型被拒绝的可能性所作的简单检查，发现是数据中异方差性的作用结果。

5.7 检验的工具

本章我们考虑有关检验方法的实证工具问题。包括实证结果的归纳，实证解释的工具和市场组合可观测性的讨论等内容。

5.7.1 实证结果的归纳

大量的文献表明自 1960 年代财务模型发展以来，关于 CAPM 的实证研究已经有了很大进展。早期的实证研究大部分都是从正面进行的。比如，布鲁姆、杰森和斯科尔斯(Black，Jensen and Scholes，1972)，法马和麦克贝恩(Fama and MacBeth，1973)以及布鲁姆和弗兰德(Blume and Friend，1973)所报告的全部实证结果都与市场组合均值一方差有效性是一致的。也有一些关于 Sharpe-Lintner CAPM 的实证结果，其中关于零贝塔组合均值收益的估计高于无风险收益的结论由 Black 模型作出了解释说明。

① 见因格索尔(Ingersoll，1987)的文献第 104 页。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在1970年代后期，有关CAPM好的实证文献较少，然而却出现了所谓非常规性研究文献。按照本章所讨论过的检验内容，非常规性可以被认为是公司的特征。利用这种特征可以捆绑资产，使得包括切线组合在内的资产组合的事后夏普率比市场组合的还要高。所以，从比较的角度看CAPM的预测能力，公司特征对截面样本均值收益提供的解释要比CAPM的贝塔系数有力。

早期的非常规性研究内容包括市盈率作用和规模效应两个方面。巴苏(Basu，1977)第一次提出了市盈率作用。巴苏发现对以公司市盈率为基础形成的组合来说，市场组合并不是以均值—方差有效出现的。低市盈率的公司具有较高的样本收益，而高市盈率的公司要比市场组合是均值方差有效的公司具有更低的收益。关于规模效应，邦茨(Bonz，1981)首先在文献中指出：当市场组合是均值—方差有效的时候，市场资本化程度低的公司的样本均值收益要比预期的高。这两个非常规性至少说明了低市赢率的公司大都是规模小的公司。

近来也有一些非常规性的研究结果。法马与弗兰切(Fama and French，1992，1993)发现贝塔系数不能解释以权益资产账面价值对市场价值的比率为基础形成的组合之间收益的差异。公司的权益资产账面价值对市场价值的比率高，其平均收益就要比由CAPM预测的结果高。同样，迪波恩德和塞勒(DeBondt and Thaler，1985)，以及杰伽迪希和蒂特曼(Jegadeesh and Titman，1993)发现，按照以往买入股票者价值减少和卖出股票者价值增加的结构形成的组合，其平均收益也要比CAPM预测的结果高。法马(Fama，1991)对这些和其他一些非常规性问题作了很好的讨论。

虽然，非常规性的研究结果也许从经济上指出了偏离CAPM问题的重要性，但其中对公司特征研究的一些文献还是有点理论动机的。这也就揭示了由于数据探察和样本选择所造成的偏差可能产生对CAPM实证结果的过分夸大。我们这里仅简短地讨论这种可能性。

数据探察性偏差与统计推断中的偏差有关，它们都因使用来自于数据的信息并用同样的数据或相关的数据进行以后的研究所造成。这些偏差由于经济的非实验性几乎不可避免。我们不可能为获得新的数据集而花费巨大代价去操作另一个经济实验。罗和麦金雷(Lo and MacKinlay，1990b)解释说明了在Sharpe-Lintner CAPM检验中数据探察性偏差的潜在数值。他们不是从理论上选择组合，而是使用相关数据从以往股票的均值收益并根据相应公司的特征(如规模和市盈率)把股票捆绑成投资组合来考虑的。比较有数据探察和没有数据探察两种情况下检验统计量在零假设之下的分布，我们认为其偏差的数值可能是很大的。而在实际当中，要确定对数据探察的调整也是很困难的。于是，要忠告大家的主要信息就是至少得把偏差当作模型发生偏离的一个潜在解释。

样本选择偏差可能是由于取得数据的同时把某一特定的股票类排除在分析之外所产生的。例如，科萨雷、尚肯和斯隆(Kothari，Shanken and Sloan，1995)认为账面与市场的价值比率研究对数据的要求会导致把绩差股排除在外，从而产生残存偏差。因为绩差股被认为具有低的收益和高的账面与市场的价值比率。含有高的账面与市场的价值比率的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

股票平均收益将会具有一种向上的偏差。科萨雷、尚肯和斯隆(Kothari, Shanken and Sloan, 1995)认为这种偏差是对前面引用法马与弗兰切(Fama and French, 1992, 1993)结果的很大反映。当然,这种特殊的残存偏差的重要性还没有确定,但是对研究者来说应当清楚来自于样本选择偏差的潜在问题。

5.7.2 实证解释的工具

我们提出 Sharpe-Lintner 模型的检验来说明检验方法论。我们考虑四个检验统计量:来自(5.3.23)式的 J_1、来自(5.3.33)式的 J_2、来自(5.3.4)式的 J_3 和来自(5.6.11)式的 J_7。检验被要求使用关于 10 个投资组合的 30 年月度收益的样本。纽约股票交易所和美国股票交易所的股票根据其市场价值被分配到组合中并赋予权数值。CRSP 加权指数被用作市场组合的替代量,一月期的美国财政部债券收益被用来作为无风险收益。样本范围从 1965 年 1 月到 1994 年 12 月。

检验在整个时段进行,即三个 10 年子时段和六个 5 年子时段。在假设子时段统计量独立的前提下对子时段也要构造整体加总检验统计量。对 J_2、J_3 和 J_7 来说,加总检验统计量是单个统计量的和。在零假设之下单个统计量分布是卡方分布,其自由度等于子时段数乘以每个时段的自由度。对 J_1 来说,加总统计量通过对 F 分布进行分割及求和来计算。分割因子由被分割的卡方分布近似 F 分布来计算。我们主要对一阶矩和二阶矩进行近似。对 J_1 子时段分割求和的零分布的自由度是子时段数乘以近似卡方分布的自由度。

表 5.3 列出了关于 Sharpe-Lintner CAPM 模型的实证结果。使用 J_1,对整个 30 年时期来说 p 值为 0.020,表明零假设在 5%的显著性水平下被拒绝。5 年和 10 年子时段检验的结果对 1965 年 1 月到 1974 年 12 月这第一个 10 年样本提出附加约束的最强的事实。检验统计量相互间的比较结果显示了有限样本推断会有不同的结果。J_1 和 J_2 比较的结果说明了先前讨论的渐近似然比检验有过度拒绝的事实。对 J_2 的有限样本调整结果很好,就像用 J_3 来推断一样,它们与使用 J_1 几乎是一样的。

表 5.3　　Sharpe-Lintner CAPM 检验的实证结果

Time	J_1	P-Value	J_2	P-Value	J_3	P-Value	J_7	P-Value
5 年子阶段								
1/65—12/69	2.038	0.049	20.867	0.022	18.432	0.048	22.105	0.015
1/70—12/74	2.136	0.039	21.712	0.017	19.179	0.038	21.397	0.018
1/75—12/79	1.914	0.066	19.784	0.031	17.476	0.064	27.922	0.002
1/80—12/84	1.224	0.300	13.378	0.203	11.818	0.297	13.066	0.220
1/85—12/89	1.732	0.100	18.164	0.052	16.045	0.098	16.915	0.076
1/90—12/94	1.153	0.344	12.680	0.242	11.200	0.342	12.379	0.260
Overall	77.224	0.004	106.586	* *	94.151	0.003	113.785	* *

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

Time	J_1	P-Value	J_2	P-Value	J_3	P-Value	J_7	P-Value
10 年子阶段								
1/65—12/74	2.400	0.013	23.883	0.008	22.490	0.013	24.649	0.006
1/75—12/84	2.248	0.020	22.503	0.013	21.190	0.020	27.192	0.002
1/85—12/94	1.900	0.053	19.281	0.037	18.157	0.052	16.373	0.089
Overall	57.690	0.001	65.667	* *	61.837	0.001	68.215	* *
30 年子阶段								
1/65—12/94	2.159	0.020	21.612	0.017	21.192	0.020	22.176	0.014

注：1. * * 小于 0.000 5。

2. 结果是我们按照市场价值计算 10 个股票加权组合。CRSP 加权值指数作为市场组合的度量；一月期的财政部债券作为无风险收益率的度量；检验依据 1965 年 1 月到 1994 年 12 月的月度数据。

5.7.3 市场组合的不可观测性

在前面的分析中，我们还没有指出市场收益是不可观测的以及检验中使用的是替代量这个问题。理论上讲，市场组合应当包含所有资产，而绝大多数检验仅使用纽约股票交易所和美国股票交易所的股票价值作为替代量。罗尔(Roll，1977)强调 CAPM 模型的检验实际上拒绝的仅仅是替代量的均值—方差有效性。如果使用真实的市场组合收益，该模型就不会被拒绝。针对统计推断对使用市场组合替代量这个敏感的问题，人们已经建议并提出了许多方法。

一种方法是由斯坦博(Stambaugh，1982)发展起来的。他考察了把一些较重要的市场组合替代量资产排除以后检验的敏感性①，证明了无论使用股票替代量、股票和债券替代量，还是股票、债券和实物资产替代量，统计推断的结果都是相似的。于是，他认为统计推断对作为市场组合度量的替代量中的误差是不敏感的，所以 Roll 关注的不是一个实证问题。

克服使用市场组合替代量敏感问题的另一种方法由坎德尔和斯坦博(Kandel and Stambaugh，1987)与尚肯(Shanken，1987a)提出。他们在论文中估计了市场组合收益替代量与真实市场收益之间相关的上界，结果不可避免地推翻了对 CAPM 的拒绝。他们的基本发现是市场组合收益替代量与真实市场收益之间的相关度超过 0.70，拒绝使用市场组合收益替代量的 CAPM 模型同样也意味着拒绝使用真实市场组合。于是，只要我们确

① 关于人力资本收益会计核算可能性的相关研究与工作，见梅耶斯(Mayers，1972)，坎贝尔(Campbell，1996a)和杰根纳森与万(Jagannathan and Wang，1996)的文献。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

认市场组合收益替代量与真实市场收益是高度相关的，否则就将完整地拒绝 CAPM。

5.8 截面回归

本章到目前为止，我们还是集中在市场组合的均值—方差有效性问题研究。关于 CAPM 的另一个观点就是认为期望收益与完全解释截面期望收益的市场贝塔系数之间似乎具有线性关系。这些想法可以运用截面回归方法来检验。

法马和麦克贝恩(Fama and MacBeth，1973)首先开创了截面回归方法。该方法的基本思想是：对每个截面，把收益投影到贝塔系数上，然后在时间轴上对所有估计汇总运算。假设贝塔系数是已知的，N 个资产中第 t 个截面的回归模型是：

$$Z_t=\gamma_{0t}\boldsymbol{\iota}+\gamma_{1t}\boldsymbol{\beta}_m+\boldsymbol{\eta}_t \tag{5.8.1}$$

这里，Z_t 是时段 t 超额资产收益的$(N\times1)$阶向量，$\boldsymbol{\iota}$ 是分量元素都为 1 的$(N\times1)$阶向量，$\boldsymbol{\beta}_m$ 是 CAPM 贝塔系数的$(N\times1)$阶向量。

法马和麦克贝恩方法的工具涉及到两步：第一步，给定 T 个时段的数据，对每个 $t(t=1,\cdots,T)$我们可以用 OLS 方法来估计(5. 8. 1)式的模型，从而得到 γ_{0t} 和 γ_{1t} 的 T 个估计。第二步，分析 $\hat{\gamma}_{0t}$ 和 $\hat{\gamma}_{1t}$ 的时间序列。定义 $\gamma_0=E[\gamma_{0t}]$和 $\gamma_1=E[\gamma_{1t}]$，则 Sharpe-Lintner CAPM 的含义就是 $\gamma_0=0$(即零截距)和 $\gamma_1>0$(即正的市场风险溢酬)。由于收益服从正态分布并且是同期 IID，于是伽玛参数(gammas)就服从正态分布并且也是同期 IID。这样，给定 γ_{0t} 和 γ_{1t} 的时间序列$(t=1,\cdots,T)$，我们用通常的 t -检验可以检验这些想法。定义 $\omega(\hat{\gamma}_j)$为 t -统计量，我们有：

$$w(\hat{\gamma}_j)=\frac{\hat{\gamma}_j}{\hat{\sigma}_{\gamma j}} \tag{5.8.2}$$

这里，

$$\hat{\gamma}_j=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\gamma}_{jt} \tag{5.8.3}$$

以及，

$$\hat{\sigma}^2_{\gamma j}=\frac{1}{T(T-1)}\sum_{t=1}^{T}(\hat{\gamma}_{jt}-\hat{\gamma}_j)^2 \tag{5.8.4}$$

$w(\hat{\gamma}_j)$的分布是自由度为$(T-1)$的学生氏 t 分布，并且还是渐近正态的。给定检验统计量，统计推断可以按通常的方式作出。

当接纳超出 CAPM 贝塔系数范围的额外风险度量时，因为法马—麦克贝恩方法很容易被修正，所以它特别有用。通过增加额外的风险度量，我们可以检查贝塔系数是否完全描述了期望收益中的截面变动。例如，当公司规模定义为权益的市场价值的对数时，我们可以考虑是否公司规模对公司的截面期望收益具有解释能力。定义 ζ_t 为时段初期相应

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

于公司规模元素的$(N\times1)$阶向量，我们可以讨论研究是否公司规模具有不被市场贝塔系数所反映的解释能力，即：

$$Z_t=\gamma_{0t}\boldsymbol{\iota}+\gamma_{1t}\boldsymbol{\beta}_m+\gamma_{2t}\boldsymbol{\zeta}_t+\boldsymbol{\eta}_t \tag{5.8.5}$$

使用从(5.8.5)式得到的$\hat{\gamma}_{2t}$，我们可以检验规模在超出贝塔系数范围没有任何解释能力的假设，此时$\gamma_2=0$。在(5.8.2)式至(5.8.4)式中我们设定$j=2$。

Fama-MacBeth 方法虽然有用，但还是存在一些问题。首先，这种方法不能直接应用，因为市场贝塔系数是未知的。于是，只能使用来自数据的贝塔系数的估计来处理回归模型，但这样就会引入误差进入变量的复杂性。误差进入变量问题可以用两种方式来说明。一种是被 Fama-MacBeth 采纳的。这种方法通过把股票分成几个组合和增加贝塔系数估计的精度，从而最小化误差进入变量问题。第二种方法由利曾伯格和拉玛斯沃米(Litzenberger and Ramaswamy，1979)建立，并由尚肯(Shanken，1992)加以归纳提炼。这种方法通过明确地调整标准差来修正因为引入误差进入变量所造成的偏差。尚肯建议(5.8.4)式中的$\hat{\sigma}^2_{\hat{\gamma}}$乘以调整因子$[1+(\hat{\mu}_m-\hat{\gamma}_0)^2/\hat{\sigma}^2_m]$。当这种方法消除了(5.8.2)式$t$-统计量中误差进入变量的偏差时，却不能消除由于真实贝塔系数不可观测性所造成的其他变量在(5.8.5)式中出现伪回归的可能性。市场组合的不可观测性也是截面回归方法的潜在问题。罗尔和罗斯(Roll and Ross，1994)证明了假如真实市场组合是有效的，那么在期望收益和贝塔系数之间的截面关系对于市场组合替代量稍微偏离真实市场组合一点都会很敏感。期望收益和贝塔系数之间关系的不足也可能是实证工作被迫使用市场组合替代量的事实结果。坎德尔和斯坦博(Kandel and Stambaugh，1995)证明了这种极端的敏感性通过使用广义最小二乘法替代普通最小二乘法后可潜在地减缓。当然，他们的结果还需依赖知道真实的收益协方差矩阵这个前提条件。而使用广义最小二乘法时采用被估的收益协方差矩阵，其得益也是不确定的。

5.9 结 论

本章我们已经集中讨论了检验无条件 CAPM 的经典方法。但是，其他领域的研究同样也是有趣的。一个重要的主题就是检验各类条件 CAPM 方法的拓展。在这类模型中，我们对描述经济状态的状态变量取条件。这种方法的拓展是有用的，因为 CAPM 可以按时期一期一期地取条件，而不是无条件地取。第 8 章将讨论条件 CAPM 可能处在的动态平衡环境；第 12 章将讨论检验条件 CAPM 的计量经济方法。

另一个重要的主题是均值—方差有效性和 CAPM 的贝叶斯(Bayesian)分析。贝叶斯分析允许先验信息的引入，并且指出像模型接受和拒绝之间僵硬的二者选一的经典方法的一些缺点。哈维和周(Harvey and Zhou，1990)，肯代尔、麦克劳克和斯坦博(Kandel，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

McCulloch and Stambaugh,1995)以及尚肯(Shanken,1987)在这方面都有研究的例子。

针对 CAPM 我们用过去 30 年美国股票市场的数据已经证明一些统计事实。除了这些事实之外,CAPM 在金融上还是广泛被运用的工具。当然,还存在一些关于事实怎样被模型解释的争论。有些人认为,CAPM 应当被具有多个风险来源的多因子模型所取代;其他一些人认为,由于对市场组合的错误度量,对条件信息地不适当忽视,实施数据探察或样本选择偏差等原因,使得 CAPM 模型的事实被过度夸大;还有的人坚持以无风险为基础的模型可以解释股票市场的非常规行为。下一章我们将讨论研究多因子资产定价模型,然后再回到第 6.6 节的讨论。

习　题

5.1　结论 5 叙述了任何资产或组合收益 R_a 关于任何最小方差组合收益 R_p(除了球最小方差组合外)以及与它相关的零贝塔组合收益 R_{op} 的多元回归,即:

$$R_a=\beta_0+\beta_1 R_{op}+\beta_2 R_p+\epsilon_p$$

试证明对回归系数有:$\beta_2=\beta_{ap}$,$\beta_1=1-\beta_{ap}$,以及 $\beta_0=0$。

5.2　如果市场组合是切线组合的话,试证明超额收益市场模型的截距 α 是零。

5.3　请你选择三个上市公司的股票,运用 1985 年 1 月至 1994 年 12 月这 10 年期间它们的月度收益的数据,按市值加权的市场指数数据以及一个月期的财政部债券收益率数据,对 Sharpe-Lintner 资本资产定价模型进行如下检验。

5.3.1　运用整个 10 年期间的样本数据,建立每个股票的超额收益关于市场超额收益(市场指数按市值加权)的回归模型。试在 5%的检验水平下,检验模型的截距为零,并说明系数的点估计、t-统计量和你是接受还是拒绝 CAPM。同时,运用回归诊断来检验你的模型设定。

5.3.3　把上述三个股票组成一个简单的等权组合,对该组合分别在 10 年期间的全样本上和等分后的每个子样本上重建回归模型。给出系数的点估计、t—统计量和你是接受还是拒绝 CAPM。同时,运用回归诊断来检验你的模型设定。

5.3.4　在 10 年期间的全样本上和等分后的每个子样本上,分别运用(5.3.23)式中的 F-检验统计量 J_1 对三个股票的上述回归模型作联合检验,检验模型中的截距项是否为零。

5.4　推导由吉邦斯、罗斯和尚肯得到的(5.5.3)式结果。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

6. 多因素定价模型

第 5 章的结尾我们总结了实证结果，指出 CAPM 模型中的贝塔不能完全解释截面资产预期报酬，这表明也许需要另外一个或多个因素来刻画预期报酬的行为特性，故考虑多因素定价模型。理论分析也表明，既然 CAPM 只在很强的假设下适用于各期之间，那么，使用多个因素分析也是必要的。两种主要的理论方法为由罗斯(Ross，1976)提出的基于套利分析的套利定价理论(APT)和由默顿(Merton，1973a)提出的基于均衡分析的跨时资产定价模型(ICAPM)模型。本章介绍多因素模型的计量经济分析。

本章结构如下，第 6.1 节简要讨论多因素方法的理论背景，第 6.2 节在已知因素下模型的估计和检验，第 6.3 节给出风险溢酬与预期报酬的估计量，第 6.4 节讨论构建因素的方法，这些因素并非总能由理论分析确定，第 6.5 节为实证结果。由于模型缺少特殊化，其产生的背离总能由另外的因素解释，第 6.6 节讨论如何解释偏离模型的问题。

6.1 理论背景

套利定价理论由罗斯(Ross，1976)提出，并可替代 CAPM。APT 涉及多个风险因素，较 CAPM 更为一般。而且，与 CAPM 不同，APT 无需说明市场投资组合。然而，这样是有代价的。APT 给出了预期报酬与一组未知数目的未确定因素间的近似关系。这样，不可避免地，该理论(除非存在着套利机会)模型的检验将依赖于附加假设的引入①。

APT 假设市场是竞争性的和无摩擦的，资产报酬的生成过程为：

$$R_i = a_i + \mathbf{b}'_i \mathbf{f} + \varepsilon_i \tag{6.1.1}$$

① 关于 APT 的检验是有争论的，尚肯(Shanken，1982)与戴伯维格和罗斯(Dybving and Ross，1985)提出了一个有趣的转换，德赫里麦斯、弗兰德、伽尔特肯和伽尔特肯(Dhrymes，Friend，Gultekin and Gultekin，1984)也对模型的实证提出质疑。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$E[\varepsilon_i \mid \mathbf{f}]=0 \tag{6.1.2}$$

$$E[\varepsilon_i^2]=\sigma_i^2 \leqslant \sigma^2 < \infty \tag{6.1.3}$$

其中，R_i 表示资产 i 的报酬，a_i 表示因素模型的截距，$\mathbf{b}_i$ 表示资产 i 的因素敏感度 $(K\times1)$ 向量，$\mathbf{f}$ 为共同因素实现值 $(K\times1)$ 向量，ε_i 为扰动项。对有 N 种资产的系统来说，

$$\mathbf{R}=\mathbf{a}+\mathbf{B}\mathbf{f}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.1.4}$$

$$E[\boldsymbol{\varepsilon} \mid \mathbf{f}]=0 \tag{6.1.5}$$

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}' \mid \mathbf{f}]=\boldsymbol{\Sigma} \tag{6.1.6}$$

在系统方程中，$\mathbf{R}$ 为 $(N\times1)$ 向量，并且 $\mathbf{R}=[R_1R_2\cdots R_N]'$，$\mathbf{a}$ 为 $(N\times1)$ 向量，并且 $\mathbf{a}=[a_1a_2\cdots a_N]'$，$\mathbf{B}$ 为 $(N\times K)$ 矩阵，并且 $\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_N]'$，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为 $(N\times1)$ 向量，并且 $\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_N]'$。进一步假设，因素能解释资产报酬的共同变动，从而足够大且充分多样化的投资组合消除扰动项①，因而，要求各资产间扰动项充分不相关。

在上述结构下，罗斯(Ross，1976)给出大经济下的无套利情形，意味着：

$$\boldsymbol{\mu} \approx \boldsymbol{\iota}\lambda_0+\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_K \tag{6.1.7}$$

$\boldsymbol{\mu}$ 为预期报酬 $(N\times1)$ 向量，λ_0 为零贝塔模型中的参数，如果无风险资产存在，等于无风险报酬；$\boldsymbol{\lambda}_K$ 为因素风险溢酬的 $(K\times1)$ 向量。本章中 $\boldsymbol{\iota}$ 均表示单位列向量。由于有限数目的资产可能误定价，(6.1.7)式只是一个近似式，从而无法产生资产报酬的直接可检验约束。为得到该约束，我们必须利用附加条件以使上述近似关系变为精确关系。

科诺(Connor，1984)提出了 APT 的竞争均衡模式，其特征是精确因素定价。在科诺(Connor)模型中，附加条件是市场投资组合完全多样化，且因素是普遍的。如果单个资产在总财富中不占很大比例，可认为市场投资组合充分多样化，因素的普遍性允许投资者在不限制其因素风险选择的情况下，通过多样化规避特定风险。

戴伯维格(Dybvig，1985)和戈里恩布莱特与蒂特曼(Grinblatt and Titman，1985)采用了不同的方法。给定代理人偏好结构，他们研究了偏离精确因素定价的可能程度。两篇论文均认为，在经济参量的合理定式下，理论偏离精确因素定价可以忽略不计，因而实证研究可以基于精确因素定价关系。

精确因素定价可由跨时资产定价框架推出，由默顿(Merton，1973a)提出的跨时资本资产定价模型，结合报酬条件分布的假设，可推出一个多因素模型。在该模型中，市场投资组合为一个因素，状态变量作为其他因素，其他因素来自于投资者对未来投资机会的不确定性而套期保值。布里登(Breeden，1979)，坎贝尔(Campbell，1993a，1996)与法马(Fama，1993)探讨了这一模型，我们将在第 8 章中予以讨论。

本章中一般情况下不区分 APT 与 ICAPM，我们分析精确因素定价模型，即：

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\iota}\lambda_0+\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_K \tag{6.1.8}$$

因素的定式有一定的弹性，大多数实证研究选择市场投资组合的一个代表作为一个因素。

① 一个大且充分多样化的投资组合包含了权重为 $1/N$ 的大量的股票。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

然而，在处理其他因素时有不同的技术手段。我们将考虑几种情况，例如，一种情况，APT 的因素与 ICAPM 的状态变量不必是可交易的投资组合；另一种情况，因素是投资组合报酬。这些因素投资组合被称为模仿投资组合，因为它们与因素有最大的相关性。精确因素定价在这些因素投资组合下成立，赫伯曼与坎德尔（Huberman and Kandel，1987）和布里登（Breeden，1979）分别讨论了 APT 与 ICAPM 问题。

6.2 估计和检验

本节我们考虑精确因素定价关系各种定式的估计和检验。该模型计量经济分析的出发点就是关于报酬时间序列行为的假设。我们假设因素实现值条件下的报酬在时间上服从独立同分布，并服从联合多元正态分布。这是一个很强的假设，但通过因素时间序列行为，允许报酬有限的相关性。而且，附录中提到用 GMM 对该模型进行估计和检验时，可放宽上述假设，多因素模型的 GMM 方法是第 5 章提到的检验 CAPM 的 GMM 方法的广义化。

如前所述，多因素模型既没有给出因素的个数，也没有给出因素的定式，因此，在估计和检验模型时，必须确定各因素（该问题将在第 6.4 节讨论）。本节中我们假设因素个数和定式给定。

我们将考虑精确因素定价模型的四种形式：(1)因素为可交易资产的投资组合且存在无风险资产；(2)因素为可交易资产的投资组合且不存在无风险资产；(3)因素不是可交易资产的投资组合；(4)因素是可交易资产的投资组合，并且因素投资组合在风险资产均值—方差有效前沿上。我们运用极大似然估计法来处理上述四种情况，尚肯（Shanken，1992b）运用截面回归法处理四种形式。

在因素条件下的报酬为联合正态分布时，我们可以利用似然比来构造四种形式中的任一形式的检验统计量。关于似然比统计量的推导与第 5 章中 CAPM 的情况类似，不再重述。所有情况对应的似然比统计量有同一形式，记检验统计量为 J，有：

$$J=-\left(T-\frac{N}{2}-K-1\right)[\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|-\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*|] \tag{6.2.1}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*$ 分别为无限制模型与限制模型中残差协方差矩阵的极大似然估计值，T 为时间序列观察值个数，N 为所含投资组合个数，K 为因素个数。如第 5 章所讨论的，检验统计量以 $(T-N/2-K-1)$ 而不是 T 为自由度，是为了改善有限样本原假设下的分布收敛大样本分布。[①] 在原假设下，J 的大样本分布服从 χ^2 分布，自由度等于原假设下的约束

① 参见(5.3.41)式和乔伯森和科基(Jobson and Korkie，1982)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

条件数目。

6.2.1 存在无风险资产时的投资组合因素

我们首先考虑无风险资产存在且其因素为交易投资组合的情形，此时，无限制模型是关于超额报酬的 K-因素模型，定义 $\mathbf{Z}_t$ 为 N 种资产(或资产投资组合)超额报酬的$(N\times1)$向量。对于超额报酬，K-因素线性模型为：

$$\mathbf{Z}_t=\mathbf{a}+\mathbf{B}\mathbf{Z}_{Kt}+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.2.2}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t]=0 \tag{6.2.3}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t']=\boldsymbol{\Sigma} \tag{6.2.4}$$

$$\mathrm{E}[\mathbf{Z}_{Kt}]=\boldsymbol{\mu}_K,\mathrm{E}[(\mathbf{Z}_{Kt}-\boldsymbol{\mu}_K)(\mathbf{Z}_{Kt}-\boldsymbol{\mu}_K)']=\boldsymbol{\Omega}_K \tag{6.2.5}$$

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{Z}_{Kt},\boldsymbol{\varepsilon}'_t]=\mathbf{O} \tag{6.2.6}$$

$\mathbf{B}$ 表示因素敏感度$(N\times K)$矩阵，$\mathbf{Z}_{Kt}$表示因素投资组合超额报酬的$(K\times1)$向量，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 分别表示资产报酬截距$(K\times1)$向量与扰动项$(K\times1)$向量，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为扰动项方差协方差矩阵，$\boldsymbol{\Omega}_K$ 为因素投资组合超额报酬的方差—协方差矩阵，$\mathbf{O}$ 为$(K\times N)$零矩阵，精确因素定价意味着(6.2.2)式中的向量 $\mathbf{a}$ 中各元素为零。

无限制模型(6.2.2)的极大似然估计量恰好是普通最小二乘估计量：

$$\hat{\mathbf{a}}=\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\mu}}_K \tag{6.2.7}$$

$$\hat{\mathbf{B}}=\Big[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_t-\hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{Z}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)'\Big]\Big[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)(\mathbf{Z}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)'\Big]^{-1} \tag{6.2.8}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_t-\hat{\mathbf{a}}-\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Z}_{Kt})(\mathbf{Z}_t-\hat{\mathbf{a}}-\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Z}_{Kt})' \tag{6.2.9}$$

其中，

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{Z}_t \text{ 且 } \hat{\boldsymbol{\mu}}_K=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{Z}_{Kt}$$

对于限制模型，向量 $\mathbf{a}$ 限制为零，极大似然估计量为：

$$\hat{\mathbf{B}}^*=\Big[\sum_{t=1}^{T}\mathbf{Z}_t\mathbf{Z}'_{Kt}\Big]\Big[\sum_{t=1}^{T}\mathbf{Z}_{Kt}\mathbf{Z}'_{Kt}\Big]^{-1} \tag{6.2.10}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_t-\hat{\mathbf{B}}^*\mathbf{Z}_{Kt})(\mathbf{Z}_t-\hat{\mathbf{B}}^*\mathbf{Z}_{Kt})' \tag{6.2.11}$$

原假设向量 $\mathbf{a}$ 为 0，可由 (6.2.1)式中的似然比统计量 J 检验。在原假设下，含有 N 个约束条件，因此，对应分布的自由度为 N。

在这种情况下，我们还可构造一个精确的多元 F-统计量检验原假设，记 J_1 为该统计量，有：

$$J_1=\frac{(T-N-K)}{N}[1+\hat{\boldsymbol{\mu}}'_K\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_K]^{-1}\hat{\mathbf{a}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\mathbf{a}} \tag{6.2.12}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中，$\hat{\mathbf{\Omega}}_K$ 为 $\mathbf{\Omega}_K$ 的极大似然估计，有：

$$\hat{\mathbf{\Omega}}_K = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Z}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)(\mathbf{Z}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)' \tag{6.2.13}$$

在原假设下，J_1 无条件服从分子自由度为 N、分母自由度为 $(T-N-K)$ 的 F 分布，该检验可以消除伴随着利用渐近分布理论而产生的问题，因而非常实用，乔伯森与科基(Jobson and Korkie，1985)给出了 J_1 的推导过程。

6.2.2 不存在无风险资产时的投资组合因素

在不存在无风险资产情况下，有一种多因素的零—贝塔模型，是 CAPM 的 Black 模式的等价形式，零—贝塔投资组合是与任何因素无敏感度的投资组合，预期报酬减零—贝塔投资组合报酬与因素敏感度矩阵的列线性相关，假定因素为预期报酬减零—贝塔投资组合报酬。

记 $\mathbf{R}_t$ 为 N 种资产(或资产的投资组合)实际报酬($N\times1$)向量，对于无限制模型，K-因素线性模型为：

$$\mathbf{R}_t=\mathbf{a}+\mathbf{B}\mathbf{R}_{Kt}+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.2.14}$$

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_t]=0 \tag{6.2.15}$$

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}'_t]=\mathbf{\Sigma} \tag{6.2.16}$$

$$E[\mathbf{R}_{Kt}]=\boldsymbol{\mu}_K, E[(\mathbf{R}_{Kt}-\boldsymbol{\mu}_K)(\mathbf{R}_{Kt}-\boldsymbol{\mu}_K)']=\mathbf{\Omega}_K \tag{6.2.17}$$

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{R}_{Kt},\boldsymbol{\varepsilon}'_t]=\mathbf{O} \tag{6.2.18}$$

$\mathbf{B}$ 是因素敏感度($N\times K$)矩阵，$\mathbf{R}_{Kt}$ 表示因素投资组合实际报酬($K\times1$)向量，$\mathbf{a}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 分别表示资产报酬截距($N\times1$)向量与扰动项($N\times1$)向量，$\mathbf{O}$ 为($K\times N$)零矩阵。

对无限制模型(6.2.14)式中，极大似然估计量为：

$$\hat{\mathbf{a}}=\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\mu}}_K \tag{6.2.19}$$

$$\hat{\mathbf{B}}=\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t-\hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{R}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)'\right]\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)(\mathbf{R}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)'\right]^{-1} \tag{6.2.20}$$

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t-\hat{\mathbf{a}}-\hat{\mathbf{B}}\mathbf{R}_{Kt})(\mathbf{R}_t-\hat{\mathbf{a}}-\hat{\mathbf{B}}\mathbf{R}_{Kt})' \tag{6.2.21}$$

其中，

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{R}_t \text{ 且 } \hat{\boldsymbol{\mu}}_K=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{R}_{Kt}$$

在限制模型中，实际报酬超过零—贝塔投资组合的预期报酬 γ_0，对于限制模型，有：

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_t &= \boldsymbol{\iota}\gamma_0+\mathbf{B}(\mathbf{R}_{Kt}-\boldsymbol{\iota}\gamma_0)+\boldsymbol{\varepsilon}_t \\ &= (\boldsymbol{\iota}-\mathbf{B}\boldsymbol{\iota})\gamma_0+\mathbf{B}\mathbf{R}_{Kt}+\boldsymbol{\varepsilon}_t\end{aligned} \tag{6.2.22}$$

限制模型的估计量为：

$$\hat{\mathbf{B}}^*=\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t-\boldsymbol{\iota}\hat{\gamma}_0)(\mathbf{R}_{Kt}-\boldsymbol{\iota}\hat{\gamma}_0)'\right]\times\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_{Kt}-\boldsymbol{\iota}\hat{\gamma}_0)(\mathbf{R}_{Kt}-\boldsymbol{\iota}\hat{\gamma}_0)'\right]^{-1} \tag{6.2.23}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[\mathbf{R}_t - \boldsymbol{\iota}\hat{\gamma}_0 - \hat{\mathbf{B}}^{*}(\mathbf{R}_{Kt} - \boldsymbol{\iota}\hat{\gamma}_0)]\times[\mathbf{R}_t - \boldsymbol{\iota}\hat{\gamma}_0 - \hat{\mathbf{B}}^{*}(\mathbf{R}_{Kt} - \boldsymbol{\iota}\hat{\gamma}_0)]' \tag{6.2.24}$$

$$\hat{\gamma}_0 = [(\boldsymbol{\iota} - \hat{\mathbf{B}}^{*}\boldsymbol{\iota})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}(\boldsymbol{\iota} - \hat{\mathbf{B}}^{*}\boldsymbol{\iota})]^{-1}\times[(\boldsymbol{\iota} - \hat{\mathbf{B}}^{*}\boldsymbol{\iota})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \hat{\mathbf{B}}^{*}\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)] \tag{6.2.25}$$

极大似然估计可从(6.2.23)式至(6.2.25)式迭代得到，由(6.2.20)式得到的 $\hat{\mathbf{B}}$ 与(6.2.21)式得到的 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 可作为(6.2.25)式中 $\mathbf{B}$ 与 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的初始值。

精确极大然似估计量无需迭代就可计算。方法是第 5 章中布莱克(Black)CAPM 中所介绍方法的广义化，这是尚肯(Shanken，1985a)提出的。γ_0 的估计量是二次方程的解，给定 γ_0，限制性条件下的 $\mathbf{B}$ 与 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的极大似然估计量满足(6.2.23)式与(6.2.24)式。

限制模型(6.2.22)对无限制模型(6.2.14)施加的限制条件是：

$$\mathbf{a} = (\boldsymbol{\iota} - \mathbf{B}\boldsymbol{\iota})\gamma_0 \tag{6.2.26}$$

这些限制条件可由(6.2.1)式的似然比统计量 J 检验，在原假设下分布的自由度为$(N-1)$，无风险资产存在情况下，自由度减少了一个，该自由度用于估计零—贝塔的预期报酬。

为了第 6.3 节中的应用，注意到极大似然估计量 $\hat{\gamma}_0$ 的渐近方差为：

$$\mathrm{Var}[\hat{\gamma}_0] = \frac{1}{T}(1 + (\hat{\boldsymbol{\mu}}_K - \hat{\gamma}_0\boldsymbol{\iota})'\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_K - \hat{\gamma}_0\boldsymbol{\iota}))\times[(\boldsymbol{\iota} - \hat{\mathbf{B}}^{*}\boldsymbol{\iota})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}(\boldsymbol{\iota} - \hat{\mathbf{B}}^{*}\boldsymbol{\iota})]^{-1} \tag{6.2.27}$$

6.2.3 宏观经济变量因素

因素并不一定是资产的可交易投资组合，某些情形下也可选取宏观经济变量，包括 GNP 增长率、债券收益率变动或不可预期通货膨胀。现在我们来考察一下宏观经济变量作为因素时精确因素定价模型的估计和检验。

记 $\mathbf{R}_t$ 为 N 种资产(或资产投资组合)实际报酬的$(N\times 1)$向量，对于无限制模型，K-因素线性模型为：

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{f}_{Kt} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.2.28}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t] = 0 \tag{6.2.29}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}'_t] = \boldsymbol{\Sigma} \tag{6.2.30}$$

$$\mathrm{E}[\mathbf{f}_{Kt}] = \boldsymbol{\mu}_{fK},\ \mathrm{E}[(\mathbf{f}_{Kt} - \boldsymbol{\mu}_{fK})(\mathbf{f}_{Kt} - \boldsymbol{\mu}_{fK})'] = \boldsymbol{\Omega}_K \tag{6.2.31}$$

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{f}_{Kt}, \boldsymbol{\varepsilon}'_t] = \mathbf{O} \tag{6.2.32}$$

$\mathbf{B}$ 表示因素敏感度的$(N\times K)$阶矩阵，$\mathbf{f}_{Kt}$表示因素的$(K\times 1)$向量，$\mathbf{a}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 分别表示资产报酬截距与扰动项的$(N\times 1)$向量，$\mathbf{O}$ 为$(K\times N)$零矩阵。

对于无限制模型(6.2.14)，极大似然估计量为：

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\boldsymbol{\mu}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK} \tag{6.2.33}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = [\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{f}_{Kt} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK})'][\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{f}_{Kt} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK})(\mathbf{f}_{Kt} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK})']^{-1} \tag{6.2.34}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t - \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{B}\mathbf{f}_{Kt})(\mathbf{R}_t - \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{B}\mathbf{f}_{Kt})' \tag{6.2.35}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中，

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{R}_t \text{ 且 } \hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{f}_{Kt}$$

比较(6. 2. 28)式与(6. 1. 8)式的无条件期望，可以非常方便地表示限制模型，(6. 2. 28)式的无条件期望为：

$$\boldsymbol{\mu}=\mathbf{a}+\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_{fK} \tag{6.2.36}$$

其中，$\boldsymbol{\mu}_{fK}=\mathrm{E}[\mathbf{f}_{Kt}]$。(6. 2. 36)式与(6. 1. 8)式的等式右边相等，有：

$$\mathbf{a}=\boldsymbol{\iota}\,\lambda_0+\mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda}_K-\boldsymbol{\mu}_{fK}) \tag{6.2.37}$$

定义 γ_0 为零贝塔参量 λ_0，且定义 γ_1 为$(\boldsymbol{\lambda}_K-\boldsymbol{\mu}_{fK})$，其中，$\boldsymbol{\lambda}_K$ 表示因素风险溢酬的$(K\times 1)$向量，对于限制模型，有：

$$\mathbf{R}_t=\boldsymbol{\iota}\gamma_0+\mathbf{B}\gamma_1+\mathbf{B}\mathbf{f}_{Kf}+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.2.38}$$

限制模型的估计量为：

$$\hat{\mathbf{B}}^*=\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t-\boldsymbol{\iota}\hat{\gamma}_0)(\mathbf{f}_{Kt}+\hat{\gamma}_1)'\right]\times\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{f}_{Kt}+\hat{\gamma}_1)(\mathbf{f}_{Kt}+\hat{\gamma}_1)'\right]^{-1} \tag{6.2.39}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[(\mathbf{R}_t-\boldsymbol{\iota}\,\hat{\gamma}_0)-\hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{f}_{Kt}+\hat{\gamma}_1)]\times[(\mathbf{R}_t-\boldsymbol{\iota}\hat{\gamma}_0)-\hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{f}_{Kt}+\hat{\gamma}_1)]' \tag{6.2.40}$$

$$\hat{\gamma}=[\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\mathbf{X}]^{-1}[\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}(\boldsymbol{\mu}-\hat{\mathbf{B}}^*\hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK})] \tag{6.2.41}$$

(6. 2. 41)式中的 $\mathbf{X}\equiv[\boldsymbol{\iota}\hat{\mathbf{B}}^*]$，$\gamma\equiv[\gamma_0\,\gamma']'$。

极大似然估计可从(6. 2. 39)式至(6. 2. 41)式之间迭代得到，由(6. 2. 34)式得到的 $\hat{\mathbf{B}}$ 与(6. 2. 35)式得到的 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 可作为(6. 2. 41)式中 $\mathbf{B}$ 与 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的初始值。

(6. 2. 38)式对(6. 2. 28)式施加的限制条件是：

$$\mathbf{a}=\boldsymbol{\iota}\gamma_0+\mathbf{B}\gamma_1 \tag{6.2.42}$$

这些限制条件可由(6. 2. 1)式中的似然比统计量 J 检验，原假设对应分布的自由度为 $N-K-1$，共有 N 个约束，估计 γ_0 损失了一个自由度，另外还有 K 个自由度被用来估计 λ_K 中的 K 个元素。

$\hat{\gamma}$ 的渐近方差符合极大似然法，极大似然估计量下的方差：

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\gamma}]=\frac{1}{T}(1+(\hat{\gamma}_1+\hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK})'\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1}(\hat{\gamma}_1+\hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK}))[\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\mathbf{X}]^{-1} \tag{6.2.43}$$

对于 $\hat{\gamma}$ 中元素方差的估计量，将分块逆法则应用于(6. 2. 43)式，有估计量：

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\gamma}_0]=\frac{1}{T}(1+(\hat{\gamma}_1+\hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK})'\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1}(\hat{\gamma}_1+\hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK}))\left[\boldsymbol{\iota}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\boldsymbol{\iota}-\boldsymbol{\iota}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\hat{\mathbf{B}}^*(\hat{\mathbf{B}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\hat{\mathbf{B}}^*)^{-1}\hat{\mathbf{B}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\boldsymbol{\iota}\right]^{-1} \tag{6.2.44}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\gamma}_1]=&\frac{1}{T}(1+(\hat{\gamma}_1+\hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK})'\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1}(\hat{\gamma}_1+\hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK}))(\hat{\mathbf{B}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\hat{\mathbf{B}}^*)^{-1}\\&+(\hat{\mathbf{B}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\hat{\mathbf{B}}^*)^{-1}\hat{\mathbf{B}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\boldsymbol{\iota}(\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\gamma}_0])\\&\times\boldsymbol{\iota}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\hat{\mathbf{B}}^*(\hat{\mathbf{B}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1}\hat{\mathbf{B}}^*)^{-1}\end{aligned} \tag{6.2.45}$$

我们将在第 6. 3 节因素风险报酬的推断中利用这些方差。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

6.2.4 均值—方差有效前沿上的因素投资组合

当因素投资组合位于均值—方差有效前沿上时，无需无风险资产的存在，精确因素定价模型中的截距 λ_0 就为零。因此，这种情况下保留了第一种情况的简单性。在 APT 方面，位于有效前沿需要位于最小方差边界上的两个充分多样化投资组合。查伯雷恩(Chamberlain，1983a)探讨了这种情况。

无限制模型是关于实际报酬的 K-因素模型。记 $\mathbf{R}_t$ 为 N 种资产(或资产的投资组合)实际报酬($N\times1$)向量。对于实际报酬，一个 K-因素线性模型为：

$$\mathbf{R}_t=\mathbf{a}+\mathbf{B}\mathbf{R}_{Kt}+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.2.46}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t]=0 \tag{6.2.47}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}'_t]=\boldsymbol{\Sigma} \tag{6.2.48}$$

$$\mathrm{E}[\mathbf{R}_{Kt}]=\boldsymbol{\mu}_K,\mathrm{E}[(\mathbf{R}_{Kt}-\boldsymbol{\mu}_K)(\mathbf{R}_{Kt}-\boldsymbol{\mu}_K)']=\boldsymbol{\Omega}_K \tag{6.2.49}$$

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{R}_{Kt},\boldsymbol{\varepsilon}'_t]=\mathbf{O} \tag{6.2.50}$$

$\mathbf{B}$ 表示因素敏感度的($N\times K$)阶矩阵，$\mathbf{R}_{Kt}$表示因素投资组合实际报酬($K\times1$)向量，$\mathbf{a}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 分别表示资产报酬截距($N\times1$)向量与扰动项($N\times1$)向量，$\mathbf{O}$ 为($K\times N$)零矩阵。包括均值—方差有效前沿上的因素投资组合对(6.2.46)式的约束条件为：

$$\mathbf{a}=0,\mathbf{B}\boldsymbol{\iota}=\boldsymbol{\iota} \tag{6.2.51}$$

为从直观上理解这些约束条件，我们可以回到第 5 章 Black 的 CAPM，那里构造一个均值—方差有效前沿上投资组合的例子。两因素 APT 模型与其他多因素模型对应的理论虽然不同，但约束条件却是相同的，无限制的布莱克模型表示为：

$$\mathbf{R}_t=\mathbf{a}+\boldsymbol{\beta}_{0m}\mathbf{R}_{0t}+\boldsymbol{\beta}_m\mathbf{R}_{mt}+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.2.52}$$

其中，$\mathbf{R}_{mt}$ 与 $\mathbf{R}_{0t}$分别为市场投资组合与零一贝塔投资组合的报酬。第 5 章中布莱克模型的约束条件是 $\mathbf{a}=0$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{0m}+\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\iota}$，这些约束条件对应于(6.2.51)式。

对无限制模型(6.2.46)，极大似然估计量为：

$$\hat{\mathbf{a}}=\hat{\boldsymbol{\mu}}-\hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\mu}}_K \tag{6.2.53}$$

$$\hat{\mathbf{B}}=\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t-\hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{R}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)'\right]\left[\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)(\mathbf{R}_{Kt}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_K)'\right]^{-1} \tag{6.2.54}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_t-\hat{\mathbf{a}}-\hat{\mathbf{B}}\mathbf{R}_{Kt})(\mathbf{R}_t-\hat{\mathbf{a}}-\hat{\mathbf{B}}\mathbf{R}_{Kt})' \tag{6.2.55}$$

其中，

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{R}_t \text{且} \hat{\boldsymbol{\mu}}_K=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{R}_{Kt}$$

为估计限制模型，将无限制模型(6.2.46)中的矩阵 $\mathbf{B}$ 分块为($N\times1$)向量 $\mathbf{b}_1$ 与($N\times(K-1)$)矩阵 $\mathbf{B}_1$，因素投资组合向量分块为行向量 $\mathbf{R}_{1t}$与($K-1$)个行向量 $\mathbf{R}_{K^*t}$。这样，约束条件 $\mathbf{B}\boldsymbol{\iota}=\boldsymbol{\iota}$ 可被表示为 $\mathbf{b}_1+\mathbf{B}_1\boldsymbol{\iota}=\boldsymbol{\iota}$，对无限制模型，有：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{a} + \mathbf{b}_1 \mathbf{R}_{1t} + \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_{K^*,t} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.2.56}$$

将 $\mathbf{a}=0$ 与 $\mathbf{b}_1 = \boldsymbol{\iota} - \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\iota}$ 代入(6.2.56)式可得限制模型：

$$\mathbf{R}_t - \boldsymbol{\iota} \mathbf{R}_{1t} = \mathbf{B}_1 (\mathbf{R}_{K^*,t} - \boldsymbol{\iota} \mathbf{R}_{1t}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.2.57}$$

利用(6.2.57)式，限制模型的极大似然比估计量为：

$$\hat{\mathbf{B}}_1^* = [\sum_{t=1}^{T} (\mathbf{R}_t - \boldsymbol{\iota} \mathbf{R}_{1t})(\mathbf{R}_{K^*,t} - \boldsymbol{\iota} \mathbf{R}_{1t})'] \times [\sum_{t=1}^{T} (\mathbf{R}_{Kt} - \boldsymbol{\iota} \mathbf{R}_{1t})(\mathbf{R}_{K^*,t} - \boldsymbol{\iota} \mathbf{R}_{1t})']^{-1} \tag{6.2.58}$$

$$\hat{\mathbf{b}}_1^* = \boldsymbol{\iota} - \hat{\mathbf{B}}_1^* \boldsymbol{\iota} \tag{6.2.59}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\mathbf{R}_t - \hat{\mathbf{B}}^* \mathbf{R}_{Kt})(\mathbf{R}_t - \hat{\mathbf{B}}^* \mathbf{R}_{Kt})' \tag{6.2.60}$$

利用(6.2.1)式中的似然比统计量 J，可检验 $\mathbf{a}$ 等于零的原假设。由于 $\mathbf{a}=0$ 是 N 个约束条件，$\mathbf{B}\boldsymbol{\iota} = \boldsymbol{\iota}$ 又是 N 个约束条件，所以，原假设对应分布的自由度为 $2N$。

给定(6.2.51)式的线性约束条件和多元正态假设，我们可构造原假设的精确检验，记 J_2 为检验统计量，有：

$$J_2 = \frac{(T-N-K)}{N} \left[\frac{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*|}{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|} - 1 \right] \tag{6.2.61}$$

在原假设下，J_2 无条件服从分子自由度为 $2N$、分母自由度为 $2(T-N-K)$ 的 F 分布，胡伯曼和坎德(Huberman and Kandel，1987)给出该检验的推导过程。

6.3 风险溢酬与预期报酬的估计

所有精确因素定价模型都可以估计给定资产的预期报酬，由于预期报酬关系式为 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\iota}\lambda_0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_K$，因此，需要度量因素敏感度 $\mathbf{B}$，无风险报酬或零—贝塔预期报酬 λ_0，以及因素风险溢酬 λ_K。$\mathbf{B}$ 无风险资产报酬或零—贝塔预期报酬可直接得到。限制模型的极大似然估计量 $\hat{\mathbf{B}}^*$ 可用作 $\mathbf{B}$。观察到的无风险资产报酬对于无风险资产是合适的，如果无风险资产不存在，极大似然估计量 $\hat{\gamma}_0$ 可作为零—贝塔预期报酬。

有必要进行进一步的估计，以构造因素风险溢酬的估计。适当的估计方法因确切的因素定价的四种情况的不同而变化。当因素为可交易投资组合的超额报酬时，风险溢酬可以直接由可交易投资组合超额报酬的样本均值得到，有：

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K = \hat{\boldsymbol{\mu}}_K = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mathbf{Z}_{Kt} \tag{6.3.1}$$

$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K$ 方差的一个估计量为：

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K] = \frac{1}{T} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_K = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} (\mathbf{Z}_{Kt} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_K)(\mathbf{Z}_{Kt} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_K)' \tag{6.3.2}$$

当无风险资产不存在时，并以投资组合为因素，因素风险溢酬可由因素投资组合报酬的样本均值与估计的零—贝塔投资组合报酬之差估计：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K = \hat{\boldsymbol{\mu}}_K - \boldsymbol{\iota}\,\hat{\gamma}_0 \tag{6.3.3}$$

这样，$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K$ 的方差估计量为：

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K] = \frac{1}{T}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K + \widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\gamma}_0]\boldsymbol{\iota\iota}' \tag{6.3.4}$$

其中，$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\gamma}_0]$来自(6.2.27)式，由于 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_K$ 与 $\hat{\gamma}_0$ 是相互独立的，(6.3.4)式中的协方差可设为零。

当因素不是可交易的投资组合时，因素风险溢酬 λ_K 向量的估计值是因素实现值的均值估计与 γ_1 的估计之和：

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK} + \hat{\gamma}_1 \tag{6.3.5}$$

这样，$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K$ 方差的估计量为：

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K] = \frac{1}{T}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K + \widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\gamma}_1] \tag{6.3.6}$$

其中，$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\gamma}_1]$来自(6.2.45)式，由于 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{fK}$ 与 $\hat{\gamma}_1$ 独立，(6.3.6)式中的协方差项可设为零。

在第四种情况下，因素投资组合位于均值—方差有效前沿上，与第一种情况类似，只是以实际报酬代替超额报酬，$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K$ 是因素投资组合的样本均值，而向量 λ_0 等于零。

将 $\mathbf{B}$、λ_0 和 $\boldsymbol{\lambda}_K$ 的估计量代入(6.1.8)式，可估计任一个资产的预期报酬。由于(6.1.8)式的参数是非线性的，当估计其标准误差时，需要线性近似和参数估计的协方差。

探讨因素是否能联合定价也是一个有趣的问题，给定风险溢酬估计的向量和其协方差矩阵，因素不能联合定价的原假设可由下面的检验统计量检验：

$$J_3 = \frac{(T-K)}{TK}\hat{\boldsymbol{\lambda}}'_K\,\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K]^{-1}\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K \tag{6.3.7}$$

渐近地，在原假设 $\lambda_K=0$ 下，J_3 服从自由度为 K 与 T-K 的 F 分布，分布的结果是 Hotelling 的 T^2统计量的一种应用，并且在仅基于因素的样本均值的 $\boldsymbol{\lambda}_K$ 估计量情形的有限样本下是精确的。我们也可以用下面的统计量检验任何单个因素的显著性：

$$J_4 = \frac{\hat{\lambda}_{jK}}{\sqrt{v_{jj}}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \tag{6.3.8}$$

其中，$\hat{\lambda}_{jK}$是$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K$ 的第 j 个元素，v_{jj}是$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K]$的第$(j,j)$个元素。在因素已从理论上已确定的情形下，检验单个元素是否定价是合适的，但这种检验对实证导出的因素却并非适用，因为，正如第 6.4.1 节所解释的，因素仅在做正交变换后才能被识别，因此，单个因素没有清晰的经济含义。

尚肯(Shanken,1992b)认为因素风险溢酬也能通过两阶段截面回归方法估计，第一步，由普通最小二乘法估计各资产的因素敏感度，这些参数为因素载荷系数矩阵 $\mathbf{B}$ 的一个度量，记为 $\tilde{\mathbf{B}}$，$\mathbf{B}$ 的估计量与具有联合正态独立同分布的残差下的非限制极大似然估计

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

量等同。

第二步，利用 $\tilde{\mathbf{B}}$ 与每期资产报酬的($N\times1$)向量，事后因素风险溢酬可一期一期估计，第二步的回归是：

$$\mathbf{Z}_t=\boldsymbol{\iota}\,\lambda_{0t}+\tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{\lambda}_{Kt}+\boldsymbol{\eta}_t \tag{6.3.9}$$

该回归可通过最小二乘法进行一致估计，广义最小二乘法(GLS)也适用。回归的结果为事后的因素风险溢酬 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_K$($t=1,\cdots,T$)的时间序列，以及事后零—贝塔投资组合报酬的时间序列 $\hat{\lambda}_{0t}$，$t=1,\cdots,T$。

通常的工作是利用这些事后序列的均值与标准偏差推断风险溢酬，而这一方法是合理的近似，尚肯(Shanken，1992b)认为计算的均值标准差低估了真实标准差，这是因为他们不能解释 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的估计误差，因而，尚肯(Shanken)推导了一种能提供标准差调整的方法。不过利用极大似然估计法时无需调整，因为极大似然估计量已考虑了这种调整。

6.4 因素的选取

在第 6.2 节得出的估计与检验结果中，假设因素是被识别的，本节我们讨论界定因素的方法，方法有两类，统计方法和理论方法。统计方法主要由 APT 理论引出，首先从资产报酬的全面集合构建因素投资组合(通常要比进行估计和检验的模型的资产报酬集合要大)，然后由报酬的样本数据构建代表因素的投资组合；理论方法从反映经济范围内的系统风险方面识别因素。

6.4.1 统计方法

使用统计方法构建因素要从线性因素模型出发，我们依实际报酬进行分析，同样的分析适用于无风险资产存在时的超额报酬。回顾线性模型，有：

$$\mathbf{R}_t=\mathbf{a}+\mathbf{B}\mathbf{f}_t+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.4.1}$$

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}'_t\,|\,\mathbf{f}_t]=\boldsymbol{\Sigma} \tag{6.4.2}$$

其中，$\mathbf{R}_t$表示 t 期资产报酬 ($N\times1$)向量，$\mathbf{f}_t$ 表示 t 期各因素实现值($K\times1$)向量，$\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 为 t 期扰动项($N\times1$)向量。资产总数 N 很大，通常远大于期数 T。两个主要的统计分析方法为因子分析和主成分分析。

因子分析

利用因子分析需分两步进行。首先，估计因素敏感度矩阵 $\mathbf{B}$ 和扰动项协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$，这些估计量用于构建度量因素实现值。关于标准因子分析，假设存在一个严格因素结构，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在此结构下，K 个因素能够解释资产报酬的截面协方差，因而 $\mathbf{\Sigma}$ 是对角阵（罗斯在其最初的 APT 研究中运用了这一结构）。

给定一个严格因子结构和 K 个因素，我们可以将资产报酬协方差（$N\times N$）矩阵表示为两部分，因素变动和残差变动，即：

$$\mathbf{\Omega}=\mathbf{B}\mathbf{\Omega}_K\mathbf{B}'+\mathbf{D} \tag{6.4.3}$$

其中，$E[\mathbf{f}_t\mathbf{f}'_t]=\mathbf{\Omega}_K$ 且 $\mathbf{\Sigma}=\mathbf{D}$，是对角阵。当因素未知时，$\mathbf{B}$ 仅是正交变换。对任何（$K\times K$）正交变换阵 $\mathbf{G}$，如 $\mathbf{GG}'=\mathbf{I}$，所有的变换 $\mathbf{BG}$ 都等价。当限制因素相互正交且方差为 1 时，可消除这种旋转不确定性，这样，$\mathbf{\Omega}_K=\mathbf{I}$，$\mathbf{B}$ 是惟一的正交变换。在这些合适的约束条件下，报酬的协方差矩阵可表示为：

$$\mathbf{\Omega}=\mathbf{BB}'+\mathbf{D} \tag{6.4.4}$$

给定（6.4.4）式的形式，假设资产报酬服从联合正态和独立同分布，极大似然因子分析可产生 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{D}$ 的估计。由于这种极大似然的一阶条件是参数高度非线性，使用通常的迭代过程求解估计量的速度可能很慢，且难以收敛。鲁宾和塞耶（Rubin and Thayer，1982）提出了另一种算法能加快极大似然估计量的收敛。

给出 $\mathbf{D}$ 的极大似然估计后，$\mathbf{B}$ 的极大似然估计的一种解释是与 K 个最大特征值有关的 $\hat{\mathbf{D}}^{-1}\hat{\mathbf{V}}$ 的特征向量作为 $\mathbf{B}$ 的列。相关的估计细节，有兴趣的读者可参见莫雷森（Morrison，1990，第 9 章）及其参考文献。

估计过程的第二步是给定 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{\Sigma}$ 估计因素，由于因素可从协方差中导出，而均值未在（6.4.1）式中说明。在不失一般性的情况下，我们可以限定因素的均值为零，并且以偏离均值的形式表示因素模型，即：

$$(\mathbf{R}_t-\boldsymbol{\mu})=\mathbf{B}\mathbf{f}_t+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.4.5}$$

给定（6.4.5）式，t 期因素实现值的候选变量为截面广义最小二乘回归估计量。利用 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 的极大似然估计量，对每一 t，有：

$$\hat{\mathbf{f}}_t=(\hat{\mathbf{B}}'\hat{\mathbf{D}}^{-1}\hat{\mathbf{B}})^{-1}\hat{\mathbf{B}}'\hat{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{R}_t-\hat{\boldsymbol{\mu}}) \tag{6.4.6}$$

这里，通过 $(\mathbf{R}_t-\hat{\boldsymbol{\mu}})$ 对 $\hat{\mathbf{B}}$ 回归可估计 $\mathbf{f}_t$，依第 6.2.3 节中的方法，因素实现值序列 $\hat{\mathbf{f}}_t$（$t=1,\cdots,T$）可检验模型。

由于因素是报酬的线性组合，我们可以构建与这些因素完全相关的投资组合。记 $\mathbf{R}_{Kt}$ 为 t 期因素投资组合报酬（$K\times1$）向量，有：

$$\hat{\mathbf{R}}_{Kt}=\mathbf{AWR}_t \tag{6.4.7}$$

其中，

$$\mathbf{W}=(\hat{\mathbf{B}}'\hat{\mathbf{D}}^{-1}\hat{\mathbf{B}})^{-1}\hat{\mathbf{B}}'\hat{\mathbf{D}}^{-1}$$

$\mathbf{A}$ 为对角线矩阵，$1/W_j$ 为其第 j 个对角线元素，而 W_j 为 $\mathbf{W}\iota$ 的第 j 个元素。

因素投资组合的权重等同于求解下面的最优化问题，标准化后的权重之和为 1，第 j 个因素的权重为：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\operatorname*{Min}_{\omega_j} \boldsymbol{\omega}'_j \hat{\mathbf{D}} \boldsymbol{\omega}_j \tag{6.4.8}$$

约束条件为

$$\boldsymbol{\omega}'_j \hat{\mathbf{b}}_k = 0 \quad \forall k \neq j \tag{6.4.9}$$

$$\boldsymbol{\omega}'_j \hat{\mathbf{b}}_k = 1 \quad \forall k = j \tag{6.4.10}$$

也就是说，在每一因素投资组合自身的载荷为 1，对其他因素的载荷为 0 的约束条件下，因素投资组合的权重使残差方差最小。这样的因素投资组合报酬可用于第 6.2 节中讨论的所有方法。

如果 **B** 与 **D** 已知，基于 **B** 与 **D** 总体值的广义最小二乘估计法的因素估计量与总体因素有最大的相关性。假定扰动项向量是正态的，广义最小二乘法得到具有最小方差无偏估计的性质。但(6.4.6)式与(6.4.7)式中的因素既然基于 **B** 与 **D** 的估计，那么，就不必与总体共同因素有最大的相关性。莱赫曼与默德斯特(Lehmann and Modest，1988)提出了与广义最小二乘估计不同的另一种方法，在度量测度误差存在时，他们发现该方法能产生有更高总体相关系数的因素投资组合。他们以 $\hat{\boldsymbol{\omega}}'_j \mathbf{R}_t$ 作为第 j 个因素，其中，$(N\times 1)$ 向量 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_j$ 为下面问题的解：

$$\operatorname*{Min}_{\omega_j} \boldsymbol{\omega}'_j \hat{\mathbf{D}} \boldsymbol{\omega}_j \tag{6.4.11}$$

约束条件为

$$\boldsymbol{\omega}'_j \hat{\mathbf{b}}_k = 0 \quad \forall k \neq j \tag{6.4.12}$$

$$\boldsymbol{\omega}'_j \boldsymbol{\iota} = 1 \tag{6.4.13}$$

该方法发现了在所有与其他$(K-1)$个因素正交的投资组合中最小残差方差的投资组合，与广义最小二乘法不同，该法没有考虑第 j 个因素的因素载荷信息。由于载荷的度量误差，因而可能是有益的。莱赫曼与默德斯特发现，这一构造因素投资组合的方法所产生的因素其资产极端权重将更小，且与基本共同因素高度相关。

主成分

因子分析仅是一种构建因素投资组合的统计方法，另一种方法是主成分分析。在不失去协方差矩阵中太多信息的情况下，主成分分析方法是减少所研究的变量个数的方法。在目前的应用中，主成分分析的目的就是将 N 个资产报酬的维数减少到 K 个因素，主成分就作为因素，第 1 主成分是具有最大方差的资产报酬的(标准化)线性组合，第 2 主成分是与第 1 主成分正交的方差最大的资产报酬线性投资组合，等等。

第 1 个样本主成分为 $\mathbf{x}_1^{*\prime}\mathbf{R}_t$，其中，$(N\times 1)$向量 $\mathbf{x}_1^*$ 为以下问题的解：

$$\operatorname*{Max}_{x_1} \mathbf{x}'_1 \hat{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{x}_1 \tag{6.4.14}$$

约束条件为

$$\mathbf{x}'_1 \mathbf{x}_1 = 1 \tag{6.4.15}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$\hat{\mathbf{\Omega}}$ 为报酬的样本协方差矩阵。解 $\mathbf{x}_1^*$ 就是 $\hat{\mathbf{\Omega}}$ 的最大特征值所对应的特征向量。简化对因素的投资组合解释，将第一个因素定义为 $\boldsymbol{\omega}'_1\mathbf{R}_t$，其中，$\boldsymbol{\omega}_1$ 是 $\mathbf{x}_1^*$ 标准化后的向量，其分量之和为 1。求解用 $\mathbf{x}_2$ 替代上述问题的 $\mathbf{x}_1$，并加上条件 $\mathbf{x}_1^{*\prime}\mathbf{x}_2=0$，可得第 2 个样本主成分。解 $\mathbf{x}_2^*$ 为 $\hat{\mathbf{\Omega}}$ 的第二大特征值所对应的特征向量，同样标准化后得到 $\boldsymbol{\omega}_2$，第二因素投资组合为 $\boldsymbol{\omega}'_2\mathbf{R}_t$。一般来说，第 j 个因素为 $\boldsymbol{\omega}'_j\mathbf{R}_t$，其中，$\boldsymbol{\omega}'_j$ 为 $\hat{\mathbf{\Omega}}_t$ 的第 j 大特征值所对应的并已标准化的特征向量。由前 K 个主成分得到的因素投资组合可以作为第 6.2 节中所有检验的因素。

另一种主成分分析方法是由科诺和科雷杰齐克(Connor and Korajczyk，1986，1988)提出的。[①] 他们用($T\times T$)中心化报酬的交叉乘积矩阵的 K 个最大特征值所对应的特征向量，而不是使用($N\times N$)样本协方差矩阵的主成分，他们认为，当截面足够大时，由交叉乘积矩阵的 K 个特征向量作为行的($K\times T$)矩阵，将收敛于因素实现值(可以看作反映因素模型的旋转不确定性的一种非奇异线性变换)。这种方法的可能优点是，它允许时变的因素风险溢酬，且计算方便。因为资产截面数远大于时间序列观测值数，分析一个($T\times T$)矩阵较分析($N\times N$)样本协方差矩阵的负担小得多。

因子分析还是主成分分析?

我们已经讨论了构建模型因素的两种主要统计方法——因子分析和主成分分析。每一种方法都存在着估计因素过程的可能变动。有这样一个问题：给定报酬的固定样本，哪一种方法能更精确地度量总体因素。不幸的是，虽然所有方法在大样本情况下可以修正，但在样本有限时，答案是不清楚的。

查伯雷恩和罗思柴尔德(Chamberlain and Rothschild，1983)认为，因素载荷矩阵 $\mathbf{B}$ 的一致估计可从 $\boldsymbol{\gamma}^{-1}\mathbf{\Omega}$ 最大特征值对应的特征向量得到，其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是特征值在$(0,\infty)$内的任意正定阵。标准因子分析和主成分分析是适用的。对于因子分析，$\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{D}$，对于主成分分析，$\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{I}$。然而，由于要求资产数目 N 和期数 T 趋向无穷大，所以上述结果在有限样本下的应用并不清楚。

当 N 的增加时，科诺和科雷杰齐克的主成分分析法的结果都具有一致性，这种方法的优点在于它只要求 $T\geqslant K$，并不要求 T 趋向无穷。然而，在有限样本情形下，因子分析和主成分分析哪个更好，仍是一个未解决的问题。

6.4.2 因素的个数

多因素模型的基本理论并没有确定所需的因素个数，即 K 值。然而，由于要确保理

---

① 也可参见梅(Mei，1993)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

论有用，K 应适当的小，研究者仍自由选择 K。在实证研究中，有几种方法可以处理无定式问题，一种方法是，如果检验对因素个数的增加敏感，需在不同的 K 值下反复估计和检验模型。例如，莱赫曼和默德斯特(Lehmann and Modest，1988)给出了 5、10 和 15 个因素的经验结果，当因素个数由 5 增至 10 及由 10 增至 15 时，结果呈最小的敏感性。同样，科诺和科雷杰齐克(Connor and Korajczyk，1988)认为 5 个因素和 10 个因素再加上 5 个因素的敏感性很小，结果表明 5 个因素已经足够。

第二种方法是检验 K 个因素的充分性，K 个因素充分性的渐近似然比检验可以用－2乘以在有限制和无限制下估计的协方差矩阵的对数似然函数之差。莫雷森(Morrison，1990)提出了这种检验，似然比统计量为：

$$J_5 = -\left(T-1-\frac{1}{6}(2N+5)-\frac{2}{3}K\right)[\log|\hat{\mathbf{\Omega}}|-\log|\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}'+\hat{\mathbf{D}}|] \tag{6.4.16}$$

其中，$\hat{\mathbf{\Omega}}$ 为 $\mathbf{\Omega}$ 的极大似然估计，$\hat{\mathbf{B}}$、$\hat{\mathbf{D}}$ 分别为 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 的极大似然估计。第一项是一种调整，用以改善有限样本原假设下分布收敛于大样本分布。在 K 个因素是充分的原假设下，当 $(T\to\infty)$ 时，J_5 渐近服从自由度为 $\frac{1}{2}[(N-K)^2-N-K]$ 的 χ^2 分布，罗尔和罗斯(Roll and Ross，1980)用这种方法得出了 3 个或 4 个因素是充分的。

利用极大似然因子分析检验的一个可能缺点是，限制模型假设了一种严格因素结构——该假设在理论上并不必要。科诺和科雷杰齐克(Connor and Korajczyk，1993)给出了在近似因素结构的假设下 K 个因素充分性的渐近检验$(N\to\infty)$。他们的检验应用了下列结论，在近似因素结构下，随着 N 的增加，由第 $K+1$ 个因素解释的截面变动趋向于 0，即：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathbf{b}'_{K+1}\mathbf{b}_{K+1}=0 \tag{6.4.17}$$

这里，隐含着 $\mathbf{b}_{K+1}$与 N 有关这个关系。这表明在一个由 K-因素模型生成的大的截面中，用 $K+1$ 个因素估计的一个线性因素模型的平均残差方差应收敛于 K 个因素下的平均残差方差，这是科诺和科雷杰齐克检验的意义，在检验纽约证券交易所和美国股票交易所上市的股票报酬时，他们的结论是至多 6 个普通因素。

6.4.3 理论方法

理论上选择因素的基本方法可分为两类，第一种方法是选定能说明经济系统风险的宏观经济和金融市场变量，第二种方法是选定能解释对系统风险有不同敏感度的公司特征，然后基于公司特征构成股票投资组合。

希恩、罗尔和罗斯(Chen，Roll and Ross，1986)是第一种方法的好例子。作者认为，选择的因素应能解释折现未来预期现金流的折现率变化和解释影响未来预期现金流本

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

身。基于直观分析和实证研究，他们提出了 5 因素模型。这些因素包括美国长期国债利率与短期国债利率之差(期限溢酬)、预期通货膨胀、未预期通货膨胀、工业生产增长，以及高等级和低等级公司债券的收益率之差(违约风险)。结果发现，总消费增长和石油价格并不能增加解释能力①。

第二种方法是基于公司特征构造因素投资组合，已应用于很多研究，这些特征大多数由第 5 章中讨论过的违背 CAPM 文献中提出的。实证研究发现的一些重要的公司特征包括股票市值、市盈率、账面价值与市场价值比率等。一般结果发现，包括一个广泛的市场投资组合(如等权重指数)的因素模型和用这些特征构造的因素投资组合确能较好地解释截面报酬。然而，大多数的重要特征是由实证研究确定的，由于数据窥探偏差，因而他们的重要性也许被高估了，我们将在第 6.6 节中讨论该问题。

6.5 实证结果

多因素模型的实证研究很多，我们将评述四项能很好地说明已经讨论过的估计和检验方法的研究工作。两项易于理解的研究是用统计方法选择因素，这是莱赫曼和默德斯特 (Lehmann and Modest，1988)，科诺和科雷杰齐克(Connor and Korajczyk，1988)的研究，莱赫曼和默德斯特(LM)用因子分析而科诺和科雷杰齐克(CK)用($T\times T$)主成分分析。用理论方法来确定因素有法马和弗兰切(Fama and French，1993)，希恩、罗尔和罗斯(Chen，Roll and Ross，1986)的研究。法马和弗兰切(FF)用公司特征来构造因素投资组合，希恩、罗尔和罗斯(CRR)则以宏观经济变量作为因素，前三项研究包括检验精确因素定价，而希恩、罗尔和罗斯的研究是因素是否定价。支持精确因素定价的证据是混合的。表 6.1 概述了 LM、CK 和 FF 的主要研究结果。

表 6.1 零截距 F-检验精确因素定价的结果概述

研究	时间期	投资组合特征	N	K	p 值
CK	64:01—83:12	股票市值	10	5	0.002
CK			10	10	0.002
CK^J			10	5	0.236
CK^J			10	10	0.171
CK^{NJ}			10	5	0.011
CK^{NJ}			10	10	0.019

① 第一种方法的另一种研究可参见坎贝尔(Campbell，1996a)，将在第 8 章中讨论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

研究	时间期	投资组合特征	N	K	p 值
LM	63:01—82:12	股票市值	5	5	* *
LM			5	10	* *
LM			5	15	* *
LM			20	5	0.11
LM			20	10	0.14
LM			20	15	0.42
LM	63:01—82:12	股利率	5	5	0.17
LM			5	10	0.18
LM			5	15	0.17
LM			20	5	0.94
LM			20	10	0.97
LM			20	15	0.98
LM	63:01—82:12	自身方差	5	5	0.29
LM			5	10	0.57
LM			5	15	0.55
LM			20	5	0.83
LM			20	10	0.97
LM			20	15	0.98
FF	63:07—91:12	股票与债券	32	2	0.010
FF			32	3	0.039
FF			32	5	0.025

注：1. * * 表示小于 0.001。

2. CK 指科诺和科雷杰齐克（Connor and Korajczyk，1988），LM 指莱赫曼和默德斯特（Lehmann and Modest，1988），FF 指法马和弗兰切（Fama and French，1993）。CK 的因素由（T×T）主成分分析导出，LM 的因素由极大似然因子分析导出，FF 的因素由事先确定的因素投资组合导出。在 FF 的两因素模型中，因素是由低市场价值股票投资组合报酬减去高市场价值股票投资组合报酬，以及高的账面价值与市场价值比率股票投资组合报酬减去低账面价值与市场价值比率股票投资组合报酬得出。而在三因素模型中，因素由两因素模型中的两个因素加上 CRSP 市值加权股票指数报酬组成。在五因素模型中则加入了期限结构因素和违约风险因素。CK 包括分别检验 1 月份的截矩与其他月份的截距。CK^J 为假设是 1 月截距为 0 的检验结果，CK^N 为假设是非 1 月截距为 0 的检验结果。CK 和 FF 以月度作为样本区间间隔，LM 用日数据估计因素，用周数据进行检验。CK 和 LM 的检验结果基于 4 个 5 年期加总。投资组合特征表示公司特征。依公司特征将股票配置于相关的投资组合中，FF 用 25 个股票投资组合和 7 个债券投资组合，这其中，股票投资组合由两种方法构造，即按市场价值排序和按账面价值与市场价值比率排序；债券投资组合则包括 5 种美国国债投资组合和两种公司债券投资组合。国债投资组合依到期期限构造，公司债券投资组合依违约风险大小构造。N 是相关投资组合个数，K 是因素个数，p 值是零截距 F—检验的概率值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表中出现了许多有普遍意义的观点。反对精确因素定价最强有力的证据来自于利用基于市场价值以及账面价值与市场价值比率的相关投资组合的检验。即使是多因素模型，也难以解释“公司规模”效应和“账面价值/市场价值”效应。基于股利率和自身方差构造的投资组合几乎没有提供拒绝精确因素定价的证据。CK 关于 1 月份和非 1 月份的结果表明，拒绝精确因素定价与元月效应无关。

CK 和 LM 使用统计方法研究发现，因素个数超过 5 个的敏感性很小，另一方面，FF 发现从 2 个因素到 5 个因素时有所改善。在未提及的结果中，FF 发现对于股票仅有 3 个因素是必要的，而加入债券投资组合后，需要 5 个因素，这些结果大多与第 6.4.2 节中讨论的因素个数的直接检验一致。

LM 的结果表明，相关投资组合个数的敏感度相当高，投资组合个数越小，p-值就越小，这很有可能是检验势的一个问题。对于一个非指定备择假设的检验来讲，减少投资组合个数，而又不排除偏离零假设，能使检验势大为增加，因为须检验的约束更少了。

CRR 的论文集中于因素定价，他们运用了与第 6.3 节中提出的相同方法即截面回归方法。如前所述，他们发现了 5 个定价因素，因素包括美国长期国债利率与短期国债利率之差（期限溢酬）、预期通货膨胀、未预期通货膨胀、工业生产增长，以及高等级和低等级公司债券的收益率之差（违约风险）。

6.6 偏离精确因素定价的解释

我们刚刚评述了实证结果，虽然多因素模型对截面报酬进行了合理的描述，但的确存在着模型偏离。考察偏离精确因素定价的可能原因显得极为重要，这是因为在有限样本的情况下，总可以找到另外因素而使偏离消失。然而，加入另外因素，却隐含着这样的假设：偏离的原因是丢掉一个风险因素，而没有考虑其他可能的解释。

在本节中，我们对于给定模型分析偏离精确因素定价模型的目的在于探讨偏离的原因。为了分析，我们将可能的偏离原因分成两类：基于风险的原因和基于非风险的原因，其目的是评价将偏离给定因素模型的原因解释为另外风险因素这一命题的可行性。

分析基于两类原因的重要区别，即当截面证券增加时，最大平方夏普比率行为上的差异（夏普比率是超额报酬的均值与标准差之比）。对于基于风险的原因，最大平方夏普比率是有界的；而对于基于非风险的原因，最大平方夏普比率在理论上可以说是无界的。

6.6.1 精确因素定价模型、均值—方差分析和最优正交投资组合

对于最初的分析，我们退回到经济中的主要资产水平上。设 N 为初始资产的个数，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

并假定无风险资产存在。记 $\mathbf{Z}_t$ 为 t 期超额报酬($N\times1$)向量，假设 $\mathbf{Z}_t$ 平稳并具有各态遍历性，其均值为 μ，并有满秩的协方差矩阵 $\mathbf{\Omega}$。给定 K 因素投资组合，分析偏离精确因素定价。如同(6.2.2)式的因素模型，有：

$$\mathbf{Z}_t=\mathbf{a}+\mathbf{B}\mathbf{Z}_{Kt}+\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{6.6.1}$$

其中，$\mathbf{B}$ 表示因素载荷($N\times K$)矩阵，$\mathbf{Z}_{Kt}$ 表示 t 期因素投资组合超额报酬($K\times1$)向量，$\mathbf{a}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 分别表示资产报酬截距($N\times1$)向量与扰动项($N\times1$)向量，$\mathbf{\Sigma}$ 为扰动项方差协方差矩阵，$\mathbf{\Omega}_K$ 为因素方差协方差矩阵，如式(6.2.3)～(6.2.6)式所示。$\mathbf{a}$、$\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{\Sigma}$ 的值与因素投资组合有关，但这种关联性因记号上的方便而隐含掉了。

如果我们已有 K 因素的精确因素定价模型，那么，向量 $\mathbf{a}$ 的所有元素均为零；即因素投资组合线性组合构成切点投资组合(无风险资产存在时风险资产的均值—方差有效前沿)。记 $\mathbf{Z}_{qt}$ 表示(事前)切点投资组合的超额报酬，$\boldsymbol{\omega}_q$ 表示投资组合权重($N\times1$)向量，由均值—方差分析得(见第 5 章)：

$$\boldsymbol{\omega}_q=(\boldsymbol{\iota}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mu)^{-1}\mathbf{\Omega}^{-1}\mu \tag{6.6.2}$$

对于(6.6.1)式的 K-因素模型来说，当(6.6.2)式中的切点投资组合由 K 因素投资组合线性组合而成时，我们可以得到精确因素定价。

现在考虑我们得不到精确因素定价的情况，此时，切点投资组合不能由 K-因素投资组合线性组合而成。我们的兴趣是给出偏离资产定价模型的 $\mathbf{a}$ 与残差协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}$ 间的关系。为了便于分析，我们定义最优正交投资组合[①]，它是惟一的、能与 K-因素投资组合一起构成切点投资组合，且与因素投资组合正交的投资组合。

定义(最优正交投资组合)：给定 K 因素投资组合，但不能组合成切点投资组合或顶点最小方差投资组合，定义投资组合 h 为关于 K-因素投资组合的最优正交投资组合，如果：

$$\boldsymbol{\omega}_q=\mathbf{W}_p\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}_h(1-\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\omega}) \tag{6.6.3}$$

对($K\times1$)向量 $\boldsymbol{\omega}$，

$$\boldsymbol{\omega}'_h\mathbf{\Omega}\mathbf{W}_p=0 \tag{6.6.4}$$

其中，$\mathbf{W}_q$ 表示因素投资组合中资产权重($N\times K$)矩阵，$\boldsymbol{\omega}_h$ 表示最优正交投资组合中资产权重($N\times1$)向量，$\boldsymbol{\omega}_q$ 表示切点投资组合中资产权重($N\times1$)向量。考虑无任何因素的投资组合($K=0$)，最优正交投资组合即为切点投资组合。

投资组合 h 的权重可由 K-因素模型的参数表示，权重向量为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_h&=(\boldsymbol{\iota}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{a})^{-1}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{a}\\&=(\boldsymbol{\iota}'\mathbf{\Sigma}^{+}\mathbf{a})^{-1}\mathbf{\Sigma}^{+}\mathbf{a}\end{aligned} \tag{6.6.5}$$

其中，上标“+”表示广义逆。这种投资组合的用处在于将其引入到(6.6.1 式)时，截距将

① 参见罗尔(Roll，1986)关于正交投资组合的一般特性论述。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

消失，而因素载荷矩阵 **B** 不会改变。(6.6.3)式的优化约束将使截距消失，(6.6.4)式的正交条件使 **B** 保持不变。加入 $\mathbf{Z}_{ht}$：

$$\mathbf{Z}_t=\mathbf{B}\mathbf{Z}_{Kt}+\beta_h Z_{ht}+\mathbf{u}_t \tag{6.6.6}$$

$$\mathrm{E}[\mathbf{u}_t]=0 \tag{6.6.7}$$

$$\mathrm{E}[\mathbf{u}_t\mathbf{u}'_t]=\mathbf{\Phi} \tag{6.6.8}$$

$$\mathrm{E}[Z_{ht}]=\mu_h,\mathrm{E}[(Z_{ht}-\mu_h)^2]=\sigma_h^2 \tag{6.6.9}$$

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{Z}_{Kt},\mathbf{u}_t]=0 \tag{6.6.10}$$

$$\mathrm{Cov}[Z_{ht},\mathbf{u}_t]=0 \tag{6.6.11}$$

通过比较(6.6.1)式与(6.6.6)式，我们可以将最优正交投资组合参数与偏离因素模型联系起来，对两边取无条件期望后，得：

$$\mathbf{a}=\boldsymbol{\beta}_h\mu_h \tag{6.6.12}$$

由 ε_t 的方差等于与 $\beta_h Z_{ht}+\mathbf{u}_t$ 的方差得出：

$$\mathbf{\Sigma}=\boldsymbol{\beta}_h\boldsymbol{\beta}'_h\sigma_h^2+\mathbf{\Phi}=\mathbf{a}\mathbf{a}'\frac{\sigma_h^2}{\mu_h^2}+\mathbf{\Phi} \tag{6.6.13}$$

(6.6.13)式给出了偏离模型与残差的方差协方差之间的关键连结，该连接是相当直观的，偏离模型必伴随着一个残差方差中的共同成分，以防止形成一个具有正偏离的投资组合。随着投资组合中证券数目的增加，残差方差将减至为零，这是一个近似的套利机会。

6.6.2 平方夏普比率

平方夏普比率在解释接下来的分析时极为有用，在所有投资组合中，切点投资组合 q 的平方夏普比率是最大的，q 的平方夏普比率 s_q^2 为：

$$s_q^2=\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu} \tag{6.6.14}$$

当 K-因素投资组合与最优正交投资组合 h 能组合成切点投资组合时，$K+1$ 个投资组合的最大平方夏普比率为 s_q^2。由于 h 与 K 个投资组合正交，麦金雷(MacKinlay，1995)证明了 s_q^2 可表示为正交投资组合的平方夏普比率与因素投资组合的最大平方夏普比率之和，即：

$$s_q^2=s_h^2+s_K^2 \tag{6.6.15}$$

其中，$s_h^2=\mu_h^2/\sigma_h^2$，$s_K^2=\boldsymbol{\mu}'_K\mathbf{\Omega}_K^{-1}\boldsymbol{\mu}_K$。[①]

多因素模型的实证检验利用了 N 种资产的子集，因素投资组合不必是资产子集的线性组合，与上述类似的结果在 N 种资产的子集中也成立。关于子集分析，当考虑(子集的)切点投资组合，资产和因素投资组合的最大平方夏普比率，以及子集的最优正交投资组合时，有必要讨论有 K 因素投资组合的 N 种资产。记 $\mathbf{Z}_{t_s}^*$ 为$(N+K\times1)$向量$[\mathbf{Z}'_t$，

① 该结果与吉邦斯、罗斯和尚肯(Gibbons，Ross and Shanken，1989)的工作有关。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$\mathbf{Z}'_{Kt}]'$，其均值为 $\boldsymbol{\mu}_s^{*\prime}$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Omega}_s^*$，对于($N+K$)种资产的切点投资组合有：

$$s_{q_s}^2=\boldsymbol{\mu}_s^{*\prime}\boldsymbol{\Omega}_s^{*-1}\boldsymbol{\mu}_s^* \tag{6.6.16}$$

下标 s 表示所考虑资产的一个子集。如果任一因素投资组合是 N 种资产的线性组合，有必要使用(6.6.16)式中的广义逆。

该分析(关于资产的一个子集)涉及利用 N 种资产的参数计算的二次型 $\mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{a}$，吉邦斯、罗斯、尚肯(Gibbons, Ross and Shanken, 1989)和莱赫曼(Lehmann, 1987; 1992)利用夏普比率解释二次项。假设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 满秩，则：

$$\mathbf{a}'_s\boldsymbol{\Sigma}_s^{-1}\mathbf{a}_s=s_{q_s}^2-s_K^2 \tag{6.6.17}$$

与(6.6.15)式相一致，对于资产子集，$\mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{a}$ 是子集的最优正交投资组合 h_s 的平方夏普比率，因此，对一个给定资产的子集有：

$$s_{h_s}^2=\mathbf{a}'_s\boldsymbol{\Sigma}_s^{-1}\mathbf{a}_s \tag{6.6.18}$$

和

$$s_{q_s}^2=s_{h_s}^2+s_K^2 \tag{6.6.19}$$

注意到子集的最优正交投资组合的平方夏普比率小于或等于总体的最优正交投资组合的平方夏普比率，即：

$$s_{h_s}^2\leqslant s_h^2 \tag{6.6.20}$$

下面我们将结合最优正交投资组合、夏普比率结果、偏离模型与残差方差等共同来辨别资产定价模型的含义，此后将不考虑下标 s。由于我们仅在资产的子集上研究，在下面的分析中将不再出现模糊的结果。

6.6.3 区分不同理论假设的意义

如果拒绝一个给定的因素模型，通常的解释是，需要更多的(或不同的)风险因素来解释风险—报酬间的关系，该解释表明需要另外的因素，从而接受原假设。这一流行方法的缺点是，接受原假设有多种可能的解释。一种观点是，识别"正确"的资产定价模型已取得实质性的进展，但也可能是这样一种情形，即识别一个更好的模型的明显进步来自于通过数据窥探发现一个好的内部样本拟合。由于附加因素缺乏理论动机，这种可能性也越来越近似。

本节试图辨别这两种解释，为此，我们比较原假设下统计检验量的分布与每一备择假设下统计检验量的分布。

我们再次考虑原假设为(6.6.1)式中截距向量 $\mathbf{a}$ 为零的零截距 F-检验，令 H_0 为原假设，H_A 为备择假设：

$$\mathrm{H}_0:\mathbf{a}=0$$
$$\mathrm{H}_A:\mathbf{a}\neq 0$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

H_0 可由(6.2.12)式的检验统计量 J_1 检验：

$$J_1=\frac{(T-N-K)}{N}[1+\hat{\boldsymbol{\mu}}'_K\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_K]^{-1}\hat{\mathbf{a}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\mathbf{a}} \tag{6.6.21}$$

其中，T 为时间序列观察值个数，N 为资产或包含的资产的投资组合个数，K 为因素投资组合个数，上标表示极大似然估计量。在原假设下，J_1 无条件服从分子自由度为 N、分母自由度为$(N-T-K)$的中心 F 分布。

为解释原假设的偏离，我们需要 J_1 分布的一般表示，在因素投资组合报酬条件下，J_1 的分布为：

$$J_1 \sim F_{N,T-N-K}(\delta) \tag{6.6.22}$$

$$\delta=T[1+\hat{\boldsymbol{\mu}}_K\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_K]^{-1}\hat{\mathbf{a}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\mathbf{a}} \tag{6.6.23}$$

其中，δ 是 F 分布的非中心参数。如果 $K=0$，则$[1+\hat{\boldsymbol{\mu}}'_K\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_K]^{-1}$将不出现在(6.6.21)式或(6.6.23)式中，J_1 将无条件服从非中心 F 分布。

我们考虑两种不同备择假设下 J_1 的分布，这两种备择假设根据平方夏普比率的最大值的含义来区分。对于基于风险的多因素备择假设，平方夏普比率是有上界的；而对于基于非风险的多因素备择假设，随着资产数目的上升，最大平方夏普比率在理论上是无界的。

首先考虑由于因素缺失而导致的模型偏离情形的备择假设下的 J_1 分布。为推断平方夏普比率的结果可知，F 分布的非中心参数为：

$$\delta=T[1+\hat{\boldsymbol{\mu}}'_K\hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_K]^{-1}s_{h_s}^2 \tag{6.6.24}$$

由(6.6.20)式，得(6.6.24)式的第三项有上界 s_h^2，且为正，第二项有界，在 0 和 1 之间，因此，δ 有上界：

$$\delta<Ts_h^2\leqslant Ts_q^2 \tag{6.6.25}$$

第二个不等式表示切点投资组合 q 有任何资产或投资组合的最大夏普比率。

给定平方夏普比率的一个最大值，非中心参数的上界是重要的。这一上界，与如何安排资产作为定价模型回归的被解释变量无关，且对于 N 的任何值①，原假设下与错失因素备择假设下的检验统计量的分布的距离有一个限制。所有资产会被错误定价，而上界仍可应用。

相比较而言，当备择假设认为偏离基于非风险原因时，如数据窥探、市场摩擦、市场非理性等，最大平方夏普比率的含义将没有用处。由于连接偏离与残差的方差协方差的理论不能应用，原则上，平方夏普比率(和非中心参数)是无界的。当比较同样数量截距的备择假设时，一般会希望看到基于非风险原因中更大的检验统计量。

通过考察有实际参数值的备择假设，检查上述分析提供的信息。我们考察三种情形下检验统计量的分布：原假设、错失风险因素的备择假设和基于非风险的备择假设。对于基于

① 实际上，使用 F-检验时，N 须小于$(T-K)$，以使 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 满秩。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

风险的备择假设,基本框架的设计如同法马与弗兰切（Fama and French,1993);对于基于非风险的备择假设,我们使用与罗与麦金雷（Lo and MacKinlay,1990b)一样的分析和拉科尼斯霍克、施雷弗与维舍尼(Lakonishok,Shleifer and Vishny,1994)的研究成果。

我们考虑一个单因素资产定价模型,以 32 个投资组合超额报酬的时间序列作为被解释变量,但因素(自变量)为市场的超额报酬,因此原假设(截距为零)对应于 CAPM。时间序列的长度为 342 个月。这一构造源自法马与弗兰切（Fama and French,1993,表 9,回归方程(ii))。检验统计量 J_1 分布的原假设为:

$$J_1 \sim F_{32,309}(0) \tag{6.6.26}$$

定义任意备择假设下 J_1 的分布,须说明计算非中心参数所需的参数。对于基于风险的备择假设,给定最优正交投资组合的平方夏普比率的值,可以考察(6.6.25)式中非中心参数上限对应的分布。给定切点投资组合与包含因素投资组合的平方夏普比率,利用(6.6.15)式,就可以得到最优正交投资组合的夏普比率。

麦金雷(MacKinlay,1995)认为,在一个完备的资本市场中,观测时间间隔为一个月,切点投资组合的平方夏普比率的合理值为 0.031(或在年度基准情况下,夏普比率近似为 0.6)。例如,该值所对应的投资组合的年期望超额报酬为 10%、标准差为 16%。如果包含的因素投资组合的最大平方夏普比率为 CRSP 价值加权指数的事后平方夏普比率,则最优正交投资组合的平方夏普比率的隐含值为 0.021。0.021 这一月度值对应于投资组合的年期望超额报酬为 8%、标准差为 16%。下面使用该值分析。

利用最优正交投资组合的平方夏普比率计算 δ,(6.2.1)式中 J_1 的分布为:

$$J_1 \sim F_{32,309}(7.1) \tag{6.6.27}$$

该分布可用来检验基于风险的备择假设。

已知 $\mathbf{a}$、$\boldsymbol{\Sigma}$ 与 $\hat{\boldsymbol{\mu}}'_K \hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_K$ 的值,我们可以说明基于两个非风险备择假设下的分布,然后计算(6.6.23)式中的 δ。为了说明截距,我们假定 $\mathbf{a}$ 的元素服从零均值的正态分布。考察标准差分别为 0.000 7 与 0.001 两种情况,当 $\mathbf{a}$ 元素标准差为 0.001 时,约 95%的偏离位于−0.002 与+0.002 之间,年度价差约为 4.8%;偏离的标准差为0.000 7所对应的年度价差为 3.4%。这些价差与由数据窥探产生的价差是一致的[①]。给定如拉科尼斯霍克,施雷弗与维舍尼(Lakonishok,Shleifer and Vishny,1993)文中的反向策略下报酬,他们是可行的,甚至有点保守的。对于法马与弗兰切(Fama and French,1993)的 1963 年至 1991 年的样本期,我们按市场价值排序而形成的投资组合,对 $\boldsymbol{\Sigma}$ 作样本估计。$\hat{\boldsymbol{\mu}}'_K \hat{\boldsymbol{\Omega}}_K^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_K$ 对 δ 的影响很小,可设为零。为了得到这个备择假设下非中心参数合理值的思路,给定基于 $\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 条件下 $\mathbf{a}$ 的元素分布的假设,考虑 δ 的期望值。标准差为 0.007 所对应的非中心参

---

① 数据窥探下的 J_1 分布不准确服从非中心 F 分布[参见罗和麦金雷(Lo and MacKinlay,1990b)],但为了分析的目的,非中心 F 分布是较好的近似。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

数的期望值为 39.4，而标准差为 0.001 时所对应的非中心参数期望值则为 80.3。利用这些非中心参数值，当 $\sigma_a = 0.0007$ 时，J_1 的分布为：

$$J_1 \sim F_{32,309}(39.4) \tag{6.6.28}$$

当 $\sigma_a = 0.001$ 时，J_1 的分布为：

$$J_1 \sim F_{32,309}(80.3) \tag{6.6.29}$$

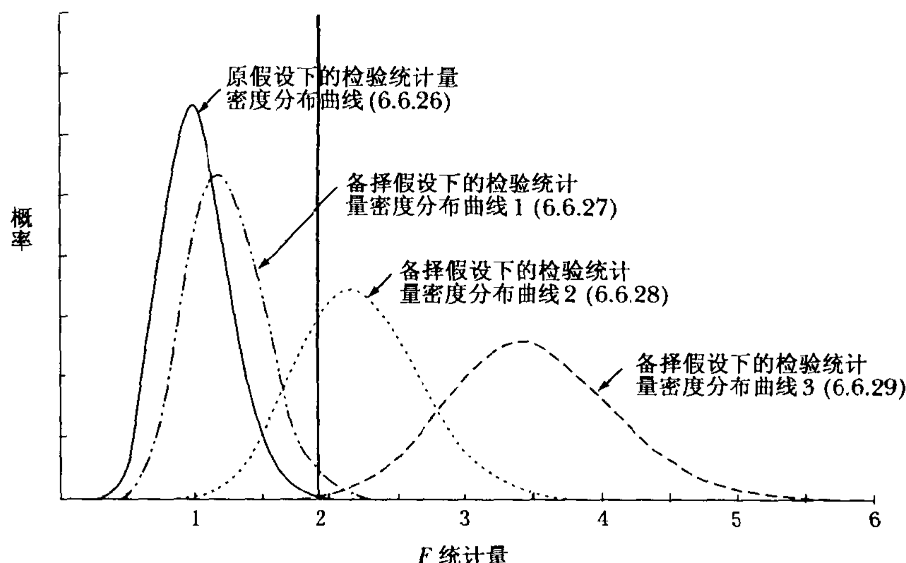


图 6.1 四种假设下 CAPM 之零截距检验的统计分布

(6.6.26)式、(6.6.27)式、(6.6.28)式与(6.6.29)式所对应的四种分布如图 6.1 所示，图中的垂直线的值为 1.91，是法马和弗兰切计算的检验统计量的值。从图中可以看出，原假设所对应的分布与基于风险备择假设所对应的分布相当接近[①]，这反映了非中心参数上限的影响。相比较而言，基于非风险备择假设所对应的分布较右边的另外两个分布偏向右边，这与备择假设下非中心参数无界相一致。

给定法马与弗兰切发现检验统计量的值为 1.91，结果表明，错失风险因素并不能解释全部情况。从图 6.1 可以看出，即便纳入错失的风险因素，1.91 仍然位于 J_1 分布上尾部，对于月数据，该分布对应的 p 值为 0.03，因此，错失风险因素完全解释偏离似乎是不可能的。

数据为基于非风险备择假设提供了一定支持。在 **a** 的元素的标准差较低时，检验统计量几乎位于基于非风险的备择假设的中间。几种基于非风险的备择假设都能很好地解释该结果，不同的基于非风险的探讨可以给出同样的非中心参数与检验统计量分布。这些结果与罗与麦金雷(Lo and MacKinlay，1990b)的基于数据窥探的备择假设一致，与布

① 关于基于风险备择假设的详细分析可参见麦金雷(MacKinlay，1987)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

里恩与科雷杰齐克(Breen and Korajczyk,1993)和科萨雷、尚肯与斯隆(Kothari,Shanken and Sloan,1995)所讨论的相关样本选择偏差相一致,与市场非效性相一致。

6.7 结 论

本章探讨了多因素定价模型估计与检验的计量经济学,这些模型为单因素 CAPM 提供了可供选择的有吸引力模型。但是,在运用这些模型时,需要注意两个严重的问题,即未考虑经济理论而仅根据数据拟合来选择因素。第一,由于数据窥探偏差,模型会过度拟合数据,此时,模型将不能预测未来资产报酬;第二,模型能说明由于市场非有效性与投资者非理性引起的经验规则,此时,模型可继续拟合数据,但也隐含着因素投资组合的夏普比率太高的问题,以致与市场均衡的合理的基本模型不一致。如果沿着第 8 章讨论的思路,从均衡模型出发构造因素投资组合,能够减轻上述两个问题的严重性。然而,最后需要说明的是,直到有足够的新数据能够为其表现进行样本外的真实诊断,多因素定价模型才被认为是有用的。

习 题

6.1 考虑将任何资产或投资组合的报酬 R_a 对最小方差边界上的投资组合报酬集合回归,试证明回归的截距为 0,因素回归项系数之和为 1。

6.2 考察两种经济,经济 A 与经济 B。两种经济下的超额报酬的均值向量与协方差矩阵将在下面给出。假设存在着无风险资产、平均超额报酬 $\boldsymbol{\mu}$ 和非奇协方差矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 的 N 种风险资产及平均超额报酬 μ_p 和方差为 σ_p^2 的风险因素投资组合,因素投资组合不是 N 种资产的线性投资组合(如有必要,可以排除因素投资组合中的一种资产得到)。对两种经济 A 与经济 B 有:

$$\boldsymbol{\mu}=\mathbf{a}+\boldsymbol{\beta}\,\mu_p \tag{6.7.1}$$

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\beta}'\sigma_p^2+\boldsymbol{\delta}\,\boldsymbol{\delta}'\sigma_h^2+I\sigma_\epsilon^2 \tag{6.7.2}$$

给定上述的均值与协方差矩阵,假定因素投资组合 p 是一个可交易的资产,那么,给定经济下的最大平方夏普比率是多少?

6.3 对上述问题中的经济进一步描述,假设 $\mathbf{a}$ 的元素服从截面独立同分布,

$$a_i\sim \mathrm{IID}(0,\sigma_a^2)\quad i=1,\cdots,N \tag{6.7.3}$$

在 $\mathbf{a}$ 条件下,经济 A 和经济 B 的 δ 的元素的分布是不同的,对于经济 A 有:

$$\delta_i\,|\,\mathbf{a}\sim \mathrm{IID}(a_i,0)\quad i=1,\cdots,N \tag{6.7.4}$$

对于经济 B 有:

$$\delta_i\,|\,\mathbf{a}\sim \mathrm{IID}(0,\sigma_a^2)\quad i=1,\cdots,N \tag{6.7.5}$$

两种经济下 δ 的元素的无条件截面分布是相同的,但是,对于经济 A,δ 的元素的条件分布是固定的。那么,每一种经济下的最大平方夏普比率是多少? N 增至无穷大,每一种经济下的最大平方夏普比率又是多少?

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

7.

现值关系

本书第一部分较为详细地研究了股票收益规律。在资产定价实证研究中，收益研究的大多数热点问题都是较为传统的。很明显，在这样一个研究领域中，只研究收益而对资产价格只字不提是不恰当的。金融经济学许多重要的应用都涉及到资产估价，从收益模型推导出价格，是这种应用的一个基本问题。这一章将讨论一些近期的研究工作。这些研究试图再次将人们的注意力带回到价格行为方面。我们只讨论普通股，但显然，其概念同样适用于其他类型的资产。

我们分析的基本框架是贴现现金流量模型或者叫做现值模型。这种模型将一只股票的价格与其未来的现金流量联系起来，将股利用一个固定的或时变的贴现率进行贴现。价格的现值公式中包括了未来各期的股利贴现，任何一期的股利贴现只构成价格很小的部分。因此，一个长期持久的股利变动对股价的影响比一个一时的股利变动对股价的影响大得多。可以类似地来看贴现率的变化。任何一个时段的贴现率在用于计算现金流量的贴现率中只占一小部分。因此，贴现率的一个长期持久变化比任何一个暂时的变化对股价的影响都大得多。资产价格的研究一开始就与资产的长期收益相关联，原因就在于此。第 7.1 节利用现值模型来讨论股价、股利变动和收益变动之间的联系

第 2 章结尾时曾谈到，对股票长期收益的可预测性已经有一些结果。如果仅仅用过去收益来预测未来收益，从统计意义上看，这些结果是很不充分的。然而，当将股利一股价比、利率水平这样的变量引入分析中，其结果从统计意义上看就变得十分显著。第 7.2 节利用第 7.1 节中的公式对这种现象进行解释。在股票预期收益随时间变化并服从一阶自回归(AR(1))这样一个零假设和简单假设下，我们来说明不同统计量的性质。这一节的一个主要结论是：利用长期收益数据做的实证结果表明，收益序列与 AR(1)过程大体吻合，同时也探讨了用 AR(1)模拟价格过程的含义：股票预期收益的一个持久变动对股价有强烈影响，与预期收益不变的情况相比，股价显示出更强烈的不稳定性。

那么，是什么造成股票预期收益的持久变动呢？这是一个非常重要但仍未解决的问

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

题。一种观点认为，预期收益的时变性以及由此带来的股价的不稳定性，恰好是市场有效性(EMH)的一个反面例证。但是，正像在第 1 章讨论的那样，对 EMH 的检验只有结合均衡收益模型才能进行。这一章对 EMH 和常数均衡收益模型联合假设给出一些反面例证。但能否构造一个时变的均衡收益模型来对数据进行拟合呢？这将留作一个问题并在第 8 章做进一步的探讨。

7.1 股利、股价、收益之间的关系

本节讨论股价现值模型。利用包含股价、股利和收益的公式，第 7.1.1 节给出具有不变预期收益的股票预期现值公式。第 7.1.1 节撇开了股价中存在所谓理性泡沫的可能性。第 7.1.2 节对这种泡沫存在的可能性进行了讨论。第 7.1.3 节研究股票预期收益随时间变化的一般情况，在这种情况下，精确的现值公式是非线性的，通过对它进行对数线性近似可以得出一些有用的结果。第 7.1.4 节给出一个简单的例子，在该例中，股票预期收益是时变的并服从一个 AR(1)过程。

首先回忆一下第 1 章中股票收益的定义。简单的净收益公式为：

$$R_{t+1}=\frac{P_{t+1}+D_{t+1}}{P_t}-1 \tag{7.1.1}$$

这个定义很直接，但要注意其中惯用的两个记号。第一，R_{t+1} 表示从时刻 t 到时刻 $t+1$ 之间持有股票的收益。用 $t+1$ 做下标表示收益在 $t+1$ 时刻才知道。第二，P_t 表示 t 期结束时每股价格，或者等价地说是股利分配前的价格。当期以价格 P_t 买入的股票有权获得下一期的股利 D_{t+1}，但对当期股利不具有这种权利①。

收益的另一种计量方法是对数收益，又叫连续复利收益。在第 1 章定义为：

$$r_{t+1}\equiv\log(1+R_{t+1}) \tag{7.1.2}$$

这里用小写字母表示取过对数的变量，在本章均做如此规定。

7.1.1 现值与不变预期收益的关系

假定股票预期收益为一常数 R，则：

$$\mathrm{E}_t(R_{t+1})=R \tag{7.1.3}$$

我们探讨在这样的假设下有什么结果。对(7.1.1)式求期望，代入(7.1.3)式整理得：

---

① 这种约定在金融学文献中是一种标准。不过一些波动检验的文献采用另一种计量方法，股票价格取每期开始时的值或息前交易价格。如希勒(Shiller，1981)、坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1987；1988a，b)。本章有关公式与原始的波动研究的论文中公式的差别就是由这种计量时间的差异造成的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$P_t = \mathrm{E}_t\left[\frac{P_{t+1}+D_{t+1}}{1+R}\right] \tag{7.1.4}$$

该等式将当前价格与下期预期价格和收益联系起来。将未来价格向后迭代，利用迭望期望定律对该方程求解。所谓迭望期望定律即：$\mathrm{E}_t[\mathrm{E}_{t+1}[X]]=\mathrm{E}_t[X]$，可以用迭代期望将未来时期的期望去掉。做 K 期迭代后得到：

$$P_t = \mathrm{E}_t\left[\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{1+R}\right)^i D_{t+i}\right]+\mathrm{E}_t\left[\left(\frac{1}{1+R}\right)^K P_{t+K}\right] \tag{7.1.5}$$

(7.1.5)式右边第二项是从现在开始未来第 K 期股价进行贴现的现值。假定 K 无限增大时该项趋于0，则：

$$\lim_{K\to\infty}\mathrm{E}_t\left[\left(\frac{1}{1+R}\right)^K P_{t+K}\right]=0 \tag{7.1.6}$$

除非股价永远以 R 或大于 R 的速度增长，(7.1.6)式总是成立的。在第7.1.2节中讨论理性泡沫时，这一假定将被放宽。

设(7.1.5)式中的 K 无限增大，并且(7.1.6)式成立，在贴现率为常数的情况下，得到一个公式，该公式将股票价格表示为未来预期股利值贴现。为方便，用 P_{Dt} 表示这个值：

$$P_t = P_{Dt} \equiv \mathrm{E}_t\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+R}\right)^i D_{t+i}\right] \tag{7.1.7}$$

设想一种理想状况，股利增长率固定为 G(当然 G 要小于 R，以保证股价有限)。这种理想的情况会给出一些有用的启发。这时，

$$\mathrm{E}_t[D_{t+i}]=(1+G)\mathrm{E}_t[D_{t+i-1}]=(1+G)^i D_t \tag{7.1.8}$$

将(7.1.8)式代入(7.1.7)式中，得到著名的“戈登增长模型”[戈登(Gordon, 1962)]，该模型给出当贴现率为常数 R，股利增长率为 G 时($G<R$)的股价公式：

$$P_t=\frac{\mathrm{E}_t[D_{t+1}]}{R-G}=\frac{(1+G)D_t}{R-G} \tag{7.1.9}$$

从戈登增长模型可以看出，当 R 接近 G 时，股价对贴现率 R 的持续变化是非常敏感的，股价关于贴现率的弹性为：

$$\frac{dP}{dR}\cdot\frac{R}{P}=-R/(R-G)$$

在求解这些公式时，避免两个错误十分重要。第一，要注意，我们假设企业没有权益回购。尽管权益回购会影响(7.1.7)式中的每只股票未来股利的时变形式，但并不影响公式本身的有效性。本章问题在习题7.1对此有更详细的讨论。

第二，股票预期收益不随时间改变的假设又称为鞅模型假设①，但股票预期收益不变并不意味着价格本身是一个鞅。回忆一下便知道，如果价格是一个鞅，则要求：

---

① 参看第2章中有关鞅假设详细的讨论。利罗伊(LeRoy, 1989)对自萨缪尔森(Samuelson, 1965)以来有关鞅的文献进行了研究。风险中性的价格过程的更一般的有关鞅的结论将在第9章中探讨。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$E_t(P_{t+1})=P_t$$

而由(7.1.4)式推出：

$$E_t(P_{t+1})=(1+R)P_t-E_t(D_{t+1}) \tag{7.1.10}$$

股价期望并不等于当期股价，而是当期股价乘以(1+R)，再减去一个股利支付作为调整，这显然不满足鞅的条件①。为得到一个鞅，必须构造一个投资组合，使所有的股利重新投资于股票。假设在时刻 t，该组合由 N_t 股股票组成，则：

$$N_{t+1}=N_t\left(1+\frac{D_{t+1}}{P_{t+1}}\right) \tag{7.1.11}$$

如果 t 时的资产组合价值以贴现率 R 贴现到 0 时，则贴现值为：

$$M_t=\frac{N_tP_t}{(1+R)^t} \tag{7.1.12}$$

这样可以直接证明 M_t 是一个鞅。

一般情况下股票价格不是一个鞅，但如果股利 D_t 服从一个单位根过程，则股价 P_t 也服从一个单位根过程②。这时，现值公式(7.1.7)将 P_t 和 D_t 两个单位根过程联系在一起。如果再将式子两边同时减去股利的一个倍数，(7.1.7)式就变成联系两个平稳过程的一个关系式：

$$P_t-\frac{D_t}{R}=\left(\frac{1}{R}\right)E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+R}\right)^i\Delta D_{t+1+i}\right] \tag{7.1.13}$$

(7.1.13)式将股价与 $1/R$ 倍股利之差 $P_t-(1/R)D_t$ 与未来股利变动 ΔD_{t+i+1} 的贴现值联系起来。如果股利的变动是平稳的，差值 $P_t-(1/R)D_t$ 就也是平稳的。这样，即使股利过程和股价过程都是非平稳的，但股利和股价的某个线性组合是一个平稳过程。所以，股利和股价是协整的③。

尽管坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1978)以及韦斯特(West，1986)和其他一些人都对这个现值模型做过实证探讨，但正像其他许多宏观经济时间序列一样，股票价格和股利随时间的增长往往表现为指数而不是线性增长。这说明，一个线性模型，即使允许有单位根的线性模型，其准确性也不如对数线性模型。下面将给出当股利服从对数线性过程时的一个合适的现值模型。

---

① 在特殊情况下，当股利增长率为常数 G 时，就简化为 $E_tP_{t+1}=(1+G)P_t$。由于在这种情况下，股利一股价比为常数，因此股票价格增长率为与股利增长率相同的常数。

② 不严格地讲，如果对一个随机变量的扰动只是暂时的、不具有永久的作用，该随机变量服从一个平稳的时序过程。如果一个扰动对变量有永久性影响但对变量改变量没有影响，则改变量服从一个单位根过程，并称为单整的。此时，变量本身不是平稳的，但其一阶差分是平稳的。当一个即刻的扰动产生一个永久性扰动的效果时，鞅就成为单位根过程。这些概念准确的定义参见第 2 章或汉密尔顿(Hamilton，1994)有关的内容。

③ 两个具有单位根的随机变量称为协整的，如果存在它们的一个线性组合是平稳的。一般的讨论参见恩格尔和格兰杰(Engel and Granger，1987)或者汉密尔顿(Hamilton，1994)，有关应用参见坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1987)。注意，这里的平稳线性组合包含常数贴现率 R，一般来说是未知的一个先验值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

7.1.2 理性泡沫

上一节中，通过求解期望形式的差分方程式(7.1.4)得出，股票价格等于未来股利的预期贴现值 P_{Dt}，其讨论是基于假设条件式(7.1.5)，即当 K 趋于无穷时，未来 K 期预期股价的贴现值将趋于0。本节讨论放宽这一假设的模型。

条件式(7.1.5)对从(7.1.4)式中解出惟一的 P_{Dt} 是必要的。一旦去掉这个条件，(7.1.4)式就有无穷多个解。任何一个解都有如下的形式：

$$P_t = P_{Dt} + B_t \tag{7.1.14}$$

这里，

$$B_t = \mathrm{E}_t\left[\frac{B_{t+1}}{1+R}\right] \tag{7.1.15}$$

(7.1.14)式 中的 B_t 作为价格的一个附加项出现，其在下一期实现的期望价格 B_{t+1} 是本期值的$(1+R)$倍。

P_{Dt} 常称为基本价值项，B_t 被称为理性泡沫。"泡沫"一词让人回忆起金融史上那些显赫一时的年代。那时，资产价格的上升远远超出了可以被基本价值解释的程度，每一个投资者似乎都认定其他的投资者会在不远的将来将股票价格拉得更高①。采用"理性"一词是表示(7.1.14)式中的 B_t 服从理性预期及不变预期收益规律。拿一个例子很容易说明理性泡沫的含义。布兰恩查德和沃特森(Blanchard and Watson，1982)给出一个如下形式的泡沫：

$$B_{t+1} = \begin{cases} \left(\dfrac{1+R}{\pi}\right)B_t + \zeta_{t+1}, & \text{具有概率 } \pi \\ \zeta_{t+1}, & \text{具有概率 } 1-\pi \end{cases} \tag{7.1.16}$$

如果 $\mathrm{E}_t\zeta_{t+1}=0$，这样定义的 ζ_{t+1} 满足(7.1.15) 式。布兰恩查德和沃特森定义的泡沫在任何时期破裂的概率是不变的，都等于 $1-\pi$。如果在某一时期泡沫没有破裂，他将以高于 R 的速度$[(1+R)/\pi]-1$ 增长，从而进一步增加破裂的概率。我们可以构造许多不同的泡沫。本章后面的习题 7.2 中讨论由弗鲁特和奥布斯特费尔德(Froot and Obstfeld，1991)给出的一个例子。在该例中，泡沫是股利的非线性函数。

尽管理性泡沫引起了人们相当的关注，但无论是理论上还是实证方面都有研究认为，应排除在(7.1.4)式中存在泡沫的可能性。有关的理论可分为局部均衡观点和一般均衡观点。

局部均衡观点中首先需要关注的第一个论点是：有限责任资产永远不会产生负的泡

---

① 麦基(Mackay，1852)是有关早期股市泡沫现象描述的最具代表性文献。如 17 世纪的荷兰郁金香事件、18 世纪的伦敦南海泡沫和巴黎密西西比泡沫。金德尔伯格(Kindleberger，1989)对这些事件和近些年来发生的有关事件进行了描述。而加伯(Garber，1989)则认为，荷兰郁金香事件中的股价比人们普遍认为的更接近其基本价值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

沫。如果存在负的泡沫，意味着将来某一时期的预期资产价格将会是一个负值，这与资产的有限责任相矛盾。随之而来的第二个论点认为，有限责任资产当中的泡沫不是在资产定价模型中才有的，如果今天存在泡沫，一定在资产开始交易时就存在了。道理很明白，如果泡沫曾经为0，由(7.1.15)式知道，其未来值的期望也是0，而泡沫的值为非负的话，说明泡沫的未来值以概率1等于0[迪巴和格罗斯曼(Diba and Grossman，1988)]。

第三，如果对资产的最高价有任何限制，泡沫就不会存在。因此，由于存在一个高价位时无限弹性的替代品(如石油和太阳能)，商品价格中的泡沫就可以被排除。同样，如果当股价上涨时，企业发行股票从而限制股价，股价中就不会存在泡沫。最后一点，像债券一类的资产，在到期日有一个固定的价格，也就不会存在泡沫。

一般均衡观点对理性泡沫的存在性也持谨慎态度。蒂洛尔(Tirole，1982)证明，在一个只有有限个无穷寿命的理性代理人模型中，泡沫不可能存在。当允许卖空时，这个原理很容易理解(尽管实际上并不依赖卖空条件)。如果一个资产存在泡沫，无穷寿命的代理人就会卖空该资产，收入的一部分用于赔付股利后还有一个正的剩余财富。这种套利机会排除了泡沫存在的可能性。

蒂洛尔(Tirole，1985) 研究了戴尔蒙德(Diamond，1965)世代交叠模型中泡沫存在的可能性。此模型中具有无穷个有限寿命的代理人。蒂洛尔证明，当利率超过经济增长率时，泡沫不会存在。理由是，与经济财富相比，泡沫最终会变得无穷大，从而破坏一些代理人的预算约束。因此，泡沫只能存在于一个具有动态无效率的世代交叠模型的经济系统中。这种经济系统积累了过多的私人资本，促使利率水平下降到经济增长水平以下。许多经济学家认为动态无效率在实际中不会发生。艾贝尔、曼昆、萨默斯和泽克豪泽(Abel，Mankiw，Summers and Zeckhauser，1989)给出的实证结果认为，动态无效率不适用于美国经济。

还有一些实证研究否认泡沫的存在。其中一个重要的论点认为，在很多不同的时间序列中都隐含着泡沫的破裂行为。如果没有泡沫，股利服从一个单位根过程，因此股价 P_t 也是一个单位根过程。而股价的改变 ΔP_t 和股价、股利之差 P_t-D_t/R 都是平稳的。如果存在泡沫，令 $X_t=P_t$、ΔP_t 或者 P_t-D_t/R，则这三个变量都满足泡沫破裂的期望条件：

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{(1+R)^K}\mathrm{E}_t[X_{t+K}]\neq 0$$

但从实证结果看，很少有证据支持这些变量序列中有泡沫破裂的论断。但有一点需要说明以免引起误解：随机泡沫可能是非线性的，因此，标准的线性方法不能够检测到这些模型中条件期望的破裂行为。

最后，应当注意，理性泡沫无法解释股票收益的可预测性。泡沫使股价产生波动但并没有相应增加收益的可预测性。价格的波动可以由收益的可预测性来解释，从这个意义

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

上讲，关于泡沫的假设根本就是多余的。

尽管理性泡沫假设可能是没有道理的，对泡沫的研究却使我们学到许多东西。本章一个重要的论点是：预期收益的一个持久连续变动，即使很小，也会对股价产生很大的影响。相反，股价持久的大的变动对任一时段的预期收益都不会产生多大的影响。理性泡沫可看作一种极端情况：价格的波动十分持久，以至于产生爆炸，从而对预期收益不产生一点影响。

7.1.3 时变预期收益下现值关系的一个近似

截至目前，我们一直假定股票预期收益是一个常数。这样假设是为分析上的方便，但是，这样假设与第 1 章和第 7.2 节中有关股票收益的可预测性相矛盾。

当预期收益随时间变化时，价格和收益呈非线性关系，现值关系就复杂多了。一种处理的办法是采用对数线性模型作为近似。坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1989a，b)就曾这样做。股价、股利和收益之间的对数线性关系展示出如下的因果关系框架：高的股价最终会带来高的未来股利、低的未来收益或者二者的一种组合，而投资者的预期也与此相一致，因此，高的股价必定使投资者对未来股利有一个高的预期，对未来收益有一个低的预期或者是两种情况的混合。类似地，高的收益必将使投资者对未来股利增加、收益下降的预期增强或者是二者的混合[坎贝尔(Campbell，1991)]。

在对数线性模型的分析框架下，我们可以用任何形式的预期收益模型来计算资产价格，而不再局限于预期收益为常数的情况。采用对数线性模型还有另外一个好处，当假设股利和收益服从一个相互作用的对数线性模型时，处理起来比较容易，而这样的假设在实证研究中又是合理的、可行的。本章和稍后的内容将利用对数线性模型分析框架对文献中大量涉及的股票长期收益的可预测性给出解释。

为采用近似的对数线性模型，我们来定义对数形式的股票收益 r_{t+1}。采用(7.1.1)式和(7.12)式有：

$$r_{t+1} \equiv \log(P_{t+1}+D_{t+1})-\log(P_t)$$
$$= p_{t+1}-p_t+\log(1+\exp(d_{t+1}-p_{t+1})) \qquad (7.1.17)$$

上式右边第一项是股利—股价比对数的非线性函数，$f(d_{t+1}-p_{t+1})$。对于一个非线性函数 $f(x_{t+1})$，可用其一阶泰勒(Taylor)展开来近似：

$$f(x_{t+1}) \approx f(\bar{x})+f'(\bar{x})(x_{t+1}-\bar{x}) \qquad (7.1.18)$$

$\bar{x}$ 表示 x_{t+1} 的均值。将此近似公式用于式(7.1.17)中有：

$$r_{t+1} \approx k+\rho p_{t+1}+(1-\rho)d_{t+1}-p_t \qquad (7.1.19)$$

这里，

$$\rho \equiv \frac{1}{1+\exp\overline{(d-p)}}, k \equiv -\log(\rho)-(1-\rho)\log(\frac{1}{\rho}-1)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

均为线性化参数，而$\overline{d-p}$是股利—股价比对数的平均。当股利—股价比为常数时，$\rho=1/(1+D/P)$。实证结果表明，用1926年到1994年美国股市数据计算出每年股利—股价比为4%，说明年度数据中的ρ大约为0.96，月度数据中的ρ值大约为0.997。(7.1.18)式中的泰勒(Taylor)近似将(7.1.17)式中的股价、股利和的对数替换为(7.1.18)式中的股价对数与股利对数的加权平均。股价对数的权重接近1，而股利对数的权重$(1-\rho)$接近0。平均来看，股利要比股价小很多，因此，股利一定比例的变化对收益的影响要比股价同比例变化对收益的影响小很多。

近似的精度

当股利—股价比的对数为常数时，d_{t+1}和p_{t+1}一起变动，(7.1.19)式就成为精确表达式，与(7.1.17)式等价。像任何一个泰勒展开一样，只要股利—股价比的对数变化不大，(7.1.19)式的近似就有一定的精度。我们可以从实际数据上对从(7.1.1)式中得到的精确收益与从(7.1.19)式中得到的近似收益进行对比来体会这种近似的精确性。例如，采用1926年1月到1994年12月的CRSP价值加权股价指数的名义股利和股价的月数据可以得出，精确月度收益和月度近似收益的均值分别为0.78%和0.72%，月度标准差分别为5.55%和5.56%，二者的相关系数为0.999 91。用近似值减去精确值得出的近似误差，均值为−0.06%，标准差为0.08%，与收益的相关系数为0.08。采用1926年1月到1994年12月的CRSP价值加权股价指数的名义股利和股价的年数据可以得出，精确年度收益和其近似收益的均值分别为9.20%和9.03%，标准差分别为19.29%和19.42%，相关系数为0.999 93。近似误差均值为−0.17%，标准差为0.26%，与精确收益的相关系数为0.51。由此看来，对股票收益均值的近似并不理想，但对描述收益的变动机理却有很好的效果，尤其是使用月度数据时更是如此[①]。

价格的内涵

(7.1.19)式是对数形式股价的一个线性差分方程，类似于期望收益为常数时从(7.1.4)式中导出股价线性差分方程。将(7.1.19)式向后迭代，再加上条件：

$$\lim_{j=\infty}\rho^j p_{t+j}=0 \tag{7.1.20}$$

得出：

$$p_t=\frac{k}{1-\rho}+\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j[(1-\rho)d_{t+1+j}-r_{t+1+j}] \tag{7.1.21}$$

(7.1.21)式是一个动态会计等式，它通过求极限并加上终端条件而求出。终端条件

① 也可以对精确收益和近似收益进行比较。消除通胀因素的做法对这种比较影响不大。坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller,1988a)对这种近似在短期水平和长期水平上的精确性进行了更为详细的评价。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(7.1.20)式排除了理性泡沫的存在性。这种泡沫会使股价的对数以 $1/\rho$ 甚至更快的速度呈指数增长。(7.1.21)式说明，如果今天股价较高，未来必定有高的股利和低的收益[①]。

(7.1.21) 式不仅对事前形式成立，对事后形式也成立。对(7.1.21)式两边取期望并注意到 $p_t = \mathrm{E}_t(p_t)$，得到：

$$p_t = \frac{k}{1-\rho} + \mathrm{E}_t\left[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j[(1-\rho)d_{t+1+j} - r_{t+1+j}]\right] \qquad (7.1.22)$$

这与期望的性质是一致的：即两个随机变量的数学期望相加等于它们相加的数学期望。投资者的预期行为也是如此，如果现在有高的股价，投资者必然预期未来会出现高的股利和低的收益。(7.1.22)式是对不变期望收益和股利增长为常数的戈登(Gordon)模型的一个动态推广。坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller, 1988ab)将(7.1.22)式和下面将要谈到的(7.1.24)式称为动态戈登增长模型或股利比率模型。

像一般的戈登增长模型一样，动态戈登增长模型也说明，当人们预期股利有较快增长或者股利贴现率将会降低时，股价就会上升。但是，股利的增长(或贴现率的降低)对股价的影响取决于人们对这种高增长(低贴现率)持续时间长短的预期。原来的戈登模型中，股利增长率和贴现率都假定是不变的，永远等于初值。当股利增长率和贴现率都为常数时，利用 ρ 和 k 的定义可以证明，动态戈登增长模型还原为原来的戈登模型。

为方便，将(7.1.22)式中记号简化，重新写为：

$$p_t = \frac{k}{1-\rho} + p_{dt} - p_{rt} \qquad (7.1.23)$$

这里，

$$p_{dt} = (1-\rho)\mathrm{E}_t[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j d_{t+1+j}]$$

即未来股利的对数贴现后的期望值乘以$(1-\rho)$，而，

$$p_{rt} = \mathrm{E}_t[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}]$$

即未来股票收益的对数贴现后的期望值。这些记号与第 7.1.1 节中不变预期收益的记号是一致的。

(7.1.22)式也可以写成股利—股价比的形式：

$$d_t - p_t = -\frac{k}{1-\rho} + \mathrm{E}_t\left[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j[-\Delta d_{t+1+j} + r_{t+1+j}]\right] \qquad (7.1.24)$$

当人们预期股利增长较慢或预期收益较高时，上式左边股利—股价比对数值升高。如果股利服从对数线性单位根过程，股价对数和股利的对数都是非平稳过程，这时(7.1.24)式就很有意义，因为股利对数的变化是平稳的，只要收益序列平稳，从(7.1.24)式就可以看出股利—股价比的对数也是平稳的。这说明股利和股价取对数后两个序列是协整

① 坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller, 1988a)评价了式(7.1.21)的精确性。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的。由于是两个对数之比，平稳线性组合中不含未知参数。这种简单的结构使对数线性模型在实证研究中比线性协整模型(7.1.13)更容易应用。

到目前为止，我们将资产价格表示成未来预期股利和收益的线性组合。可以用同样的方法将资产收益表示成未来预期股利和收益的线性组合。将(7.1.22)式代入(7.1.19)式有：

$$r_{t+1}-\mathrm{E}_t(r_{t+1})=\mathrm{E}_{t+1}\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\Delta d_{t+1+j}\Big]-\mathrm{E}_t\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\Delta d_{t+1+j}\Big]-\Big(\mathrm{E}_{t+1}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t-1+j}\Big]-\mathrm{E}_t\Big[\sum_{j-1}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}\Big]\Big) \quad (7.1.25)$$

该等式说明，非预期的股票收益与未来股利期望的改变或可实现收益有关。对未来股利预期的增加会导致今天的一个资本利得，而对未来收益期望的增加会使今天产生资本亏损。道理很明显，股利给定，高的未来收益只能通过高的未来价格和低的今天价格来实现。为方便，将(7.1.25)式简写为：

$$r_{t+1}-\mathrm{E}_t(r_{t+1})=\eta_{t+1}=\eta_{d,t+1}-\eta_{r,t+1} \quad (7.1.26)$$

这里 η_{t+1} 表示非预期收益，$\eta_{d,t+1}$ 是未来股利期望的改变，而 $\eta_{r,t+1}$ 是未来收益期望的改变。

7.1.4 价格和收益：一个简单的例子

通过一个简单的例子我们会更容易理解前面几节中给出的等式。稍后还将说明这个例子不仅简单，在实证上也有用。假设股票对数收益的条件期望是一个常数 r 加上一个可观测的 0 均值随机变量 x_t：

$$\mathrm{E}_t(r_{t+1})=r+x_t \quad (7.1.27)$$

进一步假定，x_t 服从一阶自回归(AR(1))过程：

$$x_{t+1}=\phi x_t+\xi_{t+1},\ -1<\phi<1 \quad (7.1.28)$$

当 AR 的系数 ϕ 接近于 1 时，我们称过程 x_t 是高度持续的。用 σ_x^2 和 σ_ξ^2 分别表示 x_t 和 ξ_t 的方差，则从(7.1.28)式看出二者具有关系：$\sigma_\xi^2=(1-\phi^2)\sigma_x^2$

在这些假设条件下，可以直接证明：

$$p_{rt}\equiv\mathrm{E}_t\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}\Big]=\frac{r}{1-\rho}+\frac{x_t}{1-\rho\phi} \quad (7.1.29)$$

(7.1.29)式描述了股票收益的期望随时间变化时对股价的影响。该等式说明，当股票收益的期望变化是持续的，而 ρ 又接近 1，收益期望会对股价产生很大的影响：收益期望增加 1%，如果 $\phi=0.5$，则今天的股价下降 2%，如果 $\phi=0.75$，则下降 4%，$\phi=0.9$，则下降 10%。

这个例子澄清了一个重要的问题，股票收益的期望变动大小由 x_t 的标准差来衡量。如果 x_t 的标准差很小，直观上很容易得出这样的结论：即收益期望的变化对股价的影响也不大，也就是说 p_{rt} 的变动不大。但从(7.1.29)式可以看出，情况并非一定是这样：p_{rt} 的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

标准差等于 x_t 的标准差除以$(1-\rho\phi)$，因此，如果收益期望持续变动，即使 x_t 变化不大，p_t 仍旧可能产生较大波动。这一点被萨默斯(Summers,1986)尤其是希勒(Shiller,1984)所述及：

> 投机性资产的收益几乎是不可预测的。在口头传统理论反对公众心理作用论的争论中，这一点是其理论的基础。论点之一：由于真正的收益几乎不可预测，股票的价格接近其内在价值，即等于未来可实现股利的最佳预报用常数贴现率的贴现值。这个论点……是经济思想史上最著名的错误之一。

在我们的例子中，股票价格被表示为两项之和，第一项 p_{dt} 是未来股利贴现的期望值，它不是一个严格意义上的随机游动，其原因在(7.1.1)式已谈过，但当股利不大或者变化不太激烈时，它接近一个随机游动。第二项 $-p_{rt}$ 是一个平稳的 AR(1)过程。文献中经常可以见到股价的这种表示方法[见萨默斯(Summers,1986)、法马和弗兰切(Fama and French,1988b)，波特巴和萨默斯(Poterba and Summers,1988)以及杰盖迪希(Jegadeesh,1991)]。

从 AR(1)模型的例子中可以非常简便地导出股票单期收益 r_{t+1}公式。在股票未来预期收益公式中作为更新项的 $\eta_{r,t+1}$等于 $\rho\xi_{t+1}/(1-\rho\phi)$，公式(7.1.25)简化为：

$$r_{t+1}=r+x_t+\eta_{d,t+1}-\frac{\rho\xi_{t+1}}{1-\rho\phi} \tag{7.1.30}$$

为便于理解该表达式含义，假设 $\eta_{d,t+1}$ 和 ξ_{t+1} 不相关[①]。采用记号 $\mathrm{Var}(\eta_{d,t+1})=\sigma_d^2$($\sigma_d^2$ 表示所有关于未来股利的消息，而不是当期股利的方差)和 $\sigma_\xi^2=(1-\phi^2)\sigma_x^2$ 可以计算出 r_{t+1}的方差为：

$$\mathrm{Var}[r_{t+1}]=\sigma_d^2+\sigma_x^2\left[\frac{1+\rho^2-2\rho\phi}{(1-\phi\rho)^2}\right]\approx\sigma_d^2+\frac{2\sigma_x^2}{1-\phi} \tag{7.1.31}$$

在 $\phi\ll\rho$ 并且 ρ 接近 1 时，有上式近似关系。预期收益过程的一个持续变动会增加可实现收益的波动性，因为预期收益的一个小的但持续变动会对价格产生大的影响，从而影响可实现收益。

(7.1.28)式和(7.1.29)式可以说明可实现收益服从一个 ARMA(1,1)过程，并可以计算出过程的相关系数。其中有一种相互制约的制衡机制：(7.1.28)式中预期收益正的自相关性同时会出现在可实现收益中，而未来预期收益一个正的扰动会导致一个一时的资本损失，从而会在可实现收益中产生一个负自相关。在 ARMA(1,1)中，自回归系数 ϕ 是正的，但移动平均系数是负的。本章后面的习题 7.3 详细讨论了这种作用机理，并证明，如果 $\phi<\rho$，则后一种作用会占支配地位。因此可以推测，改变预期收益会在可实现收益中产生一个负的自相关。

---

① 在某些情况下的确如此。例如，如果预期收益由股利增长过程的波动确定，而股利波动可以用第 12 章中讨论的 GARTH 模型来描述，因此对波动的随机扰动与对股利的扰动是不相关的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

习题 7.3 将该例推广到更一般的情况，允许股利和预期收益的相关系数不为 0。如果股利信息和预期收益信息存在一个足够大的正协方差，股票收益就会产生正的自相关。也可以选择股利信息和预期收益信息的协方差使股票收益序列不相关。这时，股票收益服从序列不相关的白噪声过程，而预期收益服从持续的 AR(1)过程。这些都说明市场是弱有效的(不能由收益本身对收益进行预报)但不是中强有效的(在 x_t 信息基础上，收益是可预报的)。

美国股票市场实证研究表明，这种可能性似乎是存在的。在第 2 章结束时给出的关于长期自相关的统计不显著性说明，给定过去收益，长期水平上股票收益的可预测性证据不足；下一节将证明，在给定另外一些信息变量情况下，长期水平上收益的可预测性就会有很强的证据。

7.2 现值关系和美国股市的价格行为

现在，利用上节讨论过的公式对近期有关美国股市股价时间序列行为实证研究结果做出解释。第 7.2.1 节讨论用预报变量而不是过去收益本身对长期水平股票收益的预测。我们给出当股利—股价比和利率变量被用来预报收益时一些有说服力的实证结果。第 7.2.2 节将长期收益行为和价格行为，尤其是价格波动行为联系起来考虑。第 7.2.3 节说明如何采用时间序列模型揭示资本市场的短期行为中蕴含的长期规律。

7.2.1 长期水平回归

近来，人们对用不同时期水平收益对预报变量做回归非常感兴趣。常用的预报变量包括价格—股利比或价格—盈利比(见坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1988a，b)、法马和弗兰切(Fama and French，1988a)，霍德里克(Hodrick，1992)，以及希勒(Shiller，1984))，以及各种计量利率的方法，如长期和短期利率之间的收益之差，低级和高级公司债券或商业票据之间的质量收益之差以及近期的短期利率水平。[见贝坎尔(Campbell，1987)、法马和弗兰切(Fama and French，1989)，霍德里克(Hodrick，1992)和坎姆及斯坦博(Keim and Stambaugh，1986)]。

这里，我们将着重讨论预报变量为股利—股价比和短期水平的名义利率的情况。在采用美国数据所做的长期水平收益预报中，股利—股价比是最成功的预报变量。首先研究在 NYSE、AMEX 和 NASDAQ 上市交易的股票，采用价值加权 CRSP 指数下股价和股利数据。股利—股价比用上一年指数股利之和除以当前指数来计量。将一整年的股利加总是为了消除股利支付的季节因素的影响，采用当前股票指数是为了尽量反映最新股票

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

价格信息①。

对美国国库券月度名义利率作适当处理，以此作为利率变量。处理是考虑到如下事实：对国库券利率作的假设检验，不能拒绝存在单位根的假设。从当前国库券利率中减去上一年国库券利率的滑动平均，得到一个**随机去势利率**。这样相当于对过去国库券利率作一个三角加权移动平均，权重随时间延续递减。如果国库券利率变化是平稳的，得到的随机去势利率是平稳的。坎贝尔和霍德里克(Campbell and Hodrick，1992)采用了这种随机去势方法。

表 7.1 给出当股利—股价比作为预报变量时具有代表性的结果。表中给出的是股票对数收益对每一持有期开始时点上的股利—股价比对数的回归结果。持有期按月计算，持有月数 K 从 1 个月到 48 个月(4 年)不等；当 $K>1$ 时，回归采用跨月份数据。考察的样本区间为 1927 年到 1994 年以及其中的 1927 年到 1951 年和 1952 年到 1994 年两个子区间。回归结果都在表中给出。表 7.1 同时给出每一个回归的 R^2、t-统计量的值。考虑到扰动项存在异方差和序列相关，采用附录中的渐进理论对 t-统计量的值进行了修正。除了回归变量采用股利—股价比的对数而不是股利—股价比(这个小的变换对结果没有大的影响)以及所有水平的回归中都采用了最新的样本数据外，表 7.1 与法马和弗兰切(Fama and French，1988a)，的研究没有其他差别。尽管表中结果是由实际收益得到的，采用超额收益(与月度国库券利率相配比)也会得出几乎相同的结论。

表 7.1 中在月度水平上的回归结果非常不显著：R^2 从未超过 2%，t-统计量只是在“二战”后的样本区间回归中超过 2。有一点需要注意：当回归的时期水平延长，即随着 K 增加，回归结果的显著性是变化的。在 2 年期水平上，全样本区间回归的 R^2 是 14%，战前样本子区间回归的 R^2 是 22%，战后样本子区间的 R^2 为 32%。在 4 年水平上作回归，全样本区间的 R^2 为 26%，两个样本子区间的 R^2 均为 42%。在全样本区间和战前样本区间的回归中，t-统计量值也随着预报水平增加而剧烈增长，尽管在战后样本区间相对平稳一些，一直在 3.0 到 3.5 范围内。

表 7.2 给出当股票收益对随机去势的短期利率进行回归的结果。将表 7.1 与表 7.2 相比很有意思。同表 7.1 类似，在表 7.2 给出的结果中，如果将收益用超额收益代替(与月度国库券利率相配比)，会得出几乎相同的结论。

---

① 这种计量股利—股价比的方法在学术文献中是标准方法，在金融行业中也广泛应用。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 7.1　股票对数收益对股利—股价比对数的长期水平回归

$$r_{t+1}+\cdots+r_{t+K}=\beta(K)(d_t-p_t)+\eta_{t+K,K}$$

	预报水平(K)					
	1	3	12	24	36	48
1927～1994 年						
$\hat{\beta}(K)$	0.016	0.043	0.200	0.386	0.533	0.654
$R^2(K)$	0.007	0.014	0.073	0.143	0.207	0.261
$t(\hat{\beta}(K))$	1.553	1.420	2.257	4.155	4.621	3.870
1927～1951 年						
$\hat{\beta}(K)$	0.024	0.054	0.304	0.667	0.925	1.085
$R^2(K)$	0.007	0.011	0.086	0.217	0.330	0.419
$t(\hat{\beta}(K))$	0.980	0.793	1.915	3.841	2.875	3.693
1952～1994 年						
$\hat{\beta}(K)$	0.027	0.080	0.327	0.579	0.757	0.843
$R^2(K)$	0.018	0.049	0.188	0.322	0.411	0.417
$t(\hat{\beta}(K))$	3.118	3.152	3.181	3.072	3.280	3.508

注：r 是由在 NYSE、AMEX 以及 NASDAQ 上市的股票的价值加权指数计算的实际收益的对数值。$(d-p)$是前一年的股利与当前股价比的对数值。回归采用 OLS 方法，标准差采用汉森和霍德里克(Hansen and Hodrick，1980)附录中(A.3.3)计算，其中自协方差为滞后 $K-1$ 到 0 期对应的协方差。纽维和韦斯特(Newey and West，1987)$q=K-1$ 或 $q=2(k-1)$的标准差与此极为类似并且一般来说比本表给出的标准差小一些。

表 7.2 显示出，像股利—股价比一样，随机去势的短期利率对股票收益也有一定的预报能力。但与股利—股价比相比，这种预报能力存在两个方面的差异。首先，这种预报能力主要表现在战后的样本区间内。这并不奇怪。因为在 20 世纪 30 年代到 40 年代的大部分时间内，美联储对短期利率进行限制，经过去势后的短期利率在这些年份变化不大。其次，与股利—股价比相比，短期利率变量对收益的预报能力主要体现在短期水平上。战后样本区间在一个月或三个月时期水平上回归的 R^2 可以和表 7.1 中相应的 R^2 相比，但在一年期水平上达到最高值 0.1 后，随时期水平的增加，R^2 便迅速下降。当时期水平超过一年时，t-统计值也表现出不显著性。

随着时期水平的增加，表 7.2 中的 R^2 和 t-统计值的变化呈现一个峰状，而表 7.1 中的 R^2 和 t-统计值呈明显上升趋势，如何理解这一点呢？回忆(7.1.24)式：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$d_t - p_t = \mathrm{E}_t\left[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j[-\Delta d_{t+1+j} + r_{t+1+j}]\right]$$

它将股利—股价比对数值表示为未来收益和股利增长率的期望。我们可以从这个角度理解表 7.1 中结果的特点。(7.1.24)式说明，如果未来股利增长率变化不大，股利—股价比对数值很好地反映了市场对未来股票收益的预期。另外，(7.1.24)式的右端是一个直到无穷期的价值贴现的数学期望，因此，总的来看，用股利—股价比代表长期水平的股票收益要比表示短期水平的股票收益效果好。这些分析对解释表 7.1 中预报能力随时期水平增加而增加的结果应该是有帮助的。

即使没有如上分析的这些原因，同样可以解释表 7.1 和表 7.2 中的结果。为看清这一点，我们再回到一阶自回归的例子，该例中的 x_t 在任何时期水平上都可以很好地代替股票的预期收益。它是可观测的，从而可以被计量经济学家作为回归变量使用。本章后附的习题 4 讨论了股价和股利的结构化模型，在该模型中，股利—股价比对数的倍数具有 $AR(1)$例中 x_t 的性质。

表 7.2　股票收益对数对随机去势的短期利率的长期水平回归

$r_{t+1}+\cdots+r_{t+K}=\beta(K)(y_{1,t}-\sum_{i=0}^{11}y_{1,t-i}/12)+\eta_{t+K,K}$

	预报水平(K)					
	1	3	12	24	36	48
1927～1994 年						
$\hat\beta(K)$	−5.468	−17.181	−41.663	−4.492	−26.148	−20.129
$R^2(K)$	0.005	0.016	0.023	0.000	0.004	0.002
$t(\hat\beta(K))$	−2.292	−2.582	−1.564	−0.164	−1.341*	−0.838*
1927～1951 年						
$\hat\beta(K)$	3.144	−6.183	73.712	158.989	−67.505	−50.900
$R^2(K)$	0.000	0.000	0.012	0.031	0.005	0.002
$t(\hat\beta(K))$	0.222	−0.165	0.520	1.662	−0.637*	−0.580*
1952～1994 年						
$\hat\beta(K)$	−6.547	−18.621	−56.406	−26.115	−26.573	−25.894
$R^2(K)$	0.019	0.047	0.103	0.013	0.010	0.008
$t(\hat\beta(K))$	−3.263	−3.206	−2.741	−1.354	−1.555*	−1.092*

注：r 是由在 NYSE、AMEX 以及 NASDAQ 上市的股票的价值加权指数计算的实际收益的对数值。$y1,t$ 是国库券月名义利率。回归采用 OLS 方法，标准差采用汉森和霍德里克(Hansen and Hodrick, 1980)用附录中(A.3.3)计算，其中自协方差为滞后 $K-1$ 到 0 期对应的协方差。当汉森和霍德里克(Hansen and Hodrick, 1980)协方差矩阵的估计结果为非正定时，采用纽维和韦斯特(Newey and West, 1987)$q=K-1$ 的标准差。此时计算的数据标以 * 。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

下面利用一阶自回归的例子来说明当 x_t 具有持续性时的结果。这时用收益对 x_t 做回归的 R^2 在短时期水平上是很小的，随着时期水平的增加，R^2 先增加然后递减。我们还要讨论长时期水平回归中由于样本有限给统计推断带来的困难。

R^2 统计量

首先考虑单期收益 r_{t+1} 对变量 x_t 的回归。为简单起见，略掉常数项。可以将常数包括在回归中，或更简单地用中心化处理过的数据进行回归。在总体中，$\beta(1)=1$，所以拟合值就是 x_t 本身，方差为 σ_x^2，收益的方差由式(7.1.31)给出。用 $R^2(1)$ 表示单期回归的 R^2，则：

$$R^2(1)\equiv\frac{\mathrm{Var}[\mathrm{E}_t[r_{t+1}]]}{\mathrm{Var}[r_{t+1}]}\approx\left(\frac{\sigma_d^2}{\sigma_x^2}+\frac{2}{1-\phi}\right)^{-1} \tag{7.2.1}$$

为简单起见，采用当 $\phi\ll\rho$、ρ 接近于 1 时(7.1.31)式的近似公式。当股利信息的波动 σ_d^2 为 0 时，$R^2(1)$ 达到其上界值 $(1-\phi)/2$。因此，即使一只股票的股利是已知的，像公债一样，价格的波动完全是由于预期收益的变化引起的，如果 ϕ 较大(接近 1)，R^2 的值依然很小。原因在于，当预期收益的变化具有很强的持续性时，预期收益上的扰动会使股价产生难以预报的波动。

长期水平回归 R^2 的变化情况会更加复杂。时期水平为 K 个月时的回归形式如下：

$$r_{t+1}+\cdots+r_{t+K}=\beta(K)x_t+\eta_{t+K,K} \tag{7.2.2}$$

在 AR(1)的例子中，从 t 时期开始将来第 j 期的单月收益的最佳预报总是 $\mathrm{E}_t[x_{t+j-1}]=\phi^{j-1}x_t$。$K$ 个月份累计收益的最佳预报通过单期收益最佳预报的加总求出。即：

$$\beta(K)=(1+\phi+\cdots+\phi^{K-1})=(1-\phi^K)/(1-\phi)$$

K 期回归的 R^2 统计量为：

$$R^2(K)\equiv\frac{\mathrm{Var}\Big[\mathrm{E}_t[r_{t+1}]+\cdots+\mathrm{E}_t[r_{t+K}]\Big]}{\mathrm{Var}[r_{t+1}+\cdots+r_{t+K}]} \tag{7.2.3}$$

用单期回归的 $R^2(1)$ 来除并整理，得到：

$$\frac{R^2(K)}{R^2(1)}=\left(\frac{\mathrm{Var}\Big[\mathrm{E}_t[r_{t+1}]+\cdots+\mathrm{E}_t[r_{t+K}]\Big]}{\mathrm{Var}\Big[\mathrm{E}_t[r_{t+1}]\Big]}\right)\times\left(\frac{\mathrm{Var}[r_{t+1}]}{\mathrm{Var}[r_{t+1}+\cdots+r_{t+K}]}\right) \tag{7.2.4}$$

(7.2.4)式右边的第一个分式恰好是 K 期回归系数的平方除以单期回归系数的平方。在 AR(1)例子中，这个值等于 $(1-\phi^K)^2/(1-\phi)^2$，对大的 ϕ 值和小的 K 值，它近似等于 K^2；(7.2.4)式右边的第二个分式与第 2 章讨论过的方差比有密切联系。实际上，可将该项重写为 $1/(KV(K))$，$V(K)$ 是 K 期股票收益的方差比。附于本章后的习题 7.3 证明，在 AR(1)例子中，股票收益的自相关系数全是负的。这时，$V(K)<1$，因此，$1/(KV(K))>1/k$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

将(7.2.4)式右边的两项放在一起考虑发现，如果股票预期收益持续性很强，多期回归的 R^2 统计量的值起初几乎与时期水平 K 同比例增长，从表 7.1 中可以看出这一点。直观上看，是因为对预期收益提前多期预报和提前一期的预报相比变化不大，并且与 R^2 有一定的相关性。另一方面，前后各期的可实现收益之间存在着轻微的负相关。因此，多期收益的拟合值的方差比多期的可实现收益方差增加快，导致 R^2 统计量值增加。当预报期很长时，遥远的未来收益的预报值会趋于 0，因此，(7.2.4)式右端的第一个分式会收敛到一个固定的极限，而多期可实现收益的波动仍在增加，第二个分式的值与 $1/K$ 成比例。这样，当预报水平 K 增大时，多期收益预报的 R^2 统计量值最终便趋于 0。

下面考虑 AR(1)的例子，并假定时期水平 $K=2$，这时的有关公式简明一些，以帮助我们理解上面的分析。通过直接推导得出，当 $\phi \ll \rho$ 并且 ρ 接近 1 时，有：

$$\frac{R^2(2)}{R^2(1)} \approx (1+\phi)^2\left[\frac{2+(1-\phi)(\sigma_d^2/\sigma_x^2)}{2(1+\phi)+2(1-\phi)(\sigma_d^2/\sigma_x^2)}\right] \tag{7.2.5}$$

一方面，当 σ_d^2/σ_x^2 趋于 0 时，(7.2.5)式中的比值趋于$(1+\phi)$，因此，如果预期收益过程的持续性很强并且波动很大，两期回归的 R^2 几乎是单期回归的 2 倍。另一方面，当 σ_d^2/σ_x^2 趋于无穷大时，(7.2.5)式中的比值趋于$(1+\phi)^2/2$，因此，如果预期收益只有一个很小的短暂的波动，两期回归的 R^2 是单期回归的一半。

时期水平超过两期时，相关计算十分繁琐。坎贝尔(Campbell,1993b)给出一些数值计算结果。例如，当 $\phi=0.98$，$\rho=0.0995$，并且 $\sigma_d^2/\sigma_x^2=0$ 时，单期回归的 R^2 只有 1.5%，但 152 期水平的回归 R^2 最高可达 63%。当预报变量的变化持续时，随时期水平大幅度增大，R^2 会连续增加。

样本有限性带来的推断困难

表 7.1、表 7.2 中的 t 统计量值是利用附录介绍的渐进方法计算的。但在收益对信息变量 x_t 的回归中使用渐进方法存在许多问题。

先看第一个问题。在单期收益 r_{t+1} 对 x_t 回归时，$r_{t+1}=\beta(1)x_t+\eta_{t+1}$，尽管回归变量 x_t 与同期及未来各期的误差项 η_{t+1+i} 不相关，但与 t 之前的各期误差项 η_{t-i} 相关，$i\geqslant 1$。这种相关性的存在是由于影响 x_t 的扰动与影响收益的扰动是相关的，并且 x_t 是持续的。用计量经济学的术语来讲，回归变量 x_t 是**前定的**，但不是**外生的**。这会导致在样本有限的情况下收益对 x_t 回归的系数产生偏差。在 AR(1)模型例子中，当回归的时期水平为单期时，这种偏差有一个简明的表达：

$$\mathrm{E}[\hat{\beta}(1)-\beta(1)]=-\left(\frac{1+3\phi}{T}\right)\frac{\sigma_{\eta\epsilon}}{\sigma_\epsilon^2}=\frac{\rho(1+3\phi)}{(1-\rho\phi)T} \tag{7.2.6}$$

其中，$-(1+3\phi)/T$ 是由肯达尔(Kendall,1954)在用 x_{t+1} 对 x_t 做 OLS 回归时给出的系数 ϕ 的偏差的表达式。斯坦博(Stambaugh,1986)已经证明，当回归的扰动 η_{t+1} 与预报

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

变量的扰动项 ξ_{t+1} 一起变动时，这一偏差会导致 OLS 回归系数 $\beta(1)$ 产生偏差。在我们给出的例子中，由于假设未来股利信息和未来收益信息不相关，这时比值 $\sigma_{\eta\xi}/\sigma_{\xi}^2=-\rho/(1-\rho\phi)$，从而(7.2.6)式的第二个等式成立。这时的偏差不可忽视，例如，如果 $\rho=0.997$，则当 $\phi=0.9$ 时，偏差为 $36/T$，$\phi=0.95$ 时，偏差为 $73/T$，$\phi=0.98$ 时，偏差为 $171/T$①。

再来看第二个问题。当时期水平 K 相对于样本容量较大时，采用渐进方法在样本有限的情况下会带来新的问题。雷德里克(Hodrick，1992)、纳尔逊和基姆(Nelson and Kim，1993)采用蒙特卡洛方法说明，当收益对股利—股价比做回归时会存在这种问题。理查德森和斯托克(Richardson and Stock，1989)也证明，当时期水平 K 与样本容量几乎同速度增长时，在样本有限时采用渐进方法就必须考虑由此给回归结果带来的差异和影响。第 2 章的第 2.5.1 节中曾经就收益对过去收益做的单变量回归分析采用的这种渐进方法进行过讨论。

避免这一问题的方法是对基本的回归进行变换，从而避免跨期残差。杰盖迪希(Jegadeesh，1991)在对法马和弗兰切(Fama and French，1998b)收益对滞后收益做的回归分析进行评价时，曾建议采用这一方法。柯克雷恩(Cochrane，1991)将这一方法一般化。例如，我们可以估计：

$$r_{t+1}=\gamma(K)(x_t+\cdots+x_{t-K})+v_{t-1,k} \tag{7.2.7}$$

这时的 $V_{t+1,K}$ 为序列不相关。(7.2.7)式中回归系数 $\gamma(K)$ 的分子与(7.2.2)式中回归系数 $\beta(K)$ 的分子相同，因为一个时刻的 $\underline{x}$ 与另一时刻的 $\underline{r}$ 的协方差只与它们的时刻差有关。因此，(7.2.7)式中的 $\gamma(K)=0$ 当且仅当(7.2.2)式中的 $\beta(K)=0$。但这并不是说在零假设和备选假设下，$\gamma(K)=0$ 和 $\beta(K)=0$ 具有相同的渐进性质。霍德里克(Hodrick，1992)给出两种检验统计量的分布的蒙特卡洛模拟结果。他发现，如果采用渐进方法给出临界值，两种情况都倾向于拒绝零假设，因此，采用表 7.1 和表 7.2 中的长期水平的 t 统计值时一定要谨慎。但他同时又发现，由此产生的偏差对表中表现出的收益的可预测性不会产生太大影响。

有一个重要但未解决的问题：能否找到一种条件，在此条件下长期回归比短期回归能更有效地检验实际数据对零假设的偏离程度。霍德里克(Hodrick，1992)、马克(Mark，1995)给出的蒙特卡洛模拟结果显示，这种情况可能存在。坎贝尔(Campbell，1993b)也对此问题进行研究，但没有什么确定的结论。

7.2.2 波动性检验

前面一节讨论了被解释变量为长期水平收益的回归问题。做这种回归的动因之一

---

① 当回归时期水平大于 1 时，类似的偏差也会影响回归的进行。参见霍德里克(Hodrick，1992)和马克(Mark，1995)对该问题的蒙特卡洛结果。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

是:资产价格受直到无穷远未来的各期预期收益值的影响,因此,要了解价格行为,就必须进行长期水平的回归。现在我们转向另外一些实证分析,更为直接地研究股票价格的波动性。在 80 年代初期,关于股价波动太大,不能用常数贴现率下的未来收益进行预测的问题,利罗伊和波忒(LeRoy and Porter,1981)与希勒(Shiller,1981)展开激烈的争论。这种分歧和争论后来偃旗息鼓,一方面是因为在现在看来,对常数贴现率模型的否定和拒绝,并不等于对市场有效性的否定和拒绝;另一方面是因为对回归问题的检验也使许多计量经济学家相信,股票收益不是一个常数而是时变的。不过,在有关波动的研究中,有一些重要的思想引入,与前面介绍的收益的多期回归有一定的关系。有意义的研究包括吉利斯和利罗伊(Gilles and LeRoy,1991),利罗伊(LeRoy,1989),希勒(Shiller,1989,第 4 章)和韦斯特(West,1988a)。

早期文献中,波动研究都直接采用股价和股利作为变量,我们这里仍旧采用变量的对数形式,这与近期文献一致,与本章后面内容也一致。首先定义一个概念:完全预见股票价格。其对数形式为:

$$p_t^* \equiv \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j[(1-\rho)d_{t+1+j}+k-r] \tag{7.2.8}$$

之所以称完全预见价格,可以从(7.1.21)式解释。从(7.1.21)式看,当投资者不再调整对未来的预期,从而不存在非预期的收益,那么可实现收益是一个常数 r,这时的价格就是完全预见价格。也可以等价地从(7.1.22)式来看,当预期收益为常数并且投资者对未来有充分的信息时,这时的股价就是完全预见价格。将(7.2.8)式代入到(7.1.21)式中,有:

$$p_t^* - p_t = \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j(r_{t+1+j}-r) \tag{7.2.9}$$

p_t^* 与 p_t 之差是未来各期股票收益中心化(减去均值)后贴现值之和。

对上式取数学期望并利用(7.1.22)式和(7.1.23)式中 p_{rt} 的定义有:

$$E_t[p_t^*]-p_t=p_{rt}-\frac{r}{1-\rho}=p_{rt}-E(p_{rt}) \tag{7.2.10}$$

前面曾讨论过,p_{rt} 可解释为股价中与未来股票收益改变有关的部分。因此,$p_t^*-p_t$ 的条件期望刻划了预期股票收益的变化对当前股价的影响。在 AR(1)例子中,$p_t^*-p_t$ 的条件期望是 $x_t/(1-\rho\phi)$,这可从(7.1.29)式直接算出。

如果股票的预期收益是常数,则(7.2.10)式的右端等于 0。因此,常数预期收益假设意味着 $p_t^*-p_t$ 成为一个预报误差,并且与时刻 t 的信息不相关。这同时等价地意味着,股票价格是完全预见价格的理性预期:

$$p_t=E_t(p_t^*) \tag{7.2.11}$$

如何由此来检验股票预期收益是否为常数呢?为表达上的简明,先做两个不太现实的假设:(1)股价对数和股利对数都是平稳的随机过程,因此一、二阶矩存在;(2)股利对数直到无穷远未来都是可观测的。这样,对计量经济学家来说,完全预见价格是可观测的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在后面的讨论中，我们将放宽这些假设。

正交性和方差有界性检验

(7.2.11)式说明，$p_t^*-p_t$ 与时刻 t 的信息变量是正交的。对(7.2.11)式的正交性检验可以转化为 $p_t^*-p_t$ 对信息变量的回归，然后对回归系数是否等于 0 做检验。如果信息变量中包括股价变量 p_t，这又等价于 p_t^* 对 p_t 及其他信息变量做回归，然后检验 p_t 的回归系数为 1 而其他的回归系数为 0。这些回归是前面讨论的长期水平收益回归的变形。(7.2.9)式表明，$p_t^*-p_t$ 是未来各期收益中心化处理后贴现值的和，因此，针对(7.2.11)式的正交性检验，就归结为时期水平为无穷远时收益的回归，其中对距离现在较远的未来收益进行贴现时，权重以几何级数递减①。

许多文献并不直接进行正交性检验，而是检验股价波动隐含的正交性。最有名的方法是由利罗伊和波忒(LeRoy and Porter, 1981)及希勒(Shiller, 1981)给出的股价方差不等式：

$$\mathrm{Var}[p_t^*]=\mathrm{Var}[p_t]+\mathrm{Var}[p_t^*-p_t]\geqslant \mathrm{Var}[p_t] \tag{7.2.12}$$

在正交性零假设下，$P_t^*-p_t$ 与 p_t 不相关，协方差为 0，从而(7.2.12)式成立。也可以这样理解(7.2.12)式：一个最佳预报的波动不会超过它预报的变量的波动。当预期收益为常数时，股价是未来股利的预报，其波动不会超过未来股利可实现现值的波动。这种检验就是所谓的方差有界性检验。

杜劳夫和菲利浦斯(Durlauf and Phillips, 1988)指出，方差有界性检验可以重新表述为正交性检验。为此，考虑 p_t 对 $p_t^*-p_t$ 的回归，这刚好是前面讨论过的回归的反向回归，在零假设下，它的回归系数也应该是 0，这个反向回归的系数为：

$$\theta\equiv \mathrm{cov}[p_t^*-p_t,p_t]/\mathrm{Var}[p_t^*-p_t]$$

可以直接证明：

$$\frac{\mathrm{Var}[p_t^*]-\mathrm{Var}[p_t]}{\mathrm{Var}[p_t^*-p_t]}=1+2\theta \tag{7.2.13}$$

因此，只要这个反向回归系数 $\theta>-1/2$，(7.2.12)式就成立。这个条件比正交性条件 $\theta=0$ 要弱一些，因此，在方差有界性检验无效的一些情况下，正交性检验却有效。采用方差有界性检验不是为了增加检验的势，而是因为方差有界性检验可以帮助我们理解零假设失败的原因。

单位根

到目前为止，我们都假定股价对数和股利对数总体的方差是存在的。如果股利对数

---

① 权重的递减使得回归 R^2 值为正，我们在第 7.1.2 节证明，在无权重有限时期水平收益回归中，随着时期水平的增加，R^2 值收敛到 0。杜劳夫和哈尔(Durlauf and Hall, 1989)，斯科特(Scott, 1985)以及希勒(Shiller, 1989，第 11 章)都曾做过这种类型的回归。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

服从单位根过程，方差便不再是有限的。因此，克雷顿(Kleidon，1986)指出，依据股利和股价的样本方差来推断，往往引起误导。马歇和默顿(Marsh and Merton，1986)设计了一个很妙的例子，他们假设股票预期收益为一常数，零假设成立，再假设公司经理们为了让其股票价格成为公司“永远盈利”的标志，设法让每期股利等于上期股价的一个百分比。用对数形式我们有：

$$d_{t+1}=\bar{\delta}+p_t \tag{7.2.14}$$

这里的 $\bar{\delta}$ 为常数，表示(7.2.11)式对应的零假设成立。可以证明，在这个例子中，股利的对数和股价的对数都服从单位根过程。将(7.2.14)式带入到(7.2.8)式可以发现，完全预见价格与实际价格有如下关系：

$$p_t^* = (1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j p_{t+j} \tag{7.2.15}$$

显然，p_t^* 是对实际股价做平滑处理的结果，因此，方差依赖于 p_t 的方差和协方差。既然自协方差不可能大于1，p_t^* 的方差一定小于 p_t 的方差。这一结论对总体来讲意义不大(由于股价对数和股利对数都有单位根，总体方差无限大)，其意义在于对样本方差的分析。因此，方差不等式(7.2.12)在马歇—默顿(Marsh-Merton)的例子中永远都不成立。

尽管单位根问题很严重，但可以很容易地绕开。只要股票收益是平稳的，变量 $p_t^*-p_1$ 总是平稳的。这样，$p_t^*-p_t$ 与平稳变量的正交性检验就可以很好地进行。当 $p_t^*-p_t$ 对股价 p_t 做回归时，由于 p_t 有单位根，会出现克雷顿(Kleidon，1986)与马歇和默顿(Marsh and Merton，1986)提出的问题。这个问题可以通过单位根回归的有关理论来解决，也可以通过选择平稳的回归变量(如股利—股价比的对数)来解决。处理单位根问题的另外一些方法在本章后面附带的习题7.5中给出①。

样本有限性问题

到目前为止，我们一直将安全预见价格看作是可观测的变量。但从(7.2.8)式的定义来看，完全预见股票价格是一个无穷远期贴现值的和式，在样本有限的情况下是不可观测的。对(7.2.8)式中的 p_t^* 定义进行变形得出：

$$p_t^* = (1-\rho)\sum_{j=0}^{T-t-1}\rho^j(d_{t+1+j}+k-r)+\rho^{T-t-1}p_T^* \tag{7.2.16}$$

当直到时刻 T 的样本已知时，上式右端第一项是可观测的，但第二项不可观测。

按照希勒(Shiller，1981)的思路，对这一问题标准的处理办法是用一个可观测的 $p_{t,T}^*$

① 杜劳夫和哈尔(Durlauf and Hall，1989)采用了单位根回归理论，而坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1989a，b)利用股利—股价比对数代替股价对数。习题7.5以曼昆、罗默和夏皮罗(Mankiw，Romer and Shapiro，1985)，韦斯特(West，1988b)的研究为基础的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

来代替不可观测的 p_t^* 。$p_{t,T}^*$只用到样本信息：

$$p_{t,T}^* \equiv (1-\rho)\sum_{j=0}^{T-t-1}\rho^j(d_{t+1+j}+k-r)+\rho^{T-t-1}p_T \tag{7.2.17}$$

这里，采用股票的实际价格 p_T 来代替完全预见股票价格 p_T^*[①]。对变量 p_T^* 有几点需要注意，第一，如果预期收益为常数，用 $p_{t,T}^*$来取代 p_t^* 时，(7.2.11)式仍然成立。因此，对不变预期收益模型的检验可以使用 $p_{t,T}^*$来进行。第二，股价中的泡沫会影响 p_t 和 $p_{t,T}^*$。因此采用 $p_{t,T}^*$做假设检验，泡沫存在于零假设中而不是备选假设中。第三，$p_{t,T}^*-p_t$ 可表示为中心化处理后的股票收益贴现值的和。和式在样本期 T 处结束，而不是在一个固定的时期水平结束。因此，用 $p_{t,T}^*-p_t$ 做正交性检验等价于收益在长期水平上的回归分析，只不过这时对未来收益以几何级数贴现率贴现，并且回归时期水平与样本期相同。

正如希望的那样，在正交性检验和方差有界性检验中，用于推断的渐进理论和方法与长期水平上收益的回归分析中用于推断的渐进理论和方法本质上是一致的[②]。像通常情况一样，在样本有限时，重要的是确定(7.2.9)式中从哪一时刻开始，对应的贴现后的未来收益足够小，对 $p_{t,T}^*-p_t$ 值的贡献可以忽略。如果这一时刻相对样本容量很大，采用渐进方法做的统计推断是不可靠的。

对于方差有界性检验中可能存在的上述问题，弗莱文(Flavin，1983)给出一个清楚、直观的解释。她指出，当用样本均值为基础计算出的样本方差来估计总体方差时，由于总体真正的均值并不知道，常会产生下方偏差。当过程为白噪声时，用离差平方和除以 $T-1$而不是 T 的办法来减少这种偏差，这是大家熟知的。但不幸的是，对序列相关过程来讲，这种下方偏差非常显著(直观上看，这样的过程其有效的观测较少)，所以当有序列相关存在时，上述纠正偏差的方法就显得很无力。$p_{t,T}^*$比 p_t 的序列相关性高出许多。这是因为，在 $p_{t,T}^*$的公式中，T 的变化一方面会使第一部分现值公式中的项数发生变化，另一方面会影响到第二部分的贴现因子 p^{T-t-1}，这些都会影响到 $p_{t,T}^*$，而 p_t 只受股利新的信息的影响。因此，$p_{t,T}^*$的样本方差与 p_t 的 样本方差之比会存在下方偏差，这就会导致在有限样本情况下(7.2.12)式往往不成立。由于正交性检验和方差有界性检验的某种等价性，回归分析中存在同样的问题。

7.2.3 向量自回归方法

前面两部分讨论的方法有一个共同点，即直接探究数据长期水平的性质，当样本有限

---

① 希勒(Shiller，1981)在其终端条件中以股价样本均值代替样本期结束时股价，但此后的研究中，包括希勒(Shiller，1989)都采用了此处介绍的方法。

② 利罗伊和斯泰格尔沃尔德(LeRoy and Steigerwald，1992)利用蒙特卡洛方法研究了正交性和方差有界性检验的势。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

时会带来统计处理的困难。对数据性质的研究可采用另一种方法，当可以用一个简单时间序列来描述数据时，不直接估计长期水平的性质，而是通过短期水平模型加以揭示。在方差有界性检验中，利罗伊和波忒(LeRoy and Porter，1981)使用的就是这种方法，他们注意到，方差有界性检验并不需要知道完全预见股价 p_t^* 本身的观测，而只需要 p_t^* 方差的估计，这个估计可以从单变量的股利时间序列模型中得到。韦斯特(West，1988b)发展了这一方法。

为弄清这一方法的原理，假定市场参与者掌握的状态变量 $\mathbf{x}_t$ 是完全可观测的，并且服从一个向量自回归过程(VAR)。通过在状态向量中增加原变量的不同价的滞后变量，任何一个 VAR 模型都可以写成一阶的形式，因此不失一般性，设：

$$\mathbf{x}_{t+1}=\mathbf{A}\mathbf{x}_t+\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \tag{7.2.18}$$

这里，$\mathbf{A}$ 是 VAR 的系数矩阵，$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ 是随机扰动项；为简单起见，舍去常数项，可以认为状态向量中的变量经过中心化处理。

从(7.2.18)式通过矩阵相乘可以得到状态向量 $\mathbf{x}_t$ 的多期预报：

$$\mathrm{E}_t[\mathbf{x}_{t+1+j}]=\mathbf{A}^{j+1}\mathbf{x}_t \tag{7.2.19}$$

这样就使包含价格的(7.1.22)式、(7.1.23)式和包含收益的(7.1.25)式、(7.1.26)式的长期水平的预报容易计算。

向量自回归和股价波动性

先看第一个例子。假定状态向量的第一个元素为股价 p_t，第二个元素为股利 d_t，剩下的元素为与预报有关的其他变量。定义向量 $\boldsymbol{e1}'=[1\ 0\ 0\cdots0]$，$\boldsymbol{e2}'=[0\ 1\ 0\cdots0]$。这两个向量乘以状态向量可得到股价 p_t 和股利 d_t。利用这些定义及(7.1.22)式、(7.1.23)式和(7.1.29)式，可将股价中由股利决定的部分表示为：

$$p_{dt}=(1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\boldsymbol{e2}'\mathbf{A}^{j+1}\mathbf{x}_t=(1-\rho)\boldsymbol{e2}'\mathbf{A}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_t \tag{7.2.20}$$

股价 $p_t=\boldsymbol{e1}'\mathbf{x}_t$，因此股价中由预期收益确定的部分就是 p_t 与 p_{dt} 之差。如果预期收益为常数，则 $p_t=p_{dt}$，这等价于对 VAR 过程加上约束条件：

$$\boldsymbol{e1}'=(1-\rho)\boldsymbol{e2}'\mathbf{A}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{A})^{-1} \tag{7.2.21}$$

它可以采用非线性 Wald 检验方法进行检验①。

我们一直假定 $\mathbf{x}_t$ 包括了所有被市场参与者观察到的相关变量。值得庆幸的是，这个非常强的假设可以放宽。即使 $\mathbf{x}_t$ 只包含了所有相关信息变量的一个子集，在不变预期收益的零假设下，股价 p_t 仍然等于未来股利贴现值的最佳 VAR 预报，即仍可由(7.2.20)式求出。从直观上也很容易理解：当零假设成立时，股价完全反映了投资者掌握的未来股利

① 详细内容参见坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1987，1988a、b)。坎贝尔和希勒还给出如何检验其他的股票预期收益的 VAR 模型。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

贴现值的信息。也可以从另一个角度理解这一点:将(7.2.21)式看作一个约束条件,它增加了多期收益的不可预测性。在投资者信息给定时,如果多期股票收益不可预测,那么,在给定投资者信息的任何一个真子集时,股票收益仍是不可预测的。因此,这时对(7.2.21)式的 VAR 零假设检验是有效的。

单期股票收益的不可预测性条件和条件(7.2.21)式有一定关系。可以证明,后者是前者的一个非线性变换。在 VAR 模型中,单期股票收益不可预测的充分必要条件是:

$$\mathbf{e1}'(\mathbf{I}-\rho\mathbf{A})=(1-\rho)\mathbf{e2}'\mathbf{A} \quad (7.2.22)$$

(7.2.22)式由(7.2.21)式两边乘以矩阵($\mathbf{I}-\rho\mathbf{A}$)而得到,其经济含义为:当且仅当单期收益不可预测时,多期收益不可预测。但是,Wald 检验统计量对假设的非线性变换非常敏感,因此,VAR 系数约束条件的 Wald 检验,单期形式的(7.2.22)式和无限期水平的(7.2.21)式在状态向量中增加原变量的不同价的滞后变量会有很大不同。一个有兴趣的有待研究的问题是,在像 AR(1)一样简单的时变期望收益模型中,VAR 检验统计量有什么性质。

有一点必须说明,以免引起误解。当不变预期收益的零假设错误时,一般情况下由 VAR 给出的 p_{dt} 的估计依赖于 VAR 模型中包含的信息。因此,当拒绝零假设时,对相应 VAR 估计量的解释要十分谨慎。看一个例子。坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller, 1998a)给出一个 VAR 模型。为保证系统的平稳性,模型没有采用实际股价对数和实际股利的对数作为变量,而是以股利—股价比和实际股利增长率作为变量。我们采用 1871～1994 年最新的样本区间数据,并用 4 期滞后来估计模型。图 7.1 中实线表示股价的对数,虚线表示股利的对数,两个序列都进行过中心化处理(减去均值),因此均值为零。两条线有趋同的趋势,但股价对数的波动比股利对数波动大。图 7.2 中实线表示股价对数,虚线表示中心化处理后的由 VAR 模型估计的 p_{dt} 的值。由于实际股价的对数值接近随机游动,由 VAR 模型估计的 p_{dt} 的值接近 d_t 本身,因此,p_t 的波动大于 p_{dt} 的波动。图 7.3中实线表示股利—股价比的对数,虚线表示股利与 p_{dt} 的比值的对数①。与对股利波动的解释能力相比,常数贴现率的现值模型对股价波动的解释能力要小。

虽然这个一般性结论具有稳健性,但 p_{dt} 的平滑性对 VAR 模型设定非常敏感。系统阶数较低、变量滞后不超过 4,p_{dt} 与 d_t 接近。当滞后期增加到 10 时,p_{dt} 变得非常光滑,很像一条趋势线。当股价与盈利的 10 年或 30 年滑动平均之比加入到 VAR 系统中时,会出现相同的情形。这一点坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller, 1988b)曾提到过。在用 VAR 模型来描述股利增长时,长期来看,似乎存在一种均值回复现象。

总之,VAR 方法认为,股票市场波动十分剧烈,不能认为股票价格是未来股利用不变贴现率贴现值的最佳预报。一些 VAR 模型认为,最佳股利预报接近于当前股利,而另一

---

① 该序列没有进行中心化处理;可以通过对实线对应的数据取对数方法重新得到股利—股价比。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

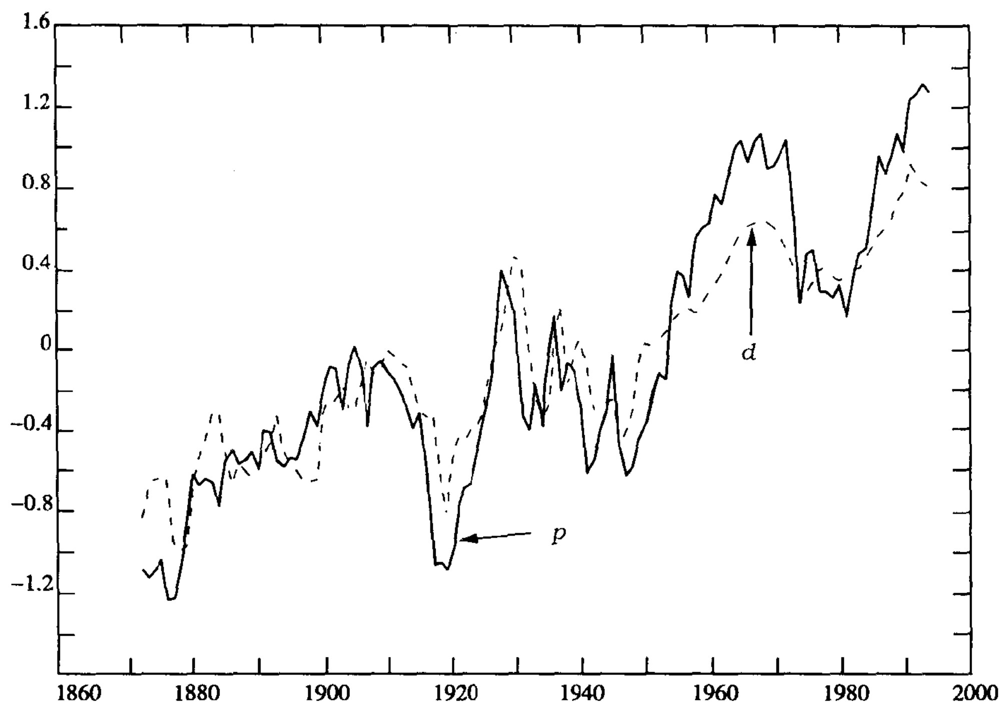


图 7.1 对数实际股票价格和红利序列，1872 年至 1994 年美国年度数据

些 VAR 模型则认为，最佳股利预报甚至比当前股利还要平滑。两种模型都不能解释为什么股票价格的变动趋势与股利的变动趋势不具有一对一的关系①。不过，严格来讲，一旦零假设 $p_t = p_{dt}$ 被拒绝，对 p_{dt} 性质的任何解释都将以 VAR 中所含的信息为条件。

向量自回归与收益波动性

将波动检验应用于包含股价和股利的 VAR 系统的做法曾遭到过批评，其中最常见的批评意见指出，控制和影响股利时间序列的随机过程可能是不稳定的②。但庆幸的是，可以不通过股利过程的建模来分析股票收益波动情况。考虑一个状态变量 $\mathbf{x}_t$，第一个元素是单期的股票收益，其余元素为相关的收益预报变量。在这样一个系统中，非预期股票收益为：

---

① 巴斯克伊和迪朗(Barsky and DeLong，1993)指出，如果股利增长中存在单位根，股票的价格行为将会理性化，但他们没有从计量经济学上给出任何的证据支持。多纳德森和凯姆斯特(Donald and Kamstra，1996)认为，非线性的股利预报模型对长期未来股利的预报会产生更多的波动。有关研究仍十分活跃。

② 莫蒂格利尼—米勒(Modigliani-Miller)定理认为，公司经理使公司价值极大化的行为并不限制股利政策的方式。莱赫曼(Lehmann，1991)以此为基础认为，描述股利行为的随机过程趋向于不稳定。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

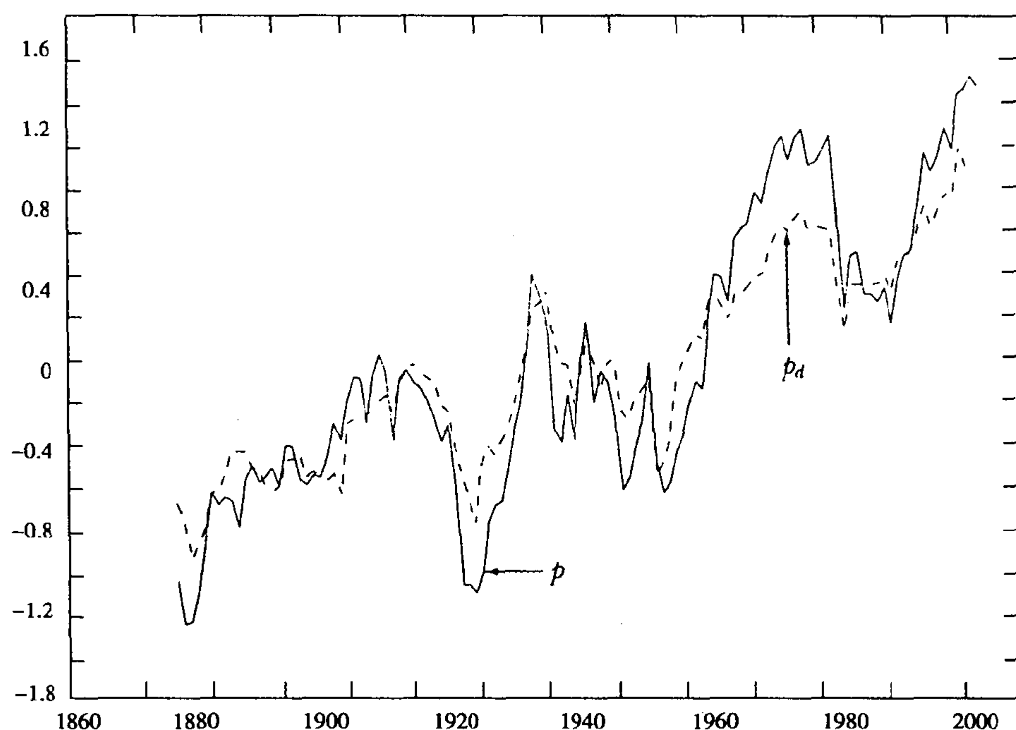


图 7.2 对数实际股票价格和所估计的红利部分，1876 年至 1994 年美国年度数据

$$r_{t+1}-\mathrm{E}_t(r_{t+1})=\mathbf{e1}'\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \tag{7.2.23}$$

回忆以下 $\eta_{r,t+1}$ 的定义，它是未来股票收益期望值的修正：

$$\eta_{r,t+1}\equiv \mathrm{E}_{t+1}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}\right]-\mathrm{E}_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}\right]$$

变为：

$$\eta_{r,t+1}=\mathbf{e1}'\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j\mathbf{A}^j\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}=\mathbf{e1}'\rho\mathbf{A}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{A})^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \tag{7.2.24}$$

从(7.1.26)式可以得出，未来股利期望的修正 $\eta_{d,t+1}$ 可以看作一个残值：

$$\eta_{d,t+1}=(r_{t+1}-\mathrm{E}_t[r_{t+1}])+\eta_{r,t+1}=\mathbf{e1}'(\mathbf{I}+\rho\mathbf{A}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{A})^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$$

坎贝尔(Campbell,1991)曾对一个系统进行估计。这个系统的状态向量由实际股票收益(r_t)、股利—股价比对数(x_{2t})和经过随机去势的短期利率水平(x_{3t})三个元素组成。我们借用该例，用 1952 年 1 月到 1994 年 12 月的月度数据估计出包含三个变量的一阶 VAR 模型：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

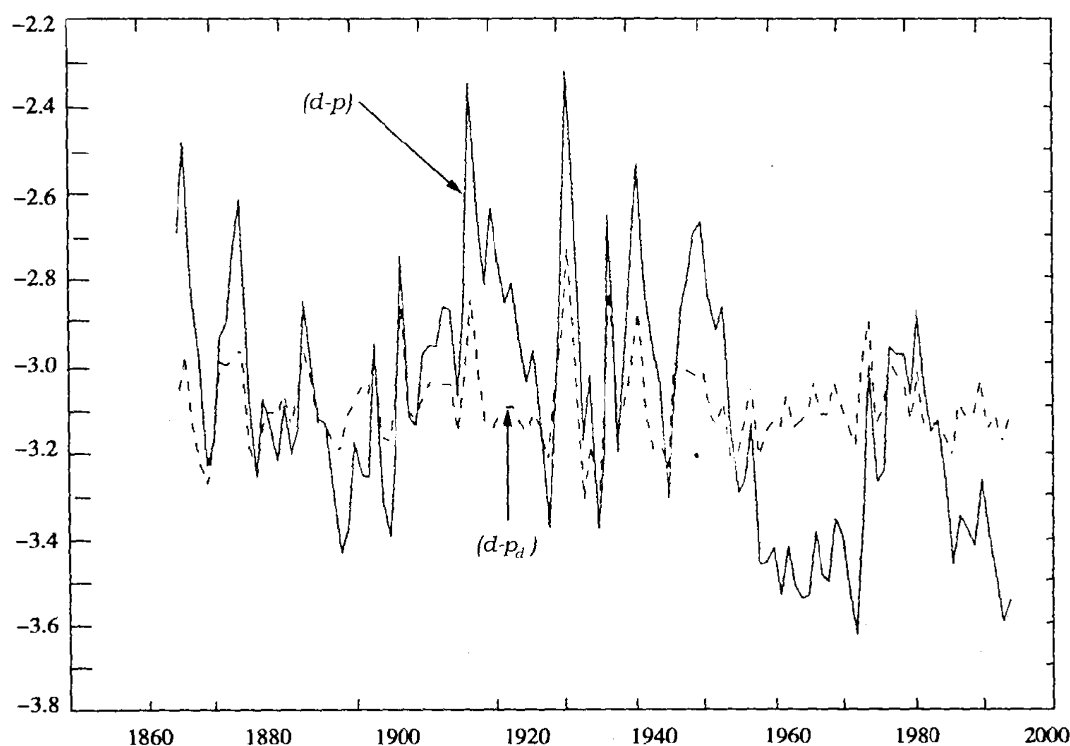


图 7.3 对数红利—股价比率和所估计的红利部分，1876 年至 1994 年美国年度数据

$$\begin{bmatrix} r_{t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(0.053)}{0.055} & \underset{(0.230)}{0.655} & \underset{(0.166)}{-0.520} \\ \underset{(0.001)}{-0.038} & \underset{(0.003)}{0.999} & \underset{(0.002)}{-0.000} \\ \underset{(0.011)}{-0.032} & \underset{(0.046)}{-0.040} & \underset{(0.050)}{0.707} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t \\ x_{2t} \\ x_{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t+1} \\ \varepsilon_{2,t+1} \\ \varepsilon_{3,t+1} \end{bmatrix} \tag{7.2.25}$$

(7.2.25)式中 VAR 的系数矩阵 **A** 是采用数值方法得到的，其中矩阵中每一行下面括号内数值是渐进标准差。(7.2.25)式中包含的三个回归的 R^2 统计值分别为 0.040、0.996 和 0.537，表示月度股票收益可预测程度①。

将估计出的矩阵 **A** 代到(7.2.24)式中，利用估计的误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ 的方差—协方差矩阵计算一期收益、股利的方差和协方差。估计出的预期收益的样本方差是可实现收益方差的 0.75 倍，而估计出的股利样本方差只有可实现收益方差的 0.12 倍。可实现收益方

① 从系数估计可以看出，在该样本期，股利—股价比的对数有一个根非常接近 1。尽管从理论上有许多理由认为股利—股价比的对数是平稳的，并采用美国数据对单位根的检验也拒绝在长期样本期存在单位根的假设，但股利—股价比对数的持续性确实给 VAR 模型的推断带来了麻烦。霍德里克(Hodrick，1992)采用蒙特卡洛方法仔细研究了这些问题。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

差的剩余部分(总方差的 0.13 倍)表现为预期收益和股利的协方差[①]。

对上面结果可作如下解释:用股利—股价比预报股票收益,由于股利—股价比本身是一个高度持续的过程,因此,股利—股价比对数的变动与预期收益的持续变动是紧密相连的,而预期收益的持续变化会引起股价很大的波动。从这个例子可以看出,我们估计出的 VAR 模型比本章前面给出的 AR(1)例子要复杂一些。VAR 模型含有两个预报变量,每一个都接近一个单变量的 AR(1)模型。但是,由于利率变量的作用在于增加单期股票收益的可预测性,对系统的长期影响不大(系统的长期性质主要由股利—股价比的持续变化决定),因此,VAR 模型与 AR(1)有类似的长期性质。从前面的分析知道,像(7.2.25)式一样的 VAR 模型应该能够解释长期水平回归的结果。事实的确如此。坎贝尔(Campbell,1991),霍德里克(Hodrick,1992)以及坎德尔和斯坦博(Kendel and Stambaugh,1989)证实了这一点。当然,VAR 系统给数据增加了更多的结构限制。不过,霍德里克(Hodrick,1992)通过蒙特卡洛方法得出,当加在数据上的系统结构限制正确时,有限样本情况下用 VAR 模型比相应的长期水平的回归结果好(回归的时期水平相对于样本容量较大)。

7.3 结 论

本章的研究帮助我们理解计量经济学家是如何看待资产市场的。过去一致认为,资产的预期收益近似为常数,股价可以反映未来现金支付的信息。如今,预期收益的时变特性的重要性已被广泛认识,并在学术界和专业投资界广泛应用。

在学术研究上,有大量文献研究时变预期收益的决定因素。从实际商业周期的宏观经济模型到非标准的投资者心理模型,计量经济学家提出了许多想法。我们将在第 8 章讨论其中的一些论点。在应用方面,动态资产配置模型变得越来越流行。本章讨论的技术可以给投资策略的制定提供数量分析,其中,长期水平的收益回归是最有吸引力的一种方法。这不仅是因为这种方法在统计处理上所占的优势,同时还因为建立在长期水平收益预报基础上的投机策略往往可以降低交易费用。

习 题

7.1 20 世纪 80 年代后期,公司大规模回购股票,请你分析股票回购对股价、股利关系的影响。

考虑一个公司,每期都有固定的现金流量 X,公司总市值(包括当前现金流量 X)为 V。V 是通过用

---

① 在 1926 ~1988 年这样一个较长的区间内,两个变量的方差和协方差占可实现收益的总的方差的比例几乎是相同的。方差分解中的渐近标准差可以通过附录中 A.4 中介绍的德尔塔方法来计算。就像上面讨论的包含股利、股价的 VAR 模型一样,方差的分解是建立在包含在系统中信息变量的基础之上的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

常数贴现率 R 对未来现金流量(包括当期)贴现求出：

$$V=\frac{(1+R)}{R}X$$

在每一期，公司将现金流量的一部分(λ 倍，$\lambda<1$)以息前价格回购股票，用现金流量的剩余部分($(1-\lambda)$倍)支付未收购股票的股利。公司在每一期开始(回购前)发行在外的股票为 N_t 股。

7.1.1 在时刻 t，公司股票的每股利前价格和每股股利是多少?

7.1.2 推导股利—股价比、每股股利增长率 G 以及贴现率 R 之间的关系。

7.1.3 证明：每股价格等于每股股利以常数贴现率 R 贴现的期望现值。直观地解释，即使在公司只用现金流量的一部分用于发放股利，公式仍旧是正确的。

7.2 考虑一只股票，股利的对数值 d_t 服从一个带漂移的随机游动：

$$d_{t+1}=\mu+d_t+\varepsilon_{t+1}$$

这里，$\varepsilon_{t+1}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$。假设股票收益率的对数为常数 r。

7.2.1 用记号 F_t[表示基本价值(fundamental value)]表示用假定的收益率对股利贴现的期望值。证明：F_t 是股利 D_t 的一个常数倍。将比值 F_t/D_t 表示成模型参数的一个函数。

7.2.2 证明：另一个具有相同期望收益率的股票价格公式：

$$P_t=F_t+cD_t^{\lambda}$$

这里 $\lambda>0$ 是模型中其他参数的函数，求 λ。

7.2.3 与布兰恩查德—沃特森(Blanchard-Watson)提出的本章(7.1.16)式中的泡沫作比较，讨论本问题所给模型中的泡沫的强弱。

注：这一问题以弗鲁特和奥布斯特费尔德(Frood and Obstfeld，1991)为基础。

7.3 考虑一只股票，期望收益满足：

$$\mathrm{E}_t(r_{t+1})=r+x_t \tag{7.1.27}$$

假设 x_t 服从一个 AR(1)过程：

$$x_{t+1}=\phi x_t+\xi_{t+1},0<\phi<1 \tag{7.1.28}$$

7.3.1 假设 ξ_{t+1} 与未来股利的支付消息独立，利用第 7.1.3 节中的对数线性近似方法，推导股票可实现收益的自协方差函数。假定 $\phi<\rho$，这里 ρ 为线性化参数。证明股票收益的自协方差函数为负，并以速度 ϕ 衰减。对收益的自协方差函数给出你的经济学解释。

7.3.2 现在假设 ξ_{t+1} 与股票未来股利支付的消息相关，证明：如果 ξ_{t+1} 与股利信息有足够大的正的协方差，股票收益的自协方差函数可以大于 0。

7.4 假定股票“基本价值”的对数 v_t 服从过程：

$$v_t=\mu-\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)(d_t-v_{t-1})+v_{t-1}+\varepsilon_t$$

这里 μ 为常数，ρ 为第 7.1.3 节中线性化参数，d_t 为资产利息的对数，ε_t 为白噪声的误差项。

7.4.1 证明如果股票价格等于基本价值，则第 7.1.3 节中定义的股票收益对数的近似值是不可预测的。

7.4.2 现假设公司管理者以下面规则支付股利：

$$d_t=c+\lambda v_{t-1}+(1-\lambda)d_{t-1}+\eta_t$$

这里，c、λ 都是常数($0<\lambda<1$)，η_t 为白噪声，与 ε_t 不相关。管理者依据基本价值部分调整股利支付，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

调整的速度由 λ 控制。马歇和默顿(Marsh and Merton,1986)讨论了这个股利政策在实证上的意义。证明:如果股票价格等于基本价值,股利—股价比对数服从 AR(1)过程。作为 λ 和 ρ 的一个函数,这个过程的持续性是什么?

7.4.3 假定股价不等于基本价值,而是满足关系 $p_t=v_t-\gamma(d_t-v_t),\gamma>0$,即只要基本价值高于股利,价格就会超过基本价值。证明:股票收益对数的近似值和股利—股价比的对数满足由(7.1.27)式、(7.1.28)式描述的 AR(1)过程。这里作为股票收益对数最佳预报的 x_t,是股利—股价比对数与一个正数的乘积。

7.4.4 证明:在该例中股票收益的扰动项与 x_t 的扰动相负相关。

7.5 回顾恰当预见的股票价格的定义:

$$p_t^* \equiv \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j[(1-\rho)d_{t+1+j}+k-r] \tag{7.2.8}$$

常数预期收益假设意味着,在给定投资者信息的情况下,实际股票价格 p_t 是 p_t^* 的一个理性预期。现在考虑采用一个较小的信息集 J_t 来对股利进行预报。定义 $\hat{p}_t\equiv \mathrm{E}[p_t^*|J_t]$。

7.5.1 证明 $\mathrm{Var}(p_t)\geqslant \mathrm{Var}(\hat{p}_t)$。给出该结果的一些直观经济学解释。

7.5.2 证明 $\mathrm{Var}(p_t^*-\hat{p}_t)\geqslant \mathrm{Var}(p_t^*-p_t)$,$\mathrm{Var}(p_t^*-\hat{p}_t)\geqslant \mathrm{Var}(p_t-\hat{p}_t)$。给出直观的经济学解释。讨论在什么情况下该不等式比(a)中给出的不等式更有效。

7.5.3 现在定义 $\hat{r}_{t+1}\equiv k+\rho\hat{p}_{t+1}+(1-\rho)d_{t+1}-\hat{p}_t$。这里 $\hat{r}_{t+1}$ 表示如果只采用一个信息子集 J_t 来预报股利,常数期望收益率模型中的收益。证明 $\mathrm{Var}(r_{t+1})\leqslant \mathrm{Var}(\hat{r}_{t+1})$。给出直观的经济学解释,并讨论在什么情况下该不等式比(a)中的不等式更有效。

注:该问题以曼昆、罗默和夏皮罗(Mankiw, Romer and Shapiro, 1985)以及韦斯特(West, 1988b)为基础。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

8. 跨期均衡模型

本章讨论资产价格与投资者消费与储蓄决策的关系。在第 5 章和第 6 章中讨论静态资产定价模型时我们没有考虑投资者消费决策问题，仅把资产价格看作由偏好于确定了的未来一期资产的投资者的组合选择所决定。这些模型假设投资者一期以后消费掉他们的所有财富，或者至少那些财富是决定消费的惟一因素。于是，由消费确定的偏好等价于由资产确定的偏好。当然，这种对问题的简化最终是不会令人满意的。在现实世界里，投资者进行组合决策时总要考虑多个时期的情况以及在这些期间里应当同时建立的消费和组合选择模型。

资产定价的跨期均衡模型具有回答前面章节遗留下来没有解决的问题的潜力。第一，什么力量决定无风险利率(或者更一般的是零贝塔系数资产的收益率)以及承受风险的投资者所要求的报酬？在 CAPM 模型中无风险利率或零贝塔系数资产的收益以及承受风险的投资者所要求的报酬都是外生的参数，模型对它们的来源不会作任何说明。在 APT 模型中单个市场风险的价格由风险价格因子向量所代替，然而风险价格是在模型之外确定的。在本章中我们将看到跨期模型能够产生决定这些参数的预见和想法。

第二，讨论了在资产收益中与可预测变动有关的问题。我们知道无风险实际利率随时间移动，在第 7 章中我们提出了股票收益的预测也随时间移动。因为超额股票收益与可预测的实际股票收益一样，所以我们认为承受股票市场风险所应得到的报酬随时间变化。这些现象与市场有效性一致吗？是否可能用第 7 章中所描述的方法来构造风险资产的均衡收益随时间变化是理性的，并且最大化投资者效用的模型？我们将运用跨期均衡模型来讨论研究这些问题。

第 8.1 节从阐述存在一个随机折现因子满足任何资产收益与该随机折现因子的期望乘积等于 1 的命题开始。这个命题非常一般地认为模型应当排除金融市场中的套利机会，使得最优化投资者目标的跨期均衡模型把随机折现因子和投资者消费的边际效用之间的关系紧密连接起来了。于是，通过研究随机折现因子，我们就可以讨论资产价格与投

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

资者偏好的关系。

在第 8.1 节中我们说明了资产价格行为是如何被用来获得有关随机折现因子一些结论的。在资产收益集合给定的前提下，我们还特别描述了汉森和雅格纳詹(Hansen and Jagannathan，1991)给出的计算随机折现因子易变性下界的过程。通过运用从 1889 年到 1994 年美国短期利率和股票收益的长期年度数据，我们估计出每年随机折现因子的标准差为 30%或者更多。

消费导向的资产定价模型把所有投资者当作单一的代理人，并假定其从总消费中得到效用。在这些模型中随机折现因子就是跨期边际替代率，也就是对代理人来说连续两个时期边际效用的折现率。在代理人最优的消费和组合的一阶条件下，欧拉方程(Eular equations)可用来连接资产收益和消费之间的关系。

第 8.2 节讨论了普遍使用的代理人具有时间可分离的幂效用消费导向模型。在这个模型中单个参数限制了风险厌恶和跨期替代弹性，即相对于投资机会来讲代理人调整计划消费的意愿。事实上，跨期替代弹性是风险厌恶的倒数，所以在这个模型中厌恶风险的投资者面对利率的改变一定不愿意调整自己的消费增长率。该模型用资产与总消费增长的协方差乘以代理人的风险厌恶系数来解释关于资产的风险溢酬。

使用美国长期年度数据，我们强调四类事实。第一，美国股票对短期负债的平均超额收益，或者说权益溢酬，大约是每年 6%。第二，总消费非常平坦，于是资产收益与消费增长的协方差很小。把这些因素结合起来，当相对风险厌恶系数非常大时，幂效用模型仅仅适合权益溢酬。这就是麦布雷和普雷斯科特(Mehra and Prescott，1985)年提出的所谓权益溢酬的困惑。第三，短期实际利率中存在一些可预测的移动，但是在消费增长中几乎没有可预测的移动事实。这就说明期间替代弹性是很小的，也再次表明在幂效用模型中相对风险厌恶系数是很大的。最后，在股票对短期负债的超额收益中我们发现存在可预测的变动，但它与改变股票收益与消费增长的协方差似乎没有关系。这就导致规范的统计检验拒绝幂效用模型。

在第 8.3 节和第 8.4 节中为拟合这些事实我们把一些手段和方法用在可被修正的基本模型中。在第 8.3 节中我们讨论诸如交易成本，投资者租借或出售短缺资产能力的限制，投资者资产需求中的外生变动以及投资者不能保证的收入风险等市场摩擦。我们考虑了许多似乎有理的摩擦，如把总消费作为股票市场投资者消费的一个不适当的替代量，并讨论了当消费没有被度量时获得关于资产价格可检验的方式。我们还要讨论打破风险厌恶与期间替代弹性之间紧密联系的幂效用的一般化问题。

在第 8.4 节中我们探讨投资者具有比一般化幂效用更复杂的偏好的可能性。例如，代理人的效用函数在消费和诸如闲暇等其他消费品之间不可分离。我们重点强调随时间不可分离的效用模型，因为投资者获得的效用来自与时间变动的习惯或与生存水平有关的消费水平。最后，我们考虑一些非正规模型，以便从来自于实验的和心理的研究中得到

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

启示。

8.1 随机折现因子

我们以最简单可能的方式展开随机折现因子的分析。考虑投资者可以用资产 i 自由地进行交易并使时间可分离的效用函数期望最大化的跨期选择问题，即：

$$\mathrm{Max}\,\mathrm{E}_t\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\delta^j U(C_{t+j})\Big] \tag{8.1.1}$$

这里，δ 是时间折现因子，C_{t+j} 是期间 $t+j$ 投资者的消费，$U(C_{t+j})$ 是在 $t+j$ 上的跨期消费效用。描述投资者最优的消费和投资组合计划的一阶条件或欧拉方程之一是：

$$U'(C_t)=\delta\mathrm{E}_t[(1+R_{i,t+1})U'(C_{t+1})] \tag{8.1.2}$$

(8.1.2)式左边表示在时刻 t 实际消费不足一美元的成本边际效用；等式右边表示投资者从时刻 t 把美元投资在资产 i 上，到时刻 $t+1$ 变卖资产 i 得到 $(1+R_{i,t+1})$ 美元并从提前消费这一事件中得益的期望边际效用。投资者令边际成本等于边际收益，这样(8.1.2)式就描述了最优状态。

如果我们在(8.1.2)式两边同除以 $U'(C_t)$，得到：

$$1=\mathrm{E}_t[(1+R_{i,t+1})M_{t+1}] \tag{8.1.3}$$

这里，$M_{t+1}=\delta U'(C_{t+1})/U'(C_t)$。(8.1.3)式中变量 M_{t+1} 是已知的随机折现因子，或称为定价核。在当前的模型中它等价于边际效用 $\delta U'(C_{t+1})/U'(C_t)$ 的折现率，有时它也被称为跨期边际替代率。注意跨期边际替代率，也就是随机折现因子，由于边际效用是正的，所以它也总是正的。

(8.1.3)式的期望是在时刻 t 关于可得到的信息的条件期望，我们再对其左右两边取条件期望，同时为简化概念与形式把时间滞后一期，这样就得到了(8.1.3)式的无条件形式：

$$1=\mathrm{E}[(1+R_{it})M_t] \tag{8.1.4}$$

这些关系式在重新排列后，我们可以清楚地看到它们决定着资产的期望收益。为方便起见，我们用无条件的形式，根据 $\mathrm{E}[(1+R_{it})M_t]=\mathrm{E}[1+R_{it}]\mathrm{E}[M_t]+\mathrm{Cov}[R_{it},M_t]$，就有：

$$\mathrm{E}[1+R_{it}]=\frac{1}{\mathrm{E}[M_t]}(1-\mathrm{Cov}[R_{it},M_t]) \tag{8.1.5}$$

如果有一种资产其与随机折现因子的无条件方差是 0，我们就称这种资产为"无条件零贝塔系数资产"。如果(8.1.5)式中的资产是无条件零贝塔系数资产，那就蕴涵着该资产的期望总收益满足：

$$\mathrm{E}[1+R_{0t}]=1/E[M_t]$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

用上式来替代(8.1.5)式中相应的因子，就得到了资产 i 扣除零贝塔收益的超额收益 Z_{it} 的表达式：

$$\mathrm{E}[Z_{it}]=\mathrm{E}[R_{it}-R_{0t}]=-\mathrm{E}[1+R_{0t}]\mathrm{Cov}[R_{it},M_t] \qquad (8.1.6)$$

这个式子表明，资产的期望收益越大，其与随机折现因子的协方差就越小。这个结果的直观意义就是说，当消费水平低，而投资者边际消费效用高的时候，资产与 M_{t+1} 的协方差就低，并且资产倾向于取得低的收益。这样的资产就是风险资产，因为当财富对投资者来说是最有价值的时候它却不能明确地提供财富。于是，持有它的投资者就需要大的风险溢酬。

虽然通过参考有关投资者跨期选择问题的文献最容易理解(8.1.3)式，但我们仅仅从没有套利，没有假定投资者最大化性质良好的效用函数的条件下也能够获得该方程。[①] 在状态 $s=1,2,\cdots S$ 以及资产 $i=1,2,\cdots N$ 的状态空间中我们证明了这点。定义 q_i 是资产 i 的价格以及 $\mathbf{q}$ 是资产价格的 $(N\times1)$ 维向量，再定义 X_{si} 为资产 i 在状态 s 的得益以及 $\mathbf{X}$ 是各个资产在各种状态下的 $(S\times N)$ 阶得益矩阵。假定所有资产价格是非零的，我们进一步定义 $\mathbf{G}$ 是各个资产在各种状态下的 $(S\times N)$ 阶总收益矩阵，其中 $\mathbf{G}$ 的元素为 $G_{si}=1+R_{si}=X_{si}/q_i$。

现在我们定义具有分量元素为 p_s 的 $(S\times1)$ 维向量 $\mathbf{p}$。如果 $\mathbf{p}$ 满足 $\mathbf{X}'\mathbf{p}=\mathbf{q}$，就称它为状态价格向量。对每个状态来说，资产可以被认为是一串依赖于状态的得益；状态向量的第 s 个元素 p_s 给出了在状态 s 支付 1 美元的价格。我们把每个资产价格表示为依赖于状态的得益与相应状态价格乘积的加总，即 $q_i=\sum_s p_s X_{si}$。如果我们在该式两边同除以 q_i，就可以等价地得到 $1=\sum_s p_s(1+R_{si})$ 或者 $\mathbf{G}'\mathbf{p}=\boldsymbol{\iota}$，这里 $\boldsymbol{\iota}$ 是分量元素都是 1 的 $(S\times1)$ 维向量。

我们注意这样一个重要结论，即存在一个正状态价格向量的充分必要条件是没有套利机会(也就是没有这样的资产或资产组合，今天有非正的成本，明天有非负的得益，并且至少在一个状态上有严格正的得益)。进一步，如果存在正状态价格向量，那么有一些正的随机变量 M 满足(8.1.3)式。为理解这点，我们定义 $M_s=p_s/\pi_s$，这里 π_s 是状态 s 出现的概率。于是，对任何资产 i，关系式 $\mathbf{G}'\mathbf{p}=\boldsymbol{\iota}$ 意味着：

$$1=\sum_{s=1}^{S}p_s(1+R_{si})=\sum_{s=1}^{S}\pi_s M_s(1+R_{si})=\mathrm{E}[(1+R_i)M] \qquad (8.1.7)$$

实际上这是等价于(8.1.3)式的静态离散状态形式。M_s 是状态 s 的状态价格对状态 s 出现的概率的比率。因为价格和概率都是正的，所以 M_s 也是正的。

如果 M_s 小，则从投资者不愿支付高价获取状态 s 的资产的意义上讲状态 s 是“便宜”的。在便宜的状态中提供财富的资产与 M 之间是负相关的。这样的资产自身便宜却具

---

① 关于方程(8.1.3)的理论在因格索尔(Ingersoll,1987)写的教科书中有详细讨论。关于条件信息的规则被汉森和理查德(Hansen and Richard,1987)所采用。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

有高的收益，这就是在离散状态结构中(8.1.6)式的直观解释。

在离散状态模型中，对每个状态 s 如果把可得到的资产组合起来，组合资产在状态 S 具有非零得益，而在其他状态具有零得益，则资产市场是完备的。

接下来一个重要性质是状态价格向量是惟一的充分必要条件为资产市场是完备的。注意完备的市场 M 是惟一的，但不完备的市场就会有许多 M 满足方程(8.1.3)。这个结果我们可以这样来理解：在一个经济社会中有许多以效用最大化为目标的投资者，每个投资者都有一阶条件(8.1.2)式。于是，每个投资者的边际效用可以用来构造确定资产价格的随机折现因子。在完备的市场条件下，投资者的边际效用是完全相关的，这样所有投资者就产生相同并且惟一的随机折现因子；在不完备的市场条件下，边际效用会有特殊的变动，于是满足(8.1.3)式的随机折现因子就有多个。

8.1.1 变易性边界

也许任何期望资产收益模型可以被看成一个随机折现因子模型。前面我们讨论检验特殊模型的方法时，比较一般地问过什么资产收益数据可能告诉我们有关随机折现因子的行为。汉森和雅格纳詹(Hansen and Jagannathan，1991)就给出了与给定资产收益数据集一致的随机折现因子变易性的下界。他们的工作用向量的形式从无条件方程(8.1.4)开始：

$$\boldsymbol{\iota}=\mathrm{E}[(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)M_t] \tag{8.1.8}$$

这里，ι 是分量元素都是 1 的 N 维向量；R_t 是时刻 t 资产收益的 N 维向量，其基本元素为 R_{it}。

汉森和雅格纳詹假设，R_t 具有非奇异的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$。换句话说，就是没有资产或资产的组合是无条件地无风险。不过，也许还存在一种总平均收益等于无条件随机折现因子均值倒数的资产。但是，汉森和雅格纳詹假设如果存在这种资产的话，它的性质是事先不知道的。于是，他们把无条件的随机折现因子均值作为未知参数 $\overline{M}$。对每个可能的 $\overline{M}$，汉森和雅格纳詹构造一个后选的随机折现因子 $M_t^*(\overline{M})$ 作为资产收益的线性组合。他们证明，$M_t^*(\overline{M})$ 的方差比任何均值为 $\overline{M}$ 且满足(8.1.8)式的随机折现因子的方差有更低的下界。

汉森和雅格纳詹首先证明了资产定价理论是怎样决定下面的系数 β_M：

$$M_t^*(\overline{M})=\overline{M}+(\mathbf{R}_t-\mathrm{E}[\mathbf{R}_t])'\beta_M \tag{8.1.9}$$

如果 $M_t^*(\overline{M})$ 要成为一个随机折现因子，它必须满足(8.1.8)式，即：

$$\boldsymbol{\iota}=\mathrm{E}[(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)M_t^*(\overline{M})]$$

展开乘积的期望 $\mathrm{E}[(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)M_t^*(\overline{M})]$，我们有：

$$\boldsymbol{\iota}=\overline{M}\mathrm{E}[(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)]+\mathrm{Cov}[\mathbf{R}_t,M_t^*(\overline{M})]$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$
\begin{aligned}
&=\overline{M}\mathrm{E}[\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t]+\mathrm{E}[(\mathbf{R}_t-\mathrm{E}[\mathbf{R}_t])(M_t^*(\overline{M})-\overline{M})]\\
&=\overline{M}\mathrm{E}[\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t]+\mathrm{E}[(\mathbf{R}_t-\mathrm{E}[\mathbf{R}_t])(\mathbf{R}_t-\mathrm{E}[\mathbf{R}_t])'\beta_M]\\
&=\overline{M}\mathrm{E}[\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t]+\boldsymbol{\Omega}\beta_M
\end{aligned}
\tag{8.1.10}
$$

这里，$\boldsymbol{\Omega}$ 是资产收益的无条件方差—协方差矩阵。从而得到下式：

$$\boldsymbol{\beta}_M=\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\iota}-\overline{M}\mathrm{E}[\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t]) \tag{8.1.11}$$

后选的随机折现因子 $M_t^*(\overline{M})$ 的方差是：

$$\mathrm{Var}[M_t^*(\overline{M})]=\boldsymbol{\beta}'_M\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\beta}_M=(\boldsymbol{\iota}-\overline{M}\mathrm{E}[\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t])'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\iota}-\overline{M}\mathrm{E}[\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t]) \tag{8.1.12}$$

(8.1.12)式的右边是任何均值为 $\overline{M}$ 的随机折现因子的易变性的下界。为理解这点，注意对任何其他满足(8.1.8)式的 $M_t(\overline{M})$ 一定有性质：

$$\mathrm{E}[(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)(M_t(\overline{M})-M_t^*(\overline{M}))]=\mathrm{Cov}[\mathbf{R}_t,M_t(\overline{M})-M_t^*(\overline{M})]=0 \tag{8.1.13}$$

既然 $M_t^*(\overline{M})$ 恰好是资产收益的线性组合，就有：$\mathrm{Cov}[M_t^*(\overline{M}),M_t(\overline{M})-M_t^*(\overline{M})]=0$，于是，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[M_t(\overline{M})]&=\mathrm{Var}[M_t^*(\overline{M})]+\mathrm{Var}[M_t(\overline{M})-M_t^*(\overline{M})]+\mathrm{Cov}[M_t^*(\overline{M}),M_t(\overline{M})-M_t^*(\overline{M})]\\
&=\mathrm{Var}[M_t^*(\overline{M})]+\mathrm{Var}[M_t(\overline{M})-M_t^*(\overline{M})]\\
&\geqslant\mathrm{Var}[M_t^*(\overline{M})]
\end{aligned}
\tag{8.1.14}
$$

事实上，我们可以跳过这个不等式证明：

$$\mathrm{Var}[M_t(\overline{M})]=\frac{\mathrm{Var}[M_t^*(\overline{M})]}{(\mathrm{Corr}[M_t(\overline{M}),M_t^*(\overline{M})])^2} \tag{8.1.15}$$

所以，如果随机折现因子与资产收益组合 $M_t^*(\overline{M})$ 高度相关，则该随机折现因子只会有接近于下界的方差。

基准组合

通过引入基准组合的想法，我们将用更熟悉的手段重新叙述这些结果。首先，我们讨论含有收益是 $(1/\overline{M})-1$ 的人为无条件无风险资产。回到先前提到的不存在无条件无风险资产的假设；如果这种资产存在，它的收益应当为 $(1/\overline{M})-1$。定义基准组合的收益为：

$$R_{bt}(m)\equiv\frac{M_t^*(\overline{M})}{\mathrm{E}[M_t^*(\overline{M})^2]}-1 \tag{8.1.16}$$

(8.1.16)式表示的收益可以通过构造风险资产组合和人为无风险资产，并使它们的收益满足(8.1.8)式获得。我们可以直接进行检查。习题 8.1 证明了 P_{bt} 具有如下性质：

(P1) R_{bt} 均值—方差是有效的。也就是说，没有别的组合具有更小的方差和相同的组合。

(P2) 任何随机折现因子 $M_t(\overline{M})$ 与 R_{bt} 之间的相关性都要比与别的组合的相关性来得大。正是因为这个原因，有时我们称 R_{bt} 为最大相关性组合[见布雷登、吉邦斯和利曾伯格(Breeden, Gibbons and Litzenberger, 1989)的文献]。

(P3) 基准组合的所有资产收益服从一个贝塔定价关系，即：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$E\left[R_{it}-\left(\frac{1}{\overline{M}}-1\right)\right]=\beta_{ib}\left(E[R_{bt}]-\left(\frac{1}{\overline{M}}-1\right)\right) \tag{8.1.17}$$

这里，$\beta_{ib}\equiv \mathrm{Cov}[R_{it},R_{bt}]/\mathrm{Var}[R_{bt}]$。如果无条件的零贝塔系数资产存在的话，则它可以被替换进入(8.1.17)式得到常规的贝塔定价方程。

后面的性质对从几何上解释汉森和雅格纳詹边界是有用的。参见图 8.1。平面图 8.1a 是我们熟悉的资产收益均值标准差图，其中均值总收益在纵轴上，收益的标准差在横轴上。平面图 8.1b 是我们熟悉的具有旋转轴的随机折现因子图；标准差在纵轴上，而均值在横轴上。这种安排是很自然的，因为在平面图 8.1a 中我们认为，资产的二阶矩决定它们的均值收益；而在平面图 8.1b 中我们外生地变动均值随机折现因子，相应地描绘出随机折现因子标准差的结果。在平面图 8.1a 中可以看到风险资产收益的适用集合。我们把它延长至纵轴上的无风险总收益 $1/\overline{M}$；最小方差集合就是从 $1/\overline{M}$ 到风险资产适用集的正切线以及该正切线关于纵轴的反射线。性质(P1)的含义是基准组合收益在最小方差集合中。因为它与给出比 $1/\overline{M}$ 更低的均值总收益的随机折现因子有正相关关系，所以风险资产收益适用集合图边界的下枝曲线位置较低。

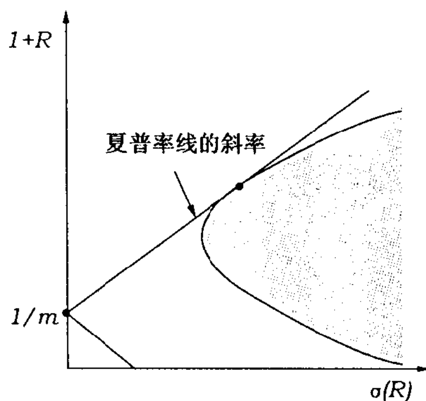


图 8.1a　资产收益的均值—标准差图

我们现在可以陈述下面几个性质：

(**P4**)对基准组合来说，标准差对总收益均值的比满足：

$$\frac{\sigma[R_{bt}]}{E[1+R_{bt}]}=\frac{1/\overline{M}-E[1+R_{bt}]}{\sigma[R_{bt}]} \tag{8.1.18}$$

而该方程的右边恰好是图 8.1a 中正切线的斜率。同第 5 章中的解释一样，这个斜率对资产集合来说就是最大夏普率。

(**P5**)对随机折现因子来说，同样数值的标准差与均值的比率，基准组合总收益有较低的边界，即：

$$\frac{\sigma[1+R_{bt}]}{E[1+R_{bt}]}\leqslant\frac{\sigma[M_t(\overline{M})]}{E[M_t(\overline{M})]} \tag{8.1.19}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

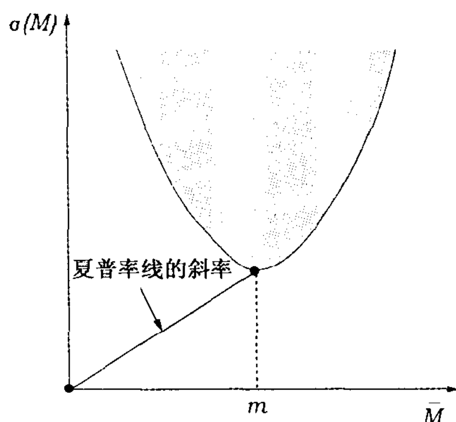


图 8.1b 隐含的随机折现因子标准差—均值图

性质(P4)和(P5)提出了平面图 8.1b 中的随机折现因子必须位于经过原点的射线上方，该射线的斜率等于平面图 8.1a 中的最大夏普率，并通过平行于纵轴的直线 $\overline{M}$。我们变动 $\overline{M}$ 就描绘出平面图 8.1b 中随机折现因子的适用区域。当平面图 8.1a 中的最大夏普率对大量均值随机折现因子来说大了的时候，这个区域位置就较高，并且更受限制。具有最大夏普率的数据集合在 $\overline{M}$ 的广泛的范围内对资产定价理论提出挑战，因为它要求随机折现因子是高度变动的。观察平面图 8.1a 我们不难发现，这样的数据集合将包含均值差异显著，而标准差相近且数值小的组合。一个典型的例子就是美国财政部债券收益集合，虽然它有绝对值不大的不同均值收益，但相对于债券收益的标准差来讲就大了。

上述分析仅仅应用于收益并且如果使用超额收益，计算就比较简单了。我们把资产 i 对于一些参照资产 k(不必是无风险的)的超额收益写成 $Z_{it}=R_{it}-R_{kt}$，把超额收益的向量写成 $\mathbf{Z}_t$，则(8.1.4)式的基本条件变成：

$$0=\mathrm{E}[\mathbf{Z}_t M_t] \tag{8.1.20}$$

同前面一样，我们构造 $M_t^*(\overline{M})=\overline{M}+(\mathbf{Z}_t-\mathrm{E}[\mathbf{Z}_t])'\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_M$，这里，$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ 定义为超额收益。我们发现，$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_M=\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}(-\overline{M}\mathrm{E}[\mathbf{Z}_t])$，这里 $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$ 是超额收益的方差协方差矩阵。随即可得到关于随机折现因子方差较低的边界，即：

$$\mathrm{Var}[M_t^*(\overline{M})]=\overline{M}^2\mathrm{E}[\mathbf{Z}_t]'\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\mathrm{E}[\mathbf{Z}_t] \tag{8.1.21}$$

如果我们仅有单个超额收益 $\mathbf{Z}_t$，则(8.1.21)式的条件就可以简化为：

$$\mathrm{Var}[M_t^*(\overline{M})]=\overline{M}^2(\mathrm{E}[\mathbf{Z}_t])^2/\mathrm{Var}[\mathbf{Z}_t]$$

或者：

$$\frac{\sigma[M_t^*(\overline{M})]}{\overline{M}}=\frac{\mathrm{E}[\mathbf{Z}_t]}{\sigma[\mathbf{Z}_t]} \tag{8.1.22}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

它将在与图 8.1 有相同结构的图 8.2 中说明。现在我们来看图 8.2b 中关于随机折现因子的限制就是它位于过原点的射线上方，并且与图 8.2a 中从原点经过单个风险资产超额收益的射线有相同的斜率。

非负性的涵义

到现在为止我们还没有考虑过 M_t 必须是非负的限制。汉森和雅格纳詹(Hansen and Jagannathan，1991)证明了当无条件风险资产存在时这个限制可以直接容易地处理。在这种情况下，由于 M_t 的均值是已知的，上述问题可以写成寻找一个系数 α，用它定义一个随机变量：

$$M_t^{*+} \equiv ((\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)'\boldsymbol{\alpha})^+ \tag{8.1.23}$$

这里 $X^+ \equiv \max(X,0)$ 是 X 的非负部分，隶属于如下限制：

$$\mathrm{E}[(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)M_t^{*+}] = \mathrm{E}[(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)((\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)'\boldsymbol{\alpha})^+] = \boldsymbol{\iota} \tag{8.1.24}$$

在没有非负性限制的条件下，对存在无条件无风险资产的情形就将产生前面的解。在有非负性限制的条件下，寻找系数向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使它满足(8.1.24)式就很困难；汉森和雅格纳詹(Hansen and Jagannathan，1991)讨论了变换此问题使其更容易求解的方法与对策。他们认为，一旦系数向量被找到，就很容易证明 M_t^{*+} 在所有满足(8.1.8)式的非负随机变量 M_t 中具有最小方差。为理解这一点，考虑任何其他 M_t 并注意：

$$\mathrm{E}[M_tM_t^{*+}] = \mathrm{E}[M_t((\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)'\alpha)^+] \geqslant \boldsymbol{\alpha}'\mathrm{E}[(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)M_t] = \boldsymbol{\alpha}'\mathrm{E}[(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)M_t^{*+}] = \mathrm{E}[(M_t^{*+})^2] \tag{8.1.25}$$

而如果 $\mathrm{E}[M_t, M_t^{*+}] \geqslant \mathrm{E}[(M_t^{*+})^2$，则 $\mathrm{E}[M_t^2] \geqslant \mathrm{E}[(M_t^{*+})^2$。因为这些变量之间的相关不会比 1 更大。

在处理有条件无风险资产的更现实的情况时，上述分析可以推广到一般化情形。我们可以通过增加假设的无风险资产和随资产变动的收益来扩展收益向量。这就要引入汉森和雅格纳詹(Hansen and Jagannathan，1991)讨论过的一些复杂的技术。

先看权益溢酬困惑问题

汉森和雅格纳詹方法可以用来理解墨雷和麦布雷斯科特(Mehra and Prescott，1985)提出的著名的权益溢酬难题[①]。麦布雷和普雷斯科特认为，美国股票市场的平均超额收益，即权益溢酬太高以至于标准的资产定价模型也不容易解释。他们作出这个论点的来龙去脉与参数化的消费导向模型紧密联系，但它可以通过更一般地运用(8.1.22)式中的超额收益限制来获得。在 1889～1994 年整个期间内，标准普耳股票指数关于商业票据的

① 柯克雷恩和汉森(Cochrane and Hansen，1992)根据这个观点提出了权益溢酬难题。科切莱克特(Kocherlakota，1996)查询了大量关于该难题的文献。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

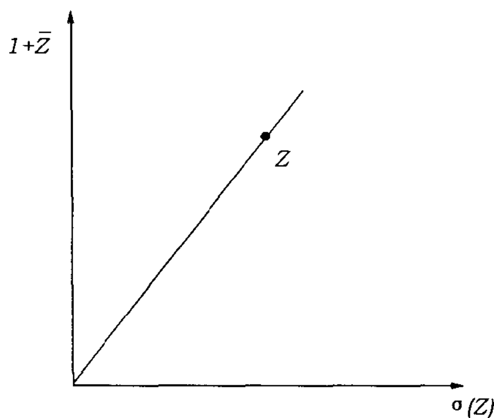


图 8.2a 单个超额资产收益的均值—标准差图

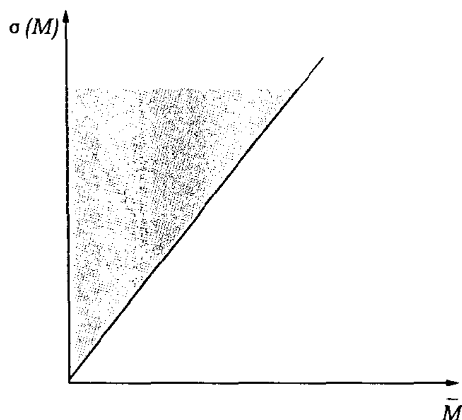


图 8.2b 隐含的随机折现因子标准差—均值图

年度简单收益均值为 6%，标准差为 18%[①]。从而，在图 8.2 中过原点射线的斜率应该是 0.06/0.18＝0.33，这就意味着，如果随机折现因子具有均值 1，它的标准差至少有 33%。我们将在下节中看到，具有风险厌恶系数的标准消费导向模型在常规的范围里就隐含着随机折现因子均值接近于 1，但年度标准差远小于 33%的事实。

---

① 从 1 月到 7 月的六个月的商业票据的收益被用来代替财政部债券收益，因为在这个长样本期的早期部分的财政部债券收益数据无法得到。墨雷和普雷斯科特(Mehra and Prescott，1985)把商业票据和财政部债券的收益率拼接起来，现在使用的商业票据收益率在整个样本期间是一致的。选择短期收益率对结果几乎没有产生差异。表 8.1 给出了一些对数资产收益的样本矩，而这里陈述的是对样本收益。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

按照汉森和雅格纳詹(Hansen and Jagannathan,1991)提出的方法形成的图 8.3,同样说明了权益难题。该图形给出了由方程(8.1.12)和整个 1891～1994 年期间股票和商业票据实际收益的年度数据所隐含的随机折现因子的适用区域。这个图形没有使用前面章节中讨论的非负性限制。结果是,随机折现因子的球最小标准差约为 0.33,其相应的均值大约为 0.98,无条件无风险收益大约为 2%。当均值偏离 0.98 时,标准差的边界迅速增长。图 8.3 中的适用区域与斜率为 0.33 的过原点射线上方的区域的差异是由图 8.3 分别独立使用债券和股票的收益,而不只是股票关于债券的超额收益所引起的。图 8.3 还展示和说明了均值—标准差点所对应的各种风险厌恶程度以及下节讨论的消费导向代理人定价模型类中固定的时间折现率。横轴上方第一个点具有的相对风险厌恶程度为 1,后面的点的相对风险厌恶程度有 2 和 3,等等。这些点不会进入适用区域直到相对风险厌恶程度的数值为 25。

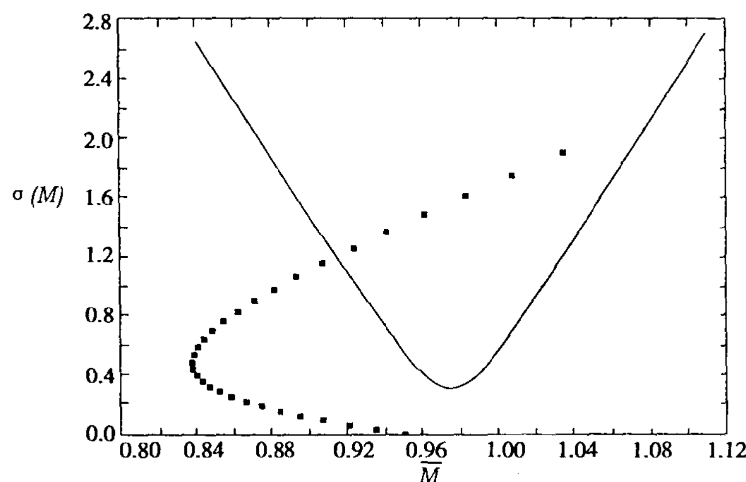


图 8.3 美国 1891 年到 1994 年的年度数据隐含的随机折现因子适用区域

在解释图 8.3 和相似的图形时,我们必须记住,对于随机折现因子的易变性边界和由特殊资产定价模型隐含的点来说,它们都是被估计并且存在误差的。统计方法对检验特殊模型是否满足易变性边界是有用的[见班赛德(Burnside,1994),塞克海提、莱姆和马克(Cecchetti,Lam and Mark,1994)、以及汉森、希顿和拉默特(Hansen, Heaton and Luttmer,1995)给出的例子]。这些方法使用在附录中讨论的汉森提出的广义矩估计方法(Hansen,1982)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

8.2 具有幂效用的消费导向资产定价

在第 8.1 节中我们说明了有关资产收益对随机折现因子的方程(8.1.3)是怎样从单个投资者期间消费和组合选择问题的一阶条件中获得的。为方面起见我们在这里重新叙述该方程：

$$1=\mathrm{E}_t[(1+R_{i,t+1})M_{t+1}] \tag{8.2.1}$$

在实证研究中，假设个体可以被加总成单个典型的投资者是很普遍的做法，于是总消费可以用任何特殊个体的消费来代替。方程(8.2.1)就是人们所知道的消费CAPM，或称为 CCAPM，其中的 $M_{t+1}=\delta U'(C_{t+1})/U'(C_t)$，而 C_t 就是总消费。

在本节当中，我们考察 CCAPM 的实证意义。我们从假设有一个最大化时间可分离幂效用函数的典型代理人开始，于是有：

$$U(C_t)=\frac{C_t^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} \tag{8.2.2}$$

这里，γ 是相对风险厌恶系数。当 γ 接近于 1 时，(8.2.2)式中的效用函数就接近于对数效用函数 $U(C_t)=\log(C_t)$。

幂效用函数具有一些重要的性质。第一，它是规模不变的：具有不变的收益分布，当总财富和经济规模增长时风险溢酬不随时间改变。另一个相关的性质是，如果不同的投资者在经济中具有相同的幂效用函数，并且可以随意交换他们面临的所有风险，那么即使他们有不同的财富，也可以归并成如同个体投资者一样的具有相同效用函数的单个典型的投资者①。这就为在 CCAPM 中使用总消费，而不是个体消费提供了一些正当的理由。

幂效用函数还有一个性质也许是很少有人希望的，即它固定连接了两个重要的概念。当效用具有幂形式，则跨期替代弹性（预期的对数消费增长关于对数利率的导数）φ 就是相对风险厌恶系数 γ 的倒数。哈尔(Hall，1988)认为，这种联系是不适当的，因为跨期替代弹性关注的是投资者在不同的期间转移消费的意愿，即使没有不确定性，它也是定义好的；而相对风险厌恶系数关注的是投资者在世界各个国家转移消费的意愿，即使在一个没有时间维的单期模型中它也是定义好的。在后面的第 8.3.2 节我们将讨论更一般的效用设定。埃普斯坦、津和韦尔(Epstein，Zin and Weil，1991)，在保持幂效用规模不变性质的同时，却打破了相对风险厌恶系数与跨期替代弹性之间的紧密联系。

由(8.2.2)式关于消费求导数，我们发现，边际效用 $U'(C_t)=C_t^{-\gamma}$。用它替代进入(8.2.1)式，我们得到：

① 格罗斯曼和希勒(Grossman and Shiller，1982)证明了在消费和资产价格服从连续时间模型的扩散过程条件下该结论对非交易资产模型（不保证特异风险）的一般化问题。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$1=\mathrm{E}_t\left[(1+R_{i,t+1})\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right] \tag{8.2.3}$$

该结果是由格罗斯曼和希勒(Grossman and Shiller,1981)紧随布里登(Breeden,1979)的连续时间模型后第一个得到的。

实证研究的主要目标是估计相对风险厌恶系数 γ(或者它的倒数 φ)以及检验通过(8.2.3)式所加的限制。如果我们假定资产收益和总消费的联合服从同方差的对数正态分布,这些估计和检验工作是最容易做的。虽然,这些假定含有常数的期望超额对数收益,但却不适合数据的具体特征。所以,建立直观的和易于理解的方法,并把它应用于更现实的模型是很有用的。于是,我们在第 8.2.1 节中作出了那样的假设并在第 8.2.2 节中对该条件加以放松,也就是讨论在没有关于收益和消费的分布假设条件下使用汉森(Hansen,1982)提出的广义矩方法(GMM)检验幂效用模型。我们下面的讨论接近于汉森和辛克莱敦(Hansen and Singleton,1982;1983)的初始创新工作。

8.2.1 对数正态模型中的幂效用

当随机变量 X 服从条件对数正态分布时,它具有在第一章中提到过的一些有用性质。

$$\log\mathrm{E}_t[X]=\mathrm{E}_t[\log X]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}_t[\log X] \tag{8.2.4}$$

这里,$\mathrm{Var}_t[\log X]\equiv\mathrm{E}_t[(\log X-\mathrm{E}_t[\log X])^2]$。加上是 X 条件同方差的,则:

$\mathrm{Var}_t[\log X]=\mathrm{E}_t[(\log X-\mathrm{E}_t[\log X])^2]=\mathrm{Var}[\log X-\mathrm{E}_t[\log X]]$。于是,在资产收益和消费具有联合条件对数正态和同方差的情况下,我们可以对(8.2.3)式取对数,使用小写字母代表对数的常规做法,得到:

$$0=\mathrm{E}_t[r_{i,t+1}]+\log\delta-\gamma\mathrm{E}_t[\Delta c_{t+1}]+\left(\frac{1}{2}\right)[\sigma_i^2+\gamma^2\sigma_c^2-2\gamma\sigma_{ic}] \tag{8.2.5}$$

这里,σ_{xy}代表新变量的无条件协方差,即:

$$\sigma_{xy}=\mathrm{Cov}[x_{t+1}-\mathrm{E}_t[x_{t+1}],y_{t+1}-\mathrm{E}_t[y_{t+1}]],\text{以及 }\sigma_x^2\equiv\sigma_{xx}$$

由汉森和辛克莱敦(Hansen and Singleton,1983)首次得到的方程(8.2.5)具有应用时间序列和截面数据的含义。在时间序列中,无风险实际利率服从:

$$r_{f,t+1}=-\log\delta-\frac{\gamma^2\sigma_c^2}{2}+\gamma\mathrm{E}_t[\Delta c_{t+1}] \tag{8.2.6}$$

无风险实际利率关于期望消费增长是线性的,且斜率系数等于相对风险厌恶系数。方程(8.2.6)逆过来可以把期望消费增长表示成斜率为 $\psi=1/\gamma$ 的无风险实际利率的线性函数。事实上期望消费增长与无风险实际利率之间的这种关系就是跨期替代弹性。

同方差的假设使得任何资产关于无风险实际利率的对数风险溢酬为常数,这样实际期望收益关于其他资产也是线性的,并且期望消费增长项的斜率系数为 γ。于是有:

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\mathrm{E}_t[r_{i,t+1}-r_{f,t+1}]+\frac{\sigma_i^2}{2}=\gamma\sigma_{ic} \tag{8.2.7}$$

(8.2.7)式左边方差项是杰森(Jensen)不等式的调整,它来自于我们对当前期望对数收益所描述的事实。我们可以按总收益的对数期望比率重写(8.2.7)式,从中消除对这一调整的需要,即:

$$\log\mathrm{E}_t[(1+R_{i,t-1})/(1+R_{f,t+1})]=\gamma\sigma_{ic}$$

方程(8.2.7)证明了风险溢酬由相对风险厌恶系数乘以消费增长的协方差决定。当然,针对该模型隐含的风险溢酬是常数的结论,我们已经给出了事实。不过,我们发掘这个模型并在更一般的模型中使用计量经济技术的目的是把它作为推广直观理解的一种有用方式。

再看权益溢酬困惑

方程(8.2.7)澄清了穆拉和普雷斯科特(Mehra and Prescott,1985)关于权益溢酬太高以至于无法与消费行为一致,除非投资者对风险极其厌恶这一论点。麦布雷和普雷斯科特的分析是复杂的,他们没有使用观测到的股票收益,却用与事实不符的股票红利等于消费的假设计算隐含的股票收益,并得出上述结论。本章最后附的习题 8.2 实施了这种计算的对数线性方法。

我们可以通过直接考察股票和商业票据的对数实际收益以及表 8.1 中给出的消费增长来评价权益溢酬难题。从 1889～1994 年整个期间每年测得的资产收益来看,股票关于商业票据的均值超额对数收益是 4.2%,相应的标准差是 17.7%;如果使用对数正态随机变量的均值公式,就蕴涵了前面说过的均值超额简单收益为 6%。

同常规文献中一样,表 8.1 中消费度量用的是耐用消费品和服务的消费[①]。超额对数股票收益与对数消费增长的协方差等于它们之间的相关系数乘以对数股票收益的标准差,再乘以对数消费增长的标准差。由于耐用消费品和服务的消费是一个平滑序列,所以对数消费增长仅仅具有 3.3%这样小的标准差;尽管超额股票收益与对数股票增长的相关系数大约为 0.5,但它们的协方差只有 0.003。把表 8.1 中的矩替换进入(8.2.7)式显示风险厌恶系数达到 19,适合权益溢酬的要求[②]。这个值远大于 10,是麦布雷和普雷斯科特认为似乎为真的最大值。

值得注意的是,隐含的风险厌恶系数对用于消费的时间选择习惯是敏感的。当资产价格在每期期末度量时,消费则作为一个流量在期间度量。把资产收益与消费增长联系

---

① 这里隐含地假设一种消费形式到另一种消费形式的效用是可以分离的。在第 8.4 节我们将讨论这种假设被放宽的方法。

② 表 8.1 报告的资产收益与消费增长的矩依据的是方程(8.2.7),它要求的是这些序列中新变量的矩。然而,在收益与消费增长的条件期望中变动似乎很小,以至于新变量的矩与原始序列的矩相似。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

起来，我们可以假设度量的消费代表期初消费或期末消费。前一个假设会使人们把某一期的收益同下期消费与本期消费的比率联系起来，而后一个假设会使人们把某一期的收益同本期消费与下期消费的比率联系起来。我们这里用的前一个假设给出的资产收益与消费增长的相关系数非常高，于是就比后一个假设有更低的风险厌恶系数①。

表 8.1　　消费增长与资产收益的矩

变量	均值	标准差	与消费增长的相关系数	与消费增长的协方差
消费增长	0.017 2	0.032 8	1.000 0	0.001 1
股票收益	0.060 1	0.167 4	0.490 2	0.002 7
商业票据收益	0.018 3	0.054 4	−0.115 7	−0.000 2
股票—商业票据收益	0.041 8	0.177 4	0.497 9	0.002 9

说明：消费增长就是耐用消费品和服务实际消费的对数变化。股票收益是自 1926 年起标准普尔 500 指数实际收益的对数，1926 年前关于可比较指数的收益由格罗斯曼和希勒（Grossman and Shiller, 1981）给出。商业票据收益是从 1 月到 7 月的 6 个月商业票据的实际收益。所有数据都是年度的，从 1889～1994 年。

这些计算可以与汉森和雅格纳詹（Hansen and Jagannthan，1991）用如下方式所做的工作联系起来。在幂效用的代理人模型中，随机折现因子 $M_{t+1}=\delta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}$，相应对数随机折现因子 $m_{t+1}=\log(\delta)-\gamma\Delta c_{t+1}$。当 M_{t+1} 接近于 1 并且不太有变动时，我们可以作近似 $m_{t+1}\approx M_{t+1}-1$，此时我们有 $\mathrm{Var}[M_{t+1}]\approx\mathrm{Var}[m_{t+1}]=\gamma^2\mathrm{Var}[\Delta c_{t+1}]$。等价地有随机折现因子的标准差一定近似于相对风险系数乘以消费增长的标准差。使用汉森和雅格纳詹方法我们发现，随机折现因子的标准差至少必须在 0.33 才能适合我们的年度股票市场数据。由于消费增长的标准差为 0.033，所以就意味着风险厌恶系数至少为 0.33/0.033=10。而这么低的风险厌恶系数只有当股票收益与消费完全相关时才与数据一致。如果我们使用大约 0.5 的实际经验相关系数，就可以用在方程(8.1.15)中牢固的易变性边界使所要求的随机折现因子标准差翻倍，使风险厌恶系数翻倍至大约 20。

无风险率的困惑

我们从相对风险系数 γ 取较大的数值的角度考虑并回答权益溢酬难题。坎德尔和斯坦博（Kandel and Stambaugh，1991）已经有这样的主张了②。于是，就导致了第二个难题。

① 格劳斯斯曼、梅利诺和希勒（Grossman，Melino and Shiller，1987）通过假设基本连续时间模型更仔细地处理了这个问题，得到了它对时间平均的数据的涵义。

② 人们也许认为排除很大数值 γ 的补救是充分的。然而，坎德尔和斯坦博（Kandel and Stambaugh，1991）指出这种补救会产生很不相同的依赖于所考虑博弈规模的风险厌恶估计。他们认为这种补救可能会误导，或许要求更一般的效用模型。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

方程(8.2.5)指出了无条件均值无风险利率为：

$$E[r_{ft}]=-\log\delta+\gamma g-\frac{\gamma^2\sigma_c^2}{2} \tag{8.2.8}$$

这里，g 是消费的均值增长率。从(8.2.8)式我们看到平均无风险利率有三个因素决定。第一，如果时间偏好率($-\log\delta$)高，则平均无风险利率就高；第二，如果平均消费增长率 g 高，则平均无风险利率也高，于是代理人就会被刺激试图用租借来减小今天和未来消费的差异。这一作用的强度与消费中的跨期替代弹性成反比；由于在幂效用模型中，风险厌恶等于跨期替代的倒数，所以这一作用的强度直接与消费中的跨期替代弹性 γ 成比例。最后，如果消费增长的方差高，平均无风险利率就低，从而代理人就有储蓄的预防动机。预防性储蓄作用的强度与风险厌恶系数的平方 γ^2 成比例。

表 8.1 中给出了历史的平均短期实际利率为 1.8%，历史的平均消费增长率为 1.8% 以及历史的消费增长平均标准差为 3.3%，数值为 19 的 γ 隐含了数值为 1.12 折现因子 δ；由于折现因子大于 1，所以相应的时间偏好是一个负比率。韦尔(Weil，1989)称此为无风险率困惑。从直观上看此困惑就是如果投资者极端厌恶风险(γ 很大)，则在幂效用的条件下他们也一定极其不愿意跨期替代(很小)。假定投资者具有正的平均消费增长、低的无风险利率和正的时间偏好，那么将有很强的向未来租借的意愿。只有当投资者具有低的时间偏好和愿意减少租借时，低的无风险利率才可能处于均衡。

当然，这些计算依赖于表 8.1 中给出的精确矩。在一些数据集中，需要较大的相对风险厌恶系数来拟合权益溢酬。例如，坎德尔和斯坦博(Kandel and Stambaugh，1991)考虑了相对风险厌恶系数为 29 的情况。在这样大的风险厌恶系数下，方程(8.2.8)中预防性储蓄项 $-\gamma^2\sigma_c^2/2$ 减少了均衡无风险利率，这样坎德尔和斯坦博就不需要用负的时间偏好率来拟合无风险利率。该作用的视觉印象在图 8.3 中已经给出，它说明了当 γ 增加而 δ 固定时，均值随机折现因子先衰减再增加。由于无风险利率是随机折现因子的倒数，这就意味着无风险利率随 γ 先增加再衰减。无风险利率的行为对具有高 γ 值的模型总是个问题，因为利率对参数 g 和 σ^2 极其敏感，我们把达到利率的合理数值仅作为当 g 和 σ^2 的作用几乎完全精确地相互抵消的情形。

权益溢酬困惑是一个稳健现象吗

对权益溢酬困惑的另一个回答是关于美国股票收益数据集的人为因素的争论。尽管对风险厌恶的估计我们还不能报告其标准误差，但塞克海提、莱姆和马克(Cecchetti，Lam and Mark，1994)以及科切莱克特(Kocherlakota，1996)等人细心的实证研究证明，在使用标准统计方法的条件下这些数据可以拒绝风险厌恶系数低于 10。然而，这些检验的合理性仍旧依赖于他们所使用的数据集的特征。

里兹(Rietz，1988)已经讨论了在这些数据中可能存在比索问题。当一个重要的事件

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

只有小的正概率就会产生比索问题，投资者在确定市场价格的时候都要考虑这个概率。如果在特定的样本期间该事件没有发生，那么在样本中的投资者也许会出现非理性。也许仅从 100 年的数据中似乎很难相信这是一个重要的问题，但里兹(Rietz,1988)认为摧毁几乎所有股票市场价值的经济灾难未必可能，但其对股票价格会有重要的抑制作用。

布朗、戈兹曼和罗斯(Brown,Goetzmann and Ross,1995)也得出了相近的观点。这些金融经济学家明确地把重点集中在美国股票市场，原因就是，美国股票市场已经由初期发展成为世界最大的市场。而像俄罗斯等其他的一些市场，在过去的 100 年间投资者为自己的财富吃尽了苦头，所以没有连续的市场价格的记录；还有像阿根廷这样的市场，由于现在收益非常之低而被认为是相对不重要的新市场。如果这种残存性的作用是重要的话，美国股票平均收益的估计是偏高的。

虽然这些观点有些合理，但对权益溢酬困惑来说，它们未必能完全解释它。里兹(Rietz,1988)论点的难点在于它不仅要求一个经济灾难，而且还要求该经济灾难对股票市场投资者的影响比对短期负债市场投资者的影响更严重。俄罗斯的例子说明由很低的债权投资收益引起的灾难与由权益投资引起的是一样的，其中比索问题影响收益平均水平的估计而不是权益溢酬的估计。不仅来自过去 100 年美国数据的权益溢酬令人惊奇地大，西格尔(Siegel,1994)用来自 19 世纪早期的美国数据和坎贝尔(Campbell,1996b)用来自其他国家的数据也得出同样的结论。

期望资产收益和消费增长中的时变性问题

方程(8.2.5)给出了资产收益的理性预期与消费增长的理性预期之间的关系。它说明期望资产收益与期望消费增长完全相关，并且期望资产收益的标准差是期望消费增长的标准差的 γ 倍。等价地就有期望消费增长的标准差是期望资产收益的标准差是期望消费增长的标准差的 $\psi=1/\gamma$ 倍。

这就提出了估计 ψ 和 γ 的另一种方式。汉森和辛格尔顿(Hansen and Sigleton,1983)，随后豪尔(Hall,1988)等就建议用工具变量(IV)回归作为逼近这个问题的一种方式。如果我们定义误差项：

$$\eta_{i,t+1}\equiv r_{i,t+1}-\mathrm{E}_t[r_{i,t+1}]-\gamma(\Delta c_{t+1}-\mathrm{E}_t[\Delta c_{t+1}])$$

则我们可以把方程(8.2.5)重写成一个回归方程：

$$r_{i,t+1}=\mu_i+\gamma\Delta c_{t+1}+\eta_{i,t+1} \tag{8.2.9}$$

一般情况下误差项 $\eta_{i,t+1}$ 将与实现了的消费增长相关。于是，OLS 就不是一个合理的估计方法。而 $\eta_{i,t+1}$ 与时刻 t 信息集上的任何变量却是无关的。这样，任何与资产收益相关的滞商业票据收益率、实际消费增长率以及对数红利价格比可以作为工具回归中的工具变量来估计相对风险厌恶系数 γ。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 8.2 对收益和消费增长的工具变量回归

(8.2.9) $r_{i,t+1}=\mu_i+\gamma\Delta c_{t+1}+\eta_{i,t+1}$

(8.2.10) $\Delta c_{t+1}=\tau_i+\psi r_{i,t+1}+\zeta_{i,t+1}$

收益	第一阶段回归		$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}$	检验	检验
(工具变量)	r	Δc	(s.e.)	(s.e.)	(8.2.9)	(8.2.10)
商业票据	0.275	0.034	−1.984	−0.088	0.106	0.028
(1)	(0.000)	(0.485)	(1.318)	(0.113)	(0.004)	(0.234)
股票指数	0.080	0.034	−6.635	−0.100	0.008	0.007
(1)	(0.071)	(0.485)	(5.428)	(0.091)	(0.673)	(0.705)
商业票据	0.297	0.102	−0.953	−0.118	0.221	0.091
(1 和 2)	(0.000)	(0.145)	(0.567)	(0.109)	(0.000)	(0.096)
股票指数	0.110	0.102	−0.235	−0.008	0.105	0.097
(1 和 2)	(0.105)	(0.145)	(1.650)	(0.059)	(0.056)	(0.075)

注：对数实际消费增长率和资产收益用 1889～1994 年美国的年度数据度量。标头是“第一阶段回归”的列，报告了收益和消费增长关于工具变量的回归中解释变量的 R^2 统计量和联合显著性水平。标头是“$\hat{\gamma}$ 和 $\hat{\sigma}$ 的列分别报告了参数 γ 和 σ 在(8.2.9)式和(8.2.10)式中的二阶段最小二乘工具变量估计。标头是“检验(8.2.9)式”和“检验(8.2.10)式”的列报告了(8.2.9)式和(8.2.10)式中关于工具变量的工具回归残差的回归的 R^2 统计量和联合显著性水平。工具变量或者包括实际商业票据收益率，实际消费增长率以及对数红利价格比的一阶滞后(在行中标明 1)，或者包括相应的一阶和二阶(在行中标明 1 和 2)滞后。

表 8.2 说明了(8.2.9)式的二阶段最小二乘估计。在这个表中资产收益是来自表 8.1 中的实际商业票据收益率和实际股票收益率，消费增长是实际非耐用品及服务消费的年度增长率。工具变量是实际商业票据收益率，实际消费增长率以及对数红利价格比的一阶，或者一阶和二阶滞后。

对每个资产和工具变量的集合，表 8.2 首先报告了资产收益和消费增长率关于工具变量的第一阶段回归的 R^2 统计量和联合显著性水平。然后展示了参数 γ 的工具变量估计及相应的标准差，并在标头为“检验(8.2.9)式”的列展示了关于工具变量残差的回归的 R^2 统计量，同时给出了该模型过度识别限制的有关显著性水平。关于该检验在附录的 A.1 节中有讨论。

表 8.2 显示了实际商业票据收益率可预测的很强的事实，但只显示了实际股票收益

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

可预测的较弱的事实。几乎没有事实说明消费增长是可预测的①。参数 γ 的工具变量估计是负的而不是正的有基本经济理论的说明，但值得注意的是它并不是显著地不同于 0。当商业票据收益率被用来作为资产收益时，模型的过度识别限制被强烈地拒绝。

(8.2.9)式中工具变量估计的问题是由于在该数据集合中消费增长难以预测，所以工具变量仅仅与回归变量之间存在很弱的相关性。纳尔逊和斯格茨(Nelson and Startz, 1990)已经证明，在这种情形下渐近理论对有限样本的统计推断有很差的导向作用；系数的渐近标准差趋于很小以及当模型的过度识别是真实的也可能被拒绝。围绕这个问题，我们可以把(8.2.9)式的回归逆过来并进行估计：

$$\Delta c_{t+1}=\tau_i+\psi r_{i,t+1}+\zeta_{i,t+1} \tag{8.2.10}$$

如果正交条件成立，则如同我们已经讨论过的(8.2.10)式中的 ψ 的估计将渐近地为(8.2.9)式中参数 γ 估计的倒数。在有限样本中，如果参数 γ 的估计大而参数 ψ 的估计小，则我们认为(8.2.10)式的工具变量估计将比(8.2.9)式中的工具变量估计来得好。

在表 8.2 中，参数 ψ 与参数 γ 一样，其估计值是负的，但就是小以至于不是显著地区别于 0。当使用的工具变量为一阶滞后时，模型的过度识别限制[见表 8.2 中“检验(8.2.10)”]没有被拒绝；而当使用的工具变量为二阶滞后且检验水平为 10%时，模型的过度识别限制就被拒绝。表 8.2 还显示来自工具回归的残差只勉强地比消费增长少一点可预测性。这些结果对消费模型来说尤其不受鼓舞，但却对投资者具有很高的 γ(用以解释权益溢酬困惑)以及相应低的 ψ(针对可预测的资产收益解释消费增长的不可预测性)的幂效用模型没有提供强的事实。

8.2.2 幂效用和广义矩方法

到现在为止我们研究了限制性对数线性设定以及分别讨论了截面数据和时间序列数据。1982 年汉森(Hansen, 1980)提出了广义矩方法，并于当年与辛克莱敦把 GMM 方法应用到消费 CAPM 中。GMM 方法允许人们估计和检验幂效用模型时既不要对分布作假设，也不要考虑数据的结构。附录 A.2 节中归纳了 GMM 方法，并解释了它与线性工具变量的关系。

当用 GMM 方法估计具有幂效用的消费 CAPM 时，如果使用的资产收益和工具变量与表 8.2 相同，并且假设误差项为白噪声，那么只要股票和商业票据一起包括在系统中时，模型过度识别的约束就被强烈地拒绝。表 8.2 中模型的弱事实就变成强事实。这种

① 战后的季度数据对在消费增长中的变动有较强的可预测性。坎贝尔和曼昆(Campbell and Mankiw, 1990)证明这种变动与收入增长的可预测性有关。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

情况的发生是因为股票对商业票据的超额收益中存在可预测的变动[①]。这样的可预测变动在(8.2.5)式的对数线性同方差模型中自然被排除在外，因为它们主要由异方差模型来解释。在这些异方差模型中，资产收益的条件协方差与消费及预测变量是相关的[②]。GMM系统允许这种可能性存在，并且无需对模型线性化或增加分布假设，所以GMM的拒绝对具有幂效用的标准消费CAPM是有力的事实。

面对这种事实，经济学家已经开拓了两个主要研究方向。第一种可能性是市场摩擦使标准消费CAPM模型无效。所度量并用于检验模型的收益对投资者来讲事实上无效，因为投资者还要面对交易成本和租借及短期出售资产能力的限制。市场摩擦还使得总消费不适当地作为股票市场投资者消费的代理量。第二种可能性是投资者要比简单的幂设定具有更复杂的偏好。我们将在下两节中讨论这些可能性。

8.3 市场摩擦

现在我们考虑对资产定价不太恰当的市场摩擦问题。如果投资者面对交易成本，或面对限制他们租借或短期出售资产的能力，那么他们会利用有限的能力来开发收益中的经验模式。在第8.3.1节我们将说明怎样才能改变随机折现因子易变性的汉森和雅格纳詹(Hansen and Jagannathan，1991)的基本分析。

相同的摩擦可以使总消费变成股票市场投资者消费的不恰当代理量。在第8.3.2节中我们先讨论有关这个问题的一些实证结果，然后再讨论坎贝尔(Campbell，1993a；1996)发展的代理人资产定价理论，在该理论中坎贝尔认为，代理投资者的消费不必被观测。该理论使用来自于埃普斯坦和津(Epstein and Zin，1989；1991)以及韦尔(Weil，1989)的幂效用一般化形式，并且打破了风险厌恶和期间替代之间的联系。按照该理论得到的是一个对因子的风险价格附加约束的多因子模型，并体现了默顿(Merton，1973)的一些精神和想法。该模型可以用第6章中讨论过的计量经济学方法进行检验。

8.3.1 市场摩擦和雅格纳詹边界

在第8.1.1节中讨论过的汉森和雅格纳詹(Hansen and Jagannathan，1991)提出的

---

① 可以回过去看第7章我们给出的用红利价格比率预测超额股票收益的事实。这里红利价格比率用作工具变量。

② 通过考虑(8.2.5)式中方差是时间函数的线性化模型的异方差性问题我们可以理解这个观点。坎贝尔(Campbell，1989)和哈维(Harvey，1989)应用GMM方法建立了附有资产收益的条件均值是其条件二阶矩线性函数的限制类型的模型。我们将在后面第12章讨论这一工作。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

易变性边界问题，前提是假设投资者在没有交易成本和没有租借或短期出售的限制之下可以用所有资产自由交易。这些假设明显地有些极端，但它们已经被荷和默德斯特（He and Modester，1995）以及拉特默（Luttmer，1994）放松了。为理解这个方法，我们注意如果资产 i 不能被短期出售，那么标准等式限制 $E[(1+R_{it})M_t]=1$ 必须由下述不等式限制来替代：

$$E[(1+R_{it})M_t]\leqslant 1 \tag{8.3.1}$$

如果上述不等式严格成立，那么投资者将愿意卖掉资产以避免短期出售限制要求这么做。否则，投资者就处于资产中的零地位。

短期出售限制可适用于一些资产但并不是所有资产；如果它们适用于所有资产，那么短期出售限制就要被解释为偿付能力限制。偿付能力限制保证投资者今天的投资不会变成明天负的财富。假定对所有风险资产有有限的负债，那么每一种资产明天价值的最小值是零，每一种具有非负权重的资产的组合明天价值的最小值也是零。

投资者也会面临限制他们短期出售资产为今天消费融资能力的租借约束。这种约束对所有资产毛收益来讲形式还是同(8.3.1)式一样，除非投资者短期自由地出售一种资产是为了获得对另一种资产的长期地位，这时对超额资产收益标准等式限制成立。

短期出售限制也可以用于建立与交易成本成比例类的模型，它由不依赖交易规模的标价与应价差异产生。当存在交易成本时，诸如今天买入明天卖出的资产的后交易成本收益是同样的资产今天卖出明天买入的后交易成本收益的非负数倍。这两种收益可以被独立地度量，并且如果它们都从属于短期出售限制的话就会一起被包括在收益的集合里。

存在短期出售限制的条件下，(8.1.8)式的向量等式可由另一个向量等式来取代：

$$\boldsymbol{\theta}=E[(\boldsymbol{\iota}+\mathbf{R}_t)M_t] \tag{8.3.2}$$

这里 $\boldsymbol{\theta}$ 是一个未知向量。该模型蕴涵了关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的各种限制，比如对所有 i 限制$\theta_i\leqslant 1$。从而对每个 $\overline{M}$，通过选择从属于某种限制的 $\boldsymbol{\theta}$ 值来提供 $M_t^*(\overline{M})$ 的最低方差，我们现在就可以找到易变性的边界了。荷与默德斯特（He and Modest，1995）发现对短期出售财政部债券和对设定的资产交易成本附加限制并结合租借限制可以大大地减少随机折现因子的易变性边界。

这种分析极其稳健，因为它在没有要求支持选择 $\boldsymbol{\theta}$ 值的基本均衡下就能选择 θ 使易变性边界达到最小。如果存在大的交易成本，除非收益差超过交易成本，否则即使风险中性的交易者也不愿卖掉手中的资产去买另一种收益较高的资产。但是，如果交易者买收益较高的资产并持有多个时期，或者如果交易者有新的财富要投资而必须支付购买某种资产的成本，等等，这时仅考虑单期的交易成本就不太合适了。荷和默德斯特（He and Modest，1995）以及拉特默（Luttmer，1994）的工作是开拓性的，使人们得到了对由无摩擦市场蕴涵的市场摩擦减缓边界理解观念上的扩展。

还有一些作者也试图搞清由具有交易成本的均衡模型隐含的资产价格问题。但这是

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

一件很困难的事，除非在非常特殊的情形下，否则交易成本使得投资者的决策变得相当难处理[见戴维斯和诺曼(Davis and Norman，1990)的文献]。艾亚格雷和杰特勒(Aiyagari and Gertler，1991)，埃米赫德和蒙德尔森(Amihud and Mendelson，1986)，康斯坦丁尼德斯(Constantinides，1986)，希顿和卢卡斯(Heaton and Lucas，1996)，以及瓦亚诺斯(Vayanos，1995)在这个主题上已经作出了一些进展。

8.3.2 市场摩擦和总消费数据

拒绝标准消费 CAPM 模型也许部分是由于在度量总消费上的困难所造成的。除非具有测量误差的按时点加总消费数据可以得到，否则消费 CAPM 运用按时点度量的真实消费数据是不可能的。威尔考克斯(Wilcox，1992)描述了用以构造消费数据的抽样过程。而在格罗斯曼、梅利诺和希勒(Grossman，Melino and Shiller，1987)以及惠特利(Wheatley，1988)已经分别在允许按时点加总和具有测量误差的情况下检验了模型。粗略地说，这些数据问题可以引起由消费的边际效用$(1+R_{i,t+1})\delta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}$度量的加权资产收益短期可预测而长期却不能的结果。从而，在检验模型时对这样的问题人们就会允许让工具变量的滞后期大于一期[①]。这样做自然弱化了针对消费 CAPM 的实证结果，但是除非使用非常长的滞后，否则在常规显著性水平下模型仍然被拒绝。

更基本的建议指出：即使从长期的角度来讲，用总消费作为股票投资者消费的代理量也是不恰当的。其简单的理由是，在经济社会中有两类代理人，一类是受限制的代理人，他被阻止在资产市场交易；另一类是无限制的代理人，他仅仅简单地消费自己的劳动收入。受限制的代理人的消费与资产价格均衡的确定无关，但却可能占总消费的大部分。坎贝尔和曼昆(Campbell and Mankiw，1990)认为，消费增长中的可预测变动与收入增长中的可预测变动是相关的，他们提出了受限制的代理人的一个重要作用。与此同时，曼昆和泽尔德斯(Mankiw and Zeldes，1991)使用面板数据证明了股东的消费比非股东的消费更易变动以及股东的消费与股票市场之间有着比非股东的消费更高的相关性。

由于上面模型中假设受限制的代理人不拥有或不交易金融资产，所以他们不直接影响资产价格。还有一些文献认为也许有些投资者由于某些外在的或心理的原因而买卖股票。这些“噪声投资者”会影响股票价格，因为其他效用最大化的理性投资者一定会被要求调整适应需求的移动。如果效用最大化投资者是厌恶风险的，只有当股票价格下跌和预期股票收益上升的时候，他们才会从“噪声投资者”手中买他们愿卖的股票。坎贝尔和

① 坎贝尔和曼昆(Campbell and Mankiw，1990)在线性化模型的内容中讨论了这个问题。布里登、吉邦斯和利曾伯格(Breeden，Gibbons and Lizenberger，1989)作出了相近的观点，他们认为，短期人们将用所构造的与长期消费变动高度相关的组合收益代替消费。布赖纳德、纳尔逊和夏皮罗(Brainard，Nelson and Shapiro，1991)发现消费 CAPM 模型长期比短期运行得更好。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

科沃恩(Campbell and Kyle,1993),科特勒和波特巴和萨默斯(Cutler,Poterba and Summers,1991),迪朗等(DeLong etal.,1990a,1990b)和希勒(Shiller,1984)在一些细节上发展了这个模型。这个模型说明理性投资者不持有市场组合,他们只是根据来自“噪声投资者”需求的变动决定进入和退出股票市场;由于一些消费是通过“噪声投资者”说明的,所以他们不消耗总消费。这就使得模型在没有有关不同的市场参与者投资策略的详细信息条件下难以检验。

效用最大化股票市场投资者在重要的投资方式上可能是很有差异的。如果投资者属于用劳动收入冒大风险的,他们可以通过交易诸如股票和政府债券等资产间接地分担这些风险,但他们个人的消费路径也许会比总消费有更大的易变性。即使个体投资者具有相同的幂效用函数,也就是任何个体投资者的消费增长率增加到与幂值等同的合理有效的随机折现因子 γ,但对总消费增长率来说,这个随机折现因子的 γ 值也许就不是合理有效的[①]。根据曼昆(Mankiw,1986)的想法,习题 8.3 在一个简单的二期(two-period)模型中考察了这个作用。

近期的研究已经开始对资产定价考察不完全风险分担的经验相关性了。希顿和卢卡斯(Heaton and Lucas,1996)根据来自动态收入面板分析的宏观数据(PSID)标定了个体收入过程。由于 PSID 数据显示的特殊收入变动是非常短暂的,希顿和卢卡斯发现,投资者通过借入和出租可以使其对消费的影响作用最小化。他们还发现了对资产定价仅有的一些作用,当然这些作用在他们限制借入或假设存在大的交易成本时是不存在的。康斯坦丁尼德斯和达菲(Constantinides and Duffie,1996)创造了特殊冲击对收入具有永久作用的理论模型;他们还证明这类收入风险对资产定价可以有大的作用。

在此事实下,发展实证的可检验的并且不过于依赖总消费数据的跨期资产定价模型看来就很重要了。一种方法是把消费替换出消费 CAPM,得到均值收益与决定消费的基本状态变量方差联系在一起的资产定价模型。这个方法试图赋予为买入和持有总财富组合的投资者应当和必须具有的偏好特征,并且不必假设该投资者也消耗总消费。

不少同样类型的经典资产定价模型是建立在连续的假设之上的,最著名的是考克斯、因格索尔和罗斯(Cox,Ingersoll and Merton,1985)以及默顿(Merton,1973)。但这些模型难以实施实证工作。坎贝尔(Campbell,1993)提出了运用简单的方法得到的易于实证的离散时间模型,该模型的效用设定是由埃普斯坦和津(Epstein and Zin,1989;1991)以及韦尔(Weil,1989)发展创立的。我们现在作一概括。

---

① 这是杰森不等式的一个例子。由于边际效用是非线性的,所以投资者的边际消费效用一般与平均消费的边际效用是不同的。在完备市场中,当一个投资者的个体消费流与另一个投资者的个体消费流完全相关时,这个问题就会消失。格罗斯曼和希勒(Grossman and Shiller,1982)指出,在连续时间模型中个体消费流和资产价格的过程是扩散的话,这个问题也会消失。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

分离风险厌恶和跨期替代

格罗斯曼、津和韦尔根据克雷普斯和波特里斯(Kreps and Porteus,1978)的方法建立和发展了一个更灵活易变的基本幂效用模型。该模型是一个限制性模型,其中它使跨期替代弹性ψ为相对风险厌恶系数γ的倒数。我们还不清楚跨期替代弹性ψ为相对风险厌恶系数γ这两个概念为什么联系得这么紧密。风险厌恶系数描述消费者不愿跨国界替代消费,含有临时性的意义;跨期替代弹性描述消费者跨时间替代消费的意愿,含有决定性的意义。埃普斯坦—津—韦尔(Epstein-Zin-Weil)的模型保留了许多吸引人的幂效用函数的特征,但却打破了参数ψ和γ之间的联系。

埃普斯坦—津—韦尔的目标函数以递归形式定义如下:

$$U_t=\{(1-\delta)C_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}}+\delta(\mathrm{E}_t[U_{t+1}^{1-\gamma}])^{\frac{1}{\theta}}\}^{\frac{\theta}{1-\gamma}} \tag{8.3.3}$$

这里,$\theta\equiv(1-\gamma)/(1-1/\psi)$。当$\theta=1$时(8.3.3)式的递归式就变成线性;从而可以被求解产生我们熟悉的时间可分离幂效用模型。

对代理人的期间预算约束可以写成:

$$W_{t+1}=(1+R_{m,t+1})(W_t-C_t) \tag{8.3.4}$$

这里,W_{t+1}是代理人的财富,$(1+R_{m,t+1})$是关于"所有被投资财富的市场组合"收益。这种预算约束形式对包括人力资本和金融资产的完备市场模型来说是合理的。埃普斯坦和津使用复杂的动态规划变量显示了把(8.3.3)式和(8.3.4)式结合起来的欧拉方程形式:①

$$1=\mathrm{E}_t\left[\left\{\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}\right\}^{\theta}\left\{\frac{1}{(1+R_{m,t+1})}\right\}^{1-\theta}(1+R_{i,t+1})\right] \tag{8.3.5}$$

如果我们假设资产收益与消费是同方差并且联合服从对数正态的话,那么这就蕴涵着无风险实际利率是:

$$r_{f,t+1}=-\log\delta+\frac{\theta-1}{2}\sigma_m^2-\frac{\theta}{2\psi^2}\sigma_c^2+\frac{1}{\psi}\mathrm{E}_t[\Delta c_{t+1}] \tag{8.3.6}$$

包括市场组合在内的风险资产溢酬是:

$$\mathrm{E}_t[r_{i,t+1}]-r_{f,t+1}+\frac{\sigma_i^2}{2}=\theta\frac{\sigma_{ic}}{\psi}+(1-\theta)\sigma_{im} \tag{8.3.7}$$

这就是说,资产i的风险溢酬是资产i与消费增长的协方差(除以跨期替代弹性ψ)和资产i与市场收益的协方差的加权组合,其中权数分别为θ和$(1-\theta)$。于是,埃普斯坦—津—韦尔模型就嵌套在具有幂效用$(\theta=1)$的消费 CAPM 和传统静态的 CAPM$(\theta=0)$之间。

---

① 埃普斯坦和津(Epstein and Zin,1991)的文献中在微分过程给出的中间步骤,如方程(10)到(12)有一些排印错误。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

使用(8.3.7)式并结合观测到的总消费和股票市场收益的数据来估计和检验埃普斯坦—津—韦尔模型是很诱人的。埃普斯坦和津(Epstein and Zin,1991)报告了这类结果。同样的想法,吉尔凡尼尼和韦尔(Giovannini and Weil,1989)用该模型重新解释了曼昆和夏皮罗(Mankiw and Shapiro,1986)的结果。曼昆和夏皮罗发现,对收益的截面模式来讲市场的贝塔系数比消费的贝塔系数更大;这与 θ 的值接近于 0 是一致的。当然,这个过程没有考虑跨期预算约束(8.3.4)式与消费和市场收益相互联系的事实。我们现在来说明这个预算约束可被用来替换资产定价模型中的消费。

把消费替换出模型

坎贝尔(Campbell,1993a)指出,可以把跨期预算约束(8.3.4)式围绕对数消费与财富比率的均值进行对数线性化,并得到:

$$\Delta w_{t+1} \approx r_{m,t+1} + k + \left(1-\frac{1}{\rho}\right)(c_t - w_t) \tag{8.3.8}$$

这里,$\rho \equiv 1-\exp(\overline{c-w})$,$k$ 是常数,不起什么作用。把它与平凡等式 $\Delta w_{t+1} = \Delta c_{t+1} - \Delta(c_{t+1} - w_{t+1})$ 结合起来,我们解前面刚得到的差分方程并取期望,就可以写出预算约束的形式:

$$c_t - w_t = \mathrm{E}_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j (r_{m,t+j} - \Delta c_{t+j})\right] + \frac{\rho k}{1-\rho} \tag{8.3.9}$$

这个方程说明,如果消费与财富的比率高,则代理人必可预期未来或者是高的财富收益或者是低的消费增长率。该方程不要附加任何行为的假设,仅从近似的预算约束就可获得。它直接地类似于第 7 章中对数红利比率的线性化公式。这里,财富可以被看作为以支付消费作为其红利的资产。①

对埃普斯坦—津—韦尔模型及相应的(8.3.6)式和(8.3.7)式,如果现在我们把预算约束(8.3.9)式与对数线性欧拉方程结合起来,可得到消费相对于财富的封闭型解:

$$c_t - w_t = (1-\psi)\mathrm{E}_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{m,t+j}\right] + \frac{\rho(k-\mu_m)}{1-\rho} \tag{8.3.10}$$

这里,μ_m 关于消费增长和市场组合收益的条件方差是常数。而加上 $(1-\psi)$ 乘以关于被投资财富未来收益期望值的折现值,对数消费与财富比率也是一个常数。如果 ψ 小于 1,消费者就不愿跨期替代,高收益的收入作用决定着对财富而言增加今天消费的替代作用。如果 ψ 大于 1,替代作用居主导地位,于是当期望收益上升时,消费与财富比率就下降。从而,(8.3.10)式就由经典的和相对静态的萨缪尔森(Samuelson,1969)的结果扩展到动态的情形。

---

① 坎贝尔(Campbell,1993)以及坎贝尔和库(Campbell and Koo,1996)对具有数值解的最优消费通过比较近似解析解考察了对数线性近似的精度。在一个使用标准化的美国股票市场数据的例子中,倘若投资者的期间替代弹性大约小于 3,这两个是紧靠在一起的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(8.3.10)式蕴涵着消费中的创新是：

$$c_{t+1}-\mathrm{E}_t[c_{t+1}]=r_{m,t+1}-\mathrm{E}_t[r_{m,t+1}]+(1-\psi)\left(\mathrm{E}_{t+1}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{m,t+1+j}\right]-\mathrm{E}_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{m,t+1+j}\right]\right) \tag{8.3.11}$$

无论效用函数的参数是什么，已投资财富的非期望收益关于消费总有一对一的作用，这服从目标函数(8.3.3)式的规模独立性。未来期望收益的增加提高还是降低消费依赖于 ψ 大于还是小于 1。方程(8.3.11)还说明了什么时候市场消费将比收益更平滑。当市场收益是围绕均值上下变动的话，当前收益与未来收益期望的修正值之间存在负相关。如果期间替代弹性 ψ 小于 1，就会减小消费增长的变动性；如果跨期替代弹性 ψ 大于 1，就会扩大消费增长的变动性。

方程(8.3.11)蕴涵了任何资产收益与消费增长的协方差可以按市场收益与未来市场收益修正值的协方差来重写：

$$\mathrm{Cov}_t[r_{i,t+1},\Delta c_{t+1}]\equiv\sigma_{ic}=\sigma_{im}+(1-\psi)\sigma_{ih} \tag{8.3.12}$$

这里，

$$\sigma_{ih}\equiv\mathrm{Cov}_t\left[r_{i,t+1},\mathrm{E}_{t+1}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{m,t+1+j}\right]-\mathrm{E}_t\left[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{m,t+1+j}\right]\right] \tag{8.3.13}$$

σ_{ih} 定义为资产 i 与诸如市场未来收益的修正之类的关于市场未来收益“消息”的协方差。

把(8.3.12)式替代进入(8.3.7)式，并使用以 σ 和 γ 为基本参数的 θ 的定义，我们得到不以消费为参照的截面资产定价公式：

$$\mathrm{E}_t[r_{i,t+1}]-r_{f,t+1}+\frac{\sigma_i^2}{2}=\gamma\sigma_{im}+(\gamma-1)\sigma_{ih} \tag{8.3.14}$$

方程(8.3.14)有一些引人注目的特征。第一，资产无须直接参照其与消费增长之间的协方差，取而代之的是用被投资财富的收益与被投资财富未来收益“消息”的协方差就能定价了。这是一个类似默顿(Merton，1973a)提出的连续时间模型的离散时间形式。在那个连续时间模型中，资产是按其与投资机会集中指数变化所确定的避险组合的协方差来定价的。

第二，进入(8.3.14)式的效用函数的仅有的一个参数是相对风险厌恶系数 γ。一旦消费被替代出模型后，跨期替代弹性 ψ 就不再出现。比较 ψ 在(8.3.7)式消费导向的欧拉方程中所起的重要作用，这是很引人注目的。直观地说，这个结论来自于 ψ 在理论上的两个作用。其一是低的 ψ 值会减小在消费中的预期波动；其二是高的 ψ 值会增加在消费中的预期波动，从而增加为补偿贡献这些波动所要求的风险溢酬。这些补偿作用使得 ψ 从资产导向的定价公式中消失。

第三，(8.3.14)式表述的风险溢酬是两项的加权和，它纯粹是杰森不等式的调整。第一项资产与市场组合的协方差，这一项的权重是相对风险厌恶系数 γ。第二项资产与有

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

关市场未来收益消息的协方差，该项的权重是$(\gamma-1)$。当γ小于1时，资产只有较低的均值收益。当然，如果市场上有关于未来收益的好消息时，这些资产就会有良好的表现。当γ大于1时，这些资产就有较高的均值收益。对上面说明的直观解释就是：这样的资产之所以吸引人，是因为它们能从改善了的投资机会中给人提供利润，但它们不吸引人的地方是降低了消费者对投资机会恶化的避险能力。当$\gamma<1$时前者起主导作用，消费者为持有资产而愿意接受低收益，因为当这些资产最具有价值的时候他们同样可以得到收益；当$\gamma>1$时，后者起主导作用，这时消费者持有这些资产就是为了获取高收益。

在静态CAPM的对数形式中有一些仅用资产与市场组合收益的协方差就可以定价的情形。这些情形已经在跨期资产的内容中讨论过了，但是(8.3.14)式使得这些情形特别容易理解。首先，如果相对风险厌恶系数$\gamma=1$，则协方差与投资机会之间的反作用就消除了，于是对资产定价来说，只有其与市场收益的协方差才是合理有效的。其次，如果投资机会集是不变的，则对所有资产来说σ_{ih}为0，这样资产只能用其与市场收益的协方差来定价。再则，如果市场收益服从单变量随机过程，则未来收益消息与当前收益是完全相关的。于是，资产与当前收益的协方差是资产与未来收益消息的协方差的充分统计量，该充分统计量可以用来对所有资产定价。坎贝尔(Campbell，1996a)指出，前两种情形即使是近似的也没有说明美国的数据，只有第三种情形才有合理的实证结果。

三看权益溢酬困惑

(8.3.14)式可以应用于市场本身的风险溢酬问题。当$i=m$时，我们得到：

$$\mathrm{E}_t[r_{m,t+1}]-r_{f,t+1}+\frac{\sigma_m^2}{2}=\gamma\sigma_m^2+(\gamma-1)\sigma_{mh} \qquad (8.3.15)$$

当市场收益是不可预测的时候，也就没有未来收益期望的修正，于是$\sigma_{mh}=0$。在此情形下具有杰森不等式调整的权益溢酬恰好是$\gamma\sigma_m^2$，而相对风险厌恶系数可以用弗兰德和布鲁姆(Friend and Blume，1975)提出的以权益溢酬与市场收益方差的比率方法来估计。我们使用来自表8.1的数字得到风险厌恶的估计为0.057 5/0.031 5=1.828。这是具有幂效用的投资者的风险厌恶系数，这些投资者把其财富完全投资于不可预测收益的组合中，每年的风险溢酬为5.75%，相应每年的方差为0.031 5(标准差为每年17.74%)。这样的投资者的消费每年也有17.74%的标准差，这要远大于表8.1中所度量的总消费的易变性。这就说明了为什么这里的风险厌恶估计远低于先前讨论过的消费导向模型的估计。

如果市场收益是序列相关的话，那么弗兰德和布鲁姆(Friend and Blume，1975)提出的过程是严重错误的。例如，如果高的股票收益与其向下修正的未来收益相关，则(8.3.15)式中的σ_{mh}就是负的。对于$\gamma>1$，它就减小与任何水平的γ有关的权益风险溢酬，并且增加用于解释给定的权益溢酬的风险厌恶系数。由于市场是趋向于均值复原的，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

所以当 $\sigma_{mh}<0$ 时，股票市场投资的长期风险小于短期风险。于是，具有高 γ 的投资者更关心长期风险而不是短期风险。这样弗兰德和布鲁姆的计算就夸大了风险并相应低估了用于证明权益溢酬合理的风险厌恶。

坎贝尔(Campbell, 1996a)指出，如果考虑到用战后美国月度数据实证估计得到的均值回复程度，相对风险厌恶系数估计值的增加由 10 个或者更多的因素引起。在美国长期年度数据中这种作用特别小，但其走向还是保持不变。坎贝尔还指出，如果把人力资本作为财富的一部分，风险厌恶估计就增加。按照这种观念，我们无须直接参照消费数据就可以导出权益溢酬难题。

均衡多因子资产定价模型

再稍加些假设，(8.3.14)式就可用来获得我们曾在第 6 章中讨论过的一类均衡多因子资产定价模型。我们把市场收益写成含 K 个元素状态向量 $\mathbf{x}_{t-1}$ 的第一个元素，其他元素对市场来说是在第 $t+1$ 期期末已知的变量，并且它们对估计市场未来收益是恰当的。我们假设向量 $\mathbf{x}_{t+1}$ 服从一阶向量自回归(VAR)：

$$\mathbf{x}_{t+1}=\mathbf{A}\mathbf{x}_t+\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \tag{8.3.16}$$

这里假设 VAR 是一阶的，是没有限制的，因为高阶 VAR 总可以分解成许多一阶的形式。

接下来我们定义含 K 个元素的向量 $\boldsymbol{e1}$，它的第一个元素是 1 而其他元素都为 0。该向量能够从向量 $r_{m,t+1}$ 中提取出实际股票收益 $\mathbf{x}_{t+1}$：$r_{m,t+1}=\boldsymbol{e1}'\mathbf{x}_{t+1}$，并且有：

$$r_{m,t+1}-\mathrm{E}_t[r_{m,t+1}]=\boldsymbol{e1}'\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$$

该一阶 VAR 产生未来收益简单的多期预测：

$$\mathrm{E}_t[r_{m,t+1+j}]=\boldsymbol{e1}'\mathbf{A}^{j+1}\mathbf{x}_t \tag{8.3.17}$$

从而收益预测中的修正折现总和可以写成：

$$\mathrm{E}_{t+1}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{m,t+1+j}\Big]-\mathrm{E}_t\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{m,t+1+j}\Big]=\boldsymbol{e1}'\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j\mathbf{A}^j\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}=\boldsymbol{e1}'\rho\mathbf{A}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}=\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \tag{8.3.18}$$

这里，$\boldsymbol{\varphi}'$ 被定义等于 $\boldsymbol{e1}'\rho\mathbf{A}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{A})^{-1}$，它是 VAR 系数的非线性函数。向量 ψ 的元素度量各个状态变量在预测未来市场收益时的重要性。如果一个特定的元素 φ_k 是大的和正的话，则对变量 k 的一个冲击就是关于未来投资机会的一片好消息。

我们现在定义：

$$\sigma_{ik}\equiv\mathrm{Cov}_t[r_{i,t+1},\varepsilon_{k,t+1}] \tag{8.3.19}$$

这里 $\varepsilon_{k,t+1}$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ 的第 k 个元素。既然状态向量的第一个元素是市场收益，即 $\sigma_{i1}=\sigma_{im}$。从而，(8.3.14)式蕴涵着：

$$\mathrm{E}_t[r_{i,t+1}]-r_{f,t+1}=-\frac{\sigma_i^2}{2}+\gamma\sigma_{i1}+(\gamma-1)\sum_{k=1}^{K}\varphi_k\sigma_{ik} \tag{8.3.20}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这里，φ_k 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的第 k 个元素。这是曾在第 6 章中讨论过的标准 K 个因子资产定价模型。期间最优化问题的贡献就是关于因子风险价格的一系列限制。第一个因子（市场收益中的新因子）具有风险价格 $\lambda_1=\gamma+(\gamma-1)\varphi_1$。$\varphi_1$ 的符号就是市场收益新因子与未来市场收益的修正之间相关系数的符号。正如我们已经讨论过的那样，这个符号影响市场因子的风险价格。例如，φ_1 的符号是负的时候，如果 γ 大于 1，市场因子风险价格就减小。

这个模型中的其他因子具有风险价格 $\lambda_k=(\gamma-1)\varphi_k$，这里 $k>1$。这些因子是有助于我们预测市场收益的新变量，它们的风险价格与向量 φ 中元素所度量的它们的预测重要性成比例。如果一个特定变量有正的 φ_k 值，就意味着这个新变量与有关未来投资机会的好消息相关联。如果相对风险厌恶系数 γ 小于 1，则变量将有负的风险价格；如果相对风险厌恶系数 γ 大于 1，则变量将有正的风险价格。

坎贝尔（Campbell，1996a）用长期的年度和“二战”后美国的月度股票市场数据估计了这个模型。他估计得到的 φ_1 是负的并且绝对值很大，这样股票市场风险价格 λ_1 就小于风险厌恶系数 γ。模型中的其他因子估计的风险价格不准确。虽然这些风险价格中有一些数值很大，但其他因子在研究中对资产的均值收益作用微小，因为这些资产与那些因子之间的协方差明显太小。

8.4 更一般的效用函数

对标准消费 CAPM 的困难的直接回答就是把效用函数一般化。我们已经讨论了埃普斯坦—津—韦尔模型，但是当要保留幂效用函数规模独立的诱人性质时，改变效用设定的方式似乎才合理。

例如，这些效用函数在消费和其他一些产品之间也许是不可分离的。如果效用是柯布—道格拉斯函数（Cobb-Douglas），它的对数线性模型很易处理，于是消费的边际效用可以写成：

$$U_C(C_t,X_t)=C_t^{-\gamma_1}X_t^{-\gamma_2} \tag{8.4.1}$$

对一些产品 X_t 和参数 γ_2，欧拉方程现在就变成：

$$1=\mathrm{E}_t\left[(1+R_{i,t+1})\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma_1}\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{-\gamma_2}\right] \tag{8.4.2}$$

假定联合对数正态性和同方差性成立，上式又可以写成为：

$$\mathrm{E}_t[r_{i,t+1}]=\mu+\gamma_1\mathrm{E}_t[\Delta c_{t+1}]+\gamma_2\mathrm{E}_t[\Delta x_{t+1}] \tag{8.4.3}$$

艾谢恩鲍姆、汉森和辛格尔顿（Eichenbaum，Hansen and Singleton，1988）已经考虑了 X_t 是多余的情形下这一形式的模型。艾斯查尔（Aschauer，1985）和斯格茨（Startz，1989）建立了 X_t 分别是政府支出和耐用产品存量的模型。不幸的是，这些额外的变量没

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

有一个能大大改善消费 CAPM 模型适应数据的能力。困难在于，自“二战”以来，至少在数据中这些变量没有足够的噪声对跨期边际替代率有充分的作用。[①]

8.4.1 习惯定式

基本模型更允许的变化是考虑效用关于时间的不可分离性。康斯坦丁尼德斯(Constantinides，1990)和森德里桑(Sundaresan，1989)讨论了习惯定式的重要性，也就是今天的消费对明天消费的边际效用的正作用。这里讨论一些补充这个想法的简单方式。

关于一些建模问题开头时就提出了。我们用 $U(C_t, X_t)$ 表示时期效用函数，这里 X_t 代表时变习惯或持续水平。第一个问题是函数 $U(\cdot)$ 形式。艾贝尔(Able，1990；1996)已经提出 $U(\cdot)$ 的函数形式应该是比率 C_t/X_t 的幂函数。与此同时，坎贝尔和柯克雷恩(Campbell and Cochrane，1995)，康斯坦丁尼德斯(Constantinides，1990)和森德里桑(Sundaresan，1989)已经在使用差$(C_t - X_t)$的幂函数了。第二个问题是代理人自身关于未来习惯水平的决策。在诸如康斯坦丁尼德斯(Constantinides，1990)以及森德里桑(Sundaresan，1989)提出的标准内在习惯模型中，习惯依赖于代理人自身的消费，也就是当决定要消费多少时代理人会对此加以说明。在诸如艾贝尔(Abel，1990；1996)以及坎贝尔和柯克雷恩(Campbell and Cocbrane，1995)提出的外在习惯模型中，习惯依赖于不受任何代理人决策影响的总消费。艾贝尔把此称为追赶耶稣。第三个问题是习惯对个体的或加总的消费的反应速度。艾贝尔(Abel，1990，1996)，达恩和辛格尔顿(Dunn and Singleton，1986)以及弗森和康斯坦丁尼德斯(Ferson and Constantinides，1990)认为，习惯依赖于消费的一阶滞后，而康斯坦丁尼德斯(Constantinides，1990)，森德里桑(Sundaresan，1989)，坎贝尔和柯克雷恩(Campbell and Cochrane，1995)以及希顿(Heason，1995)认为，习惯反应只是在消费中逐渐改变的。

比率模型

根据艾贝尔(Able，1990；1996)的想法，假定代理人的效用可以写成比率 C_t/X_t 的幂函数，即：

$$U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \frac{(C_{t+j}/X_{t+j})^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \tag{8.4.4}$$

这里，X_t 概括了过去消费水平对今天效用的影响。X_t 可以设定为内在习惯或外在习惯。为简单起见，我们使用消费的一阶滞后。当 X_t 设定为内在习惯时，我们有：

$$X_t = C_{t-1}^{\kappa} \tag{8.4.5}$$

① 正如坎贝尔和曼昆(Campbell and Mankiw，1990)所指出的那样，战后数据中消费增长存在着可预测的变动，但即使人们认可在闲暇消费、政府支出或耐用品消费中存在可预测的变动，它也与实际利率中可预测的变动无关。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

它表示了代理人自身过去的消费事件；当 x_t 设定为外在习惯时，我们有：

$$X_t=\bar{C}_{t-1}^{\kappa} \qquad (8.4.6)$$

它表示对过去消费事件的加总。由于有了代理人，所以在均衡点代理人的消费一定等于总消费。均衡方程两边的参数 κ 限制了时间不可分离性的程度。

在内在习惯设定中，时刻 t 的消费是通过时刻 $t+1$ 和时刻 t 这两项来影响(8.4.4)式中的和式的，我们写出复杂的欧拉方程微分：

$$\partial U_t/\partial C_t=[1-\delta\kappa(C_{t+1}/C_t)^{1-\gamma}(X_{t+1}/X_t)^{\gamma-1}](C_t/X_t)^{1-\gamma}(1/C_t) \qquad (8.4.7)$$

(8.4.7)式在时刻 t 是随机的，因为它依赖于在时刻 $t+1$ 的消费。我们替换 X_t 并附加上代理人自身的消费等于总消费的限制条件，就有：

$$\partial U_t/\partial C_t=C_{t-1}^{\kappa(\gamma-1)}C_t^{-\gamma}-\delta k C_t^{\kappa(\gamma-1)}C_{t+1}^{-\gamma}(C_{t+1}/C_t) \qquad (8.4.8)$$

如果这个模型是为了反映习惯定式的想法的话，就要求 $\kappa(\gamma-1)\geqslant 0$ 以保证昨天消费的增加会增加今天消费的边际效用。于是，欧拉方程的期望现在可以写成：

$$\mathrm{E}_t[\partial U/\partial C_t]=\delta\mathrm{E}_t[(1+R_{t+1})\partial U_{t+1}/\partial C_{t+1}] \qquad (8.4.9)$$

这里方程左边的期望算子是必需的，因为 $\partial U/\partial C_t$ 是随机的。

外在习惯定式的分析就明显要简单一些。结合(8.4.8)式和(8.4.9)式两种情形有：

$$1=\delta\mathrm{E}_t[(1+R_{i,t+1})(C_t/C_{t-1})^{\kappa(\gamma-1)}(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}] \qquad (8.4.10)$$

如果我们假设资产收益和消费增长具有同方差性和联合对数正态性，这就意味着下面关于风险溢酬和无风险实际利率的约束是：

$$\gamma_{f,t+1}=-\log\delta-\gamma^2\sigma_c^2/2+\gamma\mathrm{E}_t[\Delta c_{t+1}]-\kappa(\gamma-1)\Delta c_t \qquad (8.4.11)$$

$$\mathrm{E}_t[r_{i,t+1}-r_{f,t-1}]+\sigma_i^2/2=\gamma\sigma_{ic} \qquad (8.4.12)$$

方程(8.4.11)表示无风险实际利率等于幂效用下的数值减去 $\kappa(\gamma-1)\Delta c_t$。让今天的消费和明天的期望消费不变，昨天消费的增长就会增加今天消费的边际效用。这就使得代理人向未来透支借贷，从而抬高了实际利率。方程(8.4.12)说明了风险溢酬确实同(8.2.7)式中描述的幂效用模型的风险溢酬公式一样。外在习惯仅简单地在欧拉方程(8.4.10)中加了一项，并且这一项在时刻 t 是已知的，还不会影响风险溢酬。

艾贝尔(Abel,1990;1996)仅讨论了“追赶耶稣”有助于我们解释权益溢酬难题。这个讨论主要基于这么两种考虑：第一，(8.4.11)式中无风险利率的平均水平是 $-\log\delta-\gamma^2\sigma_c^2/2+(\gamma-\kappa(\gamma-1))g$，这里，$g$ 是平均消费增长率。当风险厌恶 γ 很大的时候，正的 κ 会减小平均无风险利率。于是，“追赶耶稣”就让人们在不面对无风险利率的情况下通过增加风险厌恶来解决权益溢酬难题。第二，由于(8.4.11)式中存在 $-\kappa(\gamma-1)\Delta c_t$ 这一项的缘故，正的 κ 很可能使无风险实际利率更易变动。如果在股票红利等于消费的假设下人们要解决股票收益问题，那么更易变动的无风险实际利率就会增加股票收益与消费的协方差 σ_{ic}，尽而抬高权益溢酬。

上述第二个观点对模型的长度来讲可能被认为是弱的。表 8.1 中显示的权益溢酬难

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

题是度量的权益溢酬与度量的协方差 σ_{ic} 的比率太大；即使在模型所蕴涵股票收益等于消费的假设下增加 σ_{ic} 也没有得到改善。当然，实际利率在短期内也不会变化很大；表 8.1 中事后商业票据收益的标准差是 5.5%，表 8.2 中显示该收益方差的大约三分之一是可预测的，这就意味着，期望实际利率的标准差只有 3%。既然消费增长的标准差大约为 3%，那么方程(8.4.11)中 κ 和 γ 大的数值就倾向于产生与期望实际利率相反的易变性。相似的问题同样也出现在内在习惯模型中。

无风险实际利率的难点在于它是习惯定式模型的基本问题。即使当消费是平滑的时候，时间不可分的偏好也使得边际效用变化无常，因为消费者是从相对于当前消费的历史水平中获得效用，而不是从绝对的消费水平中获得效用。除非消费和习惯过程采用特殊的形式，否则时间的不可分离性会产生连续时间上期望边际效用的大波动，这也就意味着实际利率的大波动。现在我们提出另外一个设定，在此设定下有可能解决这个问题。

差异模型

我们考虑如下效用函数的模型：

$$U_t = \mathrm{E}_t\left[\sum_{j=0}^{\infty}\delta^j \frac{(C_{t+j}-X_{t+j})^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}\right] \tag{8.4.13}$$

在该模型中为简化处理，我们规定习惯水平 X_t 是外在的。这个模型在两个重要方式上不同于比率模型。第一，在差异模型中，代理人的风险厌恶随着相对于习惯的消费水平变化，这与比率模型中风险厌恶是常数是不同的。第二，在差异模型中，消费必须在习惯之前就定义好了，而在比率模型中没有这个要求。

为理解第一点，我们定义过剩消费比率，以便于分析处理：

$$S_t \equiv \frac{C_t - X_t}{C_t} \tag{8.4.14}$$

这个过剩消费比率给出了总消费中的一小部分，它相对于生存或习惯所要求的来说是过剩的。如果让习惯 X_t 固定而让消费 C_t 变化，则效用函数的标准化曲率就等于相对风险厌恶系数，并且在常规的幂效用函数中该标准化曲率是等于 γ 的常数，即：

$$\frac{-Cu_{CC}}{u_C} = \frac{\gamma}{S_t} \tag{8.4.15}$$

当过剩消费比率 S_t 衰减时，风险厌恶的度量就上升，也就是所谓消费对习惯衰减。[①]

如同康斯坦丁尼德斯(Constantinides，1990)和森德里桑(Sundaresan，1989)提出的具有外生资产收益和内生消费的微观经济模型要求消费总在习惯之上是自动满足的。然而在具有外生消费过程的模型中出现了比较严重的问题。为处理解决这个问题，坎贝尔

① 风险厌恶还可以由函数值(把最大化的效用表达成一个财富的函数)的标准化曲率度量，或者由随机折现因子度量，以及由资产市场上可得到的最大夏普率度量。这些风险厌恶的度量在这个模型中是互不相同的，它们随 S_t 反向移动。注意效用中的曲率参数 γ 不再是这个模型中风险厌恶的一个度量了。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

和柯克雷恩(Campbell and Cochrane，1995)设定了一个非线性过程，在该过程中他们用习惯调整消费，保留了以后所有时间的消费。坎贝尔和柯克雷恩为对数过剩消费比率 $s_t \equiv \log(S_t)$ 写下了这个过程。他们假设对数消费服从一个具有漂移 g 的随机游动和新生因子 v_{t+1}，即 $\Delta c_{t+1}=g+v_{t+1}$。他们对 s_t 建议了一个 AR(1)模型：

$$s_{t+1}=(1-\phi)\bar{s}+\phi s_t+\lambda(s_t)v_{t+1} \tag{8.4.16}$$

这里，$\bar{s}$ 是不稳定状态的过剩消费比率。参数 ϕ 限制着对数过剩消费比率的持续性；与此同时敏感函数 $\lambda(s_t)$ 控制着 s_{t+1} 的敏感性，并通过对数习惯 x_{t+1} 控制着消费增长中的新生因子 v_{t+1}。

方程(8.4.16)设定今天的习惯是当前和过去消费的一个复杂的非线性函数。通过取稳定状态附近的线性近似，可以证明(8.4.16)式近似于一个传统的习惯定式模型，在该模型中对数习惯缓慢响应对数消费，即：

$$x_{t+1}\approx[(1-\phi)h+g]+\phi x_t+(1-\phi)c_t=\left[h+\frac{g}{1-\phi}\right]+(1-\phi)\sum_{j=0}^{\infty}\phi^j c_{t-j} \tag{8.4.17}$$

这里 $h=\ln(1-\bar{S})$ 是稳定状态 $(x-c)$ 的数值。传统的习惯定式模型(8.4.17)的问题是允许消费落在习惯之后，产生无限或负的边际效用。把 s_t 定义在实轴上就意味着消费永远不会落在习惯之后。

既然习惯是外在的，消费的边际效用就是 $u'(C_t)=(C_t-X_t)^{-\gamma}=S_t^{-\gamma}C_t^{-\gamma}$。于是，随机折现因子就为：

$$M_{t+1}\equiv\delta\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}=\delta\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma} \tag{8.4.18}$$

在标准幂效用模型中 $S_t=1$，这样随机折现因子恰好是消费增长提高到幂值 $-\gamma$。如果有大的数值 γ 的话，我们就得到易变的随机折现因子。在习惯定式模型中人们可以用易变的过剩消费比率 S_t 替代得到易变的随机折现因子。

由 $(1+R^f_{t+1})=1/E_t(M_{t+1})$ 可知，无风险实际利率与随机折现因子有关。取对数并使用(8.4.16)式和(8.4.18)式，则对数无风险实际利率是：

$$r^f_{t+1}=-\log(\delta)+\gamma g-\gamma(1-\phi)(s_t-\bar{s})-\frac{\gamma^2\sigma_v^2}{2}[\lambda(s_t)+1]^2 \tag{8.4.19}$$

(8.4.19)式右边的前二项与(8.2.6)式的幂效用模型一样，后两项则是新的。第三项(与 $(s_t-\bar{s})$ 是线性的)反映了跨期替代或均值回复。如果过剩消费比率低，消费的边际效用就高。同样，过剩消费比率预计回复到它的均值，那么边际效用未来也将回落。于是，消费者将透支借贷，这就会抬高均衡无风险利率。第四项(与 $[\lambda(s_t)+1]^2$ 是线性的)反映了预防性储蓄。当不确定性增加时，消费者更愿意储蓄，从而就压低了均衡无风险利率。

如果该模型是为了产生如同数据中观测到的稳定的实际利率，序列相关参数 ϕ 必须接近于 1。同样，敏感性函数 $\lambda(s_t)$ 必须随 s_t 递减。这样当 s_t 低的时候，敏感性就高，从而预防性储蓄项就抵消期间替代项的作用。事实上，坎贝尔和柯克雷恩把函数 $\lambda(s_t)$ 参数化

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

就是使这两项的作用在任何地方都相互抵消,这样就意味着有不变的无风险利率。

即便具有不变的无风险利率和随机游动的消费,外在习惯模型也会产生大的权益溢酬、易变的股票价格和可预测的超额股票收益。这就是在风险厌恶中的时变机制的作用。当消费相对于习惯回落时,风险厌恶就会增加,从而抬高诸如股票之类的风险资产的风险溢酬。当然也会压低股票价格,这也就是为什么股票收益比消费增长或无风险利率更具有易变性的缘故。

坎贝尔和柯克雷恩(Campbell and Cochrane,1995)校正了他们的模型对有关美国消费和红利数据的口径,用麦布雷和普雷斯科特(Mehra and Prescott,1985)的传统方法解得了均衡股票价格。同样也有人根据汉森和辛格尔顿(Hansen and Singleton,1982;1983)提出的方法使用实际股票收益数据做了一些有关习惯定式的工作。例如,希顿(Heaton,1995)在考虑了数据的时间加总和诸如国民收入账户中非耐久商品的商品耐久性问题的前提下,估计了内在习惯模型。耐久性是习惯定式的对立面,今天的耐久性消费支出降低了明天消费支出的边际效用。希顿发现,耐久性以高频数占据优势,而习惯定式只有比较低的频数。然而,他的习惯定式模型与简单的幂效用模型一样在统计上被拒绝了。

上述两类方法假设总消费对边际效用来说是一个抬高过程。其他的观点,比如第8.3.2节中讨论过的认为用总消费的宏观数据作为股票市场投资者的消费也许是不合适的。在这些观点下,对习惯定式模型来说,抬高过程应当是一个具有合理均值和标准差的过程,但不必与总消费高度相关。

8.4.2 偏好的心理模型

心理学家和实验经济学家已经发现,实验环境中的人们所作出的选择在许多方面与期望效用的标准模型不同。对这些新的非正统"心理"模型的反应已经出现。最近的一些研究已经开始把这些模型用于资产定价①。

相对于(8.1.1)式的标准时间可分离设定,心理模型也许是最好理解的。在(8.1.1)式的标准时间可分离设定的模型中,投资者最大化如下目标:

$$\mathrm{E}_t\left[\sum_{j=0}^{\infty}\delta^j U(C_{t+j})\right] \tag{8.4.20}$$

这个设定具有三个主要构成部分:时期效用函数 $U(C_t)$,折现因子为 δ 的几何折现,以及数学期望算子 E_t。心理模型改变了这些构成的一个或几个部分。

---

① 比较有用的一般参考文献包括霍盖斯和雷德(Hogarth and Reder,1987)以及克雷普斯(Kreps,1988)的论文等。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

最著名的决策制定心理模型可能是凯尼曼和特弗斯基(Kahneman and Tversky，1979)及特弗斯基和凯尼曼(Tversky and Kahneman，1992)提出的远景理论。远景理论最初是用静态形式表述的，这样它就不强调折现，但它改变了标准模型结构中的其他两个元素。它没有关于消费定义偏好，而是关于一些基本结果的收益和损失定义偏好。这个理论的关键特征是，对损失给定的权重大于收益。于是，如果 x 是一个随机变量的话，它的正值对应于收益，它的负值则对应于损失。效用就依赖于如下函数：

$$v(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{1-\gamma_1-1}}{1-\gamma_1}\text{，如果 } x\geqslant 0\\ -\lambda\dfrac{x^{1-\gamma_2-1}}{1-\gamma_2}\text{，如果 } x<0\end{cases}\tag{8.4.21}$$

这里，γ_1 和 γ_2 分别是收益和损失的曲率参数，它们可以互不相同。$\lambda>1$ 度量损失厌恶的范围，对损失所赋予的权重大于收益。

远景理论还改变了(8.4.20)式中的数学期望算子。期望算子用概率给每个可能的结果赋予权重；远景理论则允许用每个可能结果概率的非线性函数(见凯尼曼和特弗斯基(Kahneman and Tversky，1979))或用较好和较坏结果概率的非线性函数。另外，更一般的投资者心理模型还用主观期望模型代替数学期望算子。有兴趣的读者可以参阅巴伯里斯、施雷弗和维舍尼(Barberis，Shleifer and Vishny，1996)，迪朗、施雷弗、萨默斯和沃尔德曼(Delong，Shleifer，Summers and Waldmenn，1996)以及弗鲁特(Froot，1989)的文献。

资产定价应用远景理论，关键的问题是怎样的基准结果用于定义与时间有关的收益和损失。比纳特齐和塞勒(Benartzi and Thaler，1995)假设投资者具有关于收益定义的偏好，其中零收益标志收益和损失的边界。收益可以按不同的水平衡量；如果投资者用 K 个月来更新他们的基准结果的话，用 K 个月的收益来度量收益就是合理的。本纳茨和塞勒从 1 到 18 的排列中考虑 K 个数值。他们证明，损失厌恶和短期水平的结合可以合理化投资者即使面对大的权益溢酬也不持有股票的意愿。鲍诺莫和加西亚(Bonomo and Garcia，1993)用具有损失厌恶的消费导向模型得到了同样的结果。

在相关的工作中，埃普斯坦和津(Epstein and Zin，1990)发展了雅里(Yaari，1987)的参数化选择理论。他们的跨期效用设定显示了一阶条件的风险厌恶。对风险溢酬的需求诱导投资者参加与投机标准差成比例，而不是与标准理论中的方差成比例的小的冒险。这个特征增加了模型对风险溢酬的预测性，但是按麦布雷和普雷斯科特(Mehra and Prescott，1985)的风格进行数据校正实践的话，埃普斯坦和津发现他们只能拟合以往权益溢酬的大约三分之一。

这方面文献的另一部分内容讨论了改变在(8.4.20)式中折现的设定。艾因斯列(Ainslie，1992)以及路文斯坦和普雷利斯(Loewenstein and Prelec，1992)讨论了不用几何折现而用双曲线折现的实验事实。对水平 K 来讲，折现因子不是 δ^K，而是形式$(1+\delta_1 K)^{-\delta_2/\delta_1}$的函数，这里 δ_1 和 δ_2 同标准理论中一样都是正的。这个函数形式的意思就是

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

较低的折现率用于未来的未来期间。雷伯森(Laibson,1996)讨论了双曲线折现可以用下述设定很好地近似：

$$U(C_t)+\beta\,\mathrm{E}_t[\sum_{j=1}^{\infty}\delta^j U(C_{t+j})] \tag{8.4.22}$$

这里,额外的参数 $\beta<1$ 表明下期的折现要比未来任何各期之间的折现来得大。

双曲线折现导致了时间不一致的选择,因为任何两期之间的折现率随着期间的接近会出现漂移,对于那些时期即使没有新的信息到达,最优计划也会随时间变化。这就意味着消费和组合选择依赖于时间一致性的问题被解决了。雷伯森(Laibson,1996)在个体不受未来消费选择限制的期间选择消费的假设下得到了消费选择的欧拉方程。有趣的是,他用双曲线折现证明了即使跨期效用函数具有幂形式的话,跨期替代弹性也小于相对风险厌恶系数。

8.5 结 论

金融经济学家还没有创造出一般可接受的随机折现因子模型,但是却取得了巨大的进展。我们知道,如果用随机折现因子解释资产收益的截面模式,它一定是极其易变的。我们还知道,为解释无风险实际利率的稳定性,随机折现因子的条件期望一定也是相对稳定的。这些性质把严格的限制加到了可以考虑到的各类资产定价模型上。

人们对经济状态中风险厌恶随时间改变的观点的兴趣正在日益增长。时变风险厌恶的观点可以解释超额股票收益和其他风险资产收益可预测的大部分实证结果。而可以产生时变风险厌恶的机制就是在代理人效用函数中的习惯定式。但是,投资者表现的时变风险厌恶也可能是由于他们按照非理性的预期进行交易,或者时变风险厌恶来自于特殊投资者的相互影响。例如,格罗斯曼和周(Grossman and Zhou,1996)提出了具有不同风险厌恶系数的两个代理人之间相互交易的模型。其中一个代理人关于财富具有外生和较低的边界,并在均衡时产生时变风险价格。这个主题可能是未来研究的一个活跃的领域。

习 题

8.1 证明基准组合具有在本章第 8.1.1 节中所陈述的(P1)到(P5)的性质。

8.2 考虑以相对风险厌恶系数 r 作为幂效用的一个代理人的经济社会。代理人接受了不可储存的捐赠基金。对数捐赠基金,或等价地为对数消费的过程是:

$$\Delta c_{t+1}=\mu+\phi\Delta c_t+u_{t+1}$$

这里系数 ϕ 既可为正,也可为负。如果 ϕ 是正的话,则捐赠基金的波动就是高度持续的;如果 ϕ 是负的话,则它们具有一个重要的短暂成分。

8.2.1 假设消费和资产收益是联合对数正态,并且具有常数的方差和协方差。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

i. 使用代理人的欧拉方程证明任何资产的期望对数收益是捐赠基金期望增长率的线性函数。在这个关系中斜率系数是什么?

ii. 使用代理人的欧拉方程证明任何资产的期望对数收益与对数无风险利率的差,加上对数资产收益自身方差(也称为资产的"溢酬"合计)的一半,与对数资产收益与消费增长的条件协方差成比例。在这个关系中斜率系数是什么?

8.2.2 对一个精确的近似来说,任何资产 i 的非预期收益可以写成:

$$r_{i,t+1}-\mathrm{E}_t r_{i,t+1}=\mathrm{E}_{t+1}\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\Delta d_{i,t+1+j}\Big]-\mathrm{E}_t\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\Delta d_{i,t+1+j}\Big]$$
$$-\Big(\mathrm{E}_{t+1}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{i,t+1+j}\Big]-\mathrm{E}_t\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{i,t+1+j}\Big]\Big)$$

这里,$d_{i,t}$ 是资产 i 在时刻 t 支付的红利。这个近似在第 7 章中的(7.1.25)式被发展了。

i. 使用这个表达式计算以红利支付总消费的权益的非预期收益。

ii. 使用这个表达式计算每期具有固定红利的实际统一公债的非预期收益。

8.2.3

i. 计算权益溢酬和统一公债溢酬。

ii. 证明对 ϕ 而言,债券溢酬具有相反的符号并且与 γ 的平方成比例。给出这个结果的经济解释。

iii. 证明权益溢酬总大于债券溢酬,并且这两者的差与 γ 成比例。给出这个结果的经济解释。

iv. 叙述你对有关"权益溢酬困惑"实证文献的讨论。

8.3 考虑一个消费者连续统一的二期世界。每个消费者在第二期有一个捐赠基金并且只在第二期消费。在第一期只有证券交易,直到第二期才有货币交易。所有消费者都具有关于第二期消费的对数效用。

8.3.1 假设所有消费者的捐赠基金是相同的。捐赠基金是 m 的概率为 1/2,为 $(1-a)m$ 的概率也为 1/2,这里 $0<a<1$。还假设对第二期总捐赠的索求权可交易,并且在任何状态的交易成本为 p,规定在第二期支付。计算均衡价格 p 和索求权的预期收益。

8.3.2 现在假设在第二期所有消费者接受捐赠为 m 的概率是 1/2;$(1-b)$ 部分消费者接受捐赠为 m,还有 b 部分消费者接受捐赠为 $(1-a/b)m$。在第一期所有消费者进入后一组的概率相同,但是市场没有保证他们可以避开这个风险。计算上面所定义索求权的预期收益。该预期收益比前面高还是低? a 和 m 的函数是否有边界?

8.3.3 陈述你对近来在代理人消费模型中有关股票收益决定的实证文献的看法和回答。在第 8.3.1 节和第 8.3.2 节中你的结果范围依赖于模型的什么细节,这些结果在什么范围具有更一般的性质?

注意:这个问题是由曼昆(Mankiw,1986)提出的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

9. 衍生证券定价模型

期权、认股权证和其他衍生证券——那些收益依赖于其他证券价格的金融证券的定价是现代金融经济学的一个伟大成就。基于众所周知的单一价格定理或无套利定价原理，布莱克—斯科尔斯期权定价模型(Black and Scholes，1973)和默顿期权定价模型(Merton，1973b)几乎立即被学术界和投资界承认，这在经济科学的历史上是空前的。[①]

布莱克—斯科尔斯和默顿模型的基本内涵是，在一定的条件下期权的收益可通过一个只包括标的股票和无风险债券的动态投资策略来完全复制。这个特定的策略是一个自融资(self-financing)型的投资策略，除初始日外不需要现金注入，在期权到期日前不允许现金撤出。因为这个策略是在到期时复制期权收益的，"自融资"投资策略的初始成本必然等于期权的价格，不然就会有套利机会。无套利定价原理不仅产生了期权的价格，而且告诉我们，如果一个期权不存在的话，可以通过股票和无风险债券的动态投资策略来复制这个期权。

这种期权定价方法还可完全应用到成百上千种其他的衍生证券上，其中一些可能比简单期权复杂得多。在大多数情况下，定价公式可以用一个抛物线偏微分方程(PDE)来刻画，这个偏微分方程的边界条件和初始值由各个衍生证券的合同条款决定。为获得实际价格，一般要求 PDE 的数值解，而在布莱克—斯科尔斯和默顿最初发表文章的 1973 年，求数值解相当困难，但现在得到数值解已经是件很平常的事，这得益于近三十年来计算机技术的发展。对衍生证券定价模型的详细讨论超出了本文的范围——衍生证券定价模型的讨论有许多优秀的文章，如考克斯和鲁宾斯坦(Cox and Rubinstein，1985)，赫尔(Hull，1993)和默顿(Merton，1990)，但为了方便起见，我们还是要在第 9.1 节和第 9.2 节分别对布朗运动和布莱克—斯科尔斯公式的默顿推导方法进行简单的回顾。

有意思的是，虽然衍生证券定价计算量很大，但传统的统计推断却发挥不了任何作

---

① 见伯恩斯坦(Bernstein，1992，第 11 章)对布莱克—斯科尔斯和默顿期权定价公式的历史的生动描述。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

用。这是因为，在无套利定价原理中，既不需要使"误差项"(error term)最小化，也不需要满足相应的统计波动条件。如果一个期权的价格被一些其他的交易资产组合(可能是随时间变化)的价格完全(无误差)决定，那么需要统计推断吗？即使在实际运用期权定价模型实际运用时，统计方法(诸如回归分析)也不会扮演任何角色。

然而，在衍生证券定价模型的应用中，确实涉及到统计推断。我们将在这一章中重点关注。第一个方面是连续时间(continuous-time)价格过程的参数估计问题，这些参数是衍生证券定价公式的输入参数。在这一章中我们涉及的衍生证券定价公式是参数模型(parametric)，近年来已经出现了几个"非参数"方法来做衍生证券定价。[见艾特哈萨里尔(AÏt-Sahalia，1992)，艾特哈萨里尔和罗(Aït-Sahalia and Lo，1995)，哈切恩森、罗、波吉尔(Hutchinson，Lo，and Poggio，1994)和鲁宾斯坦(Rubinstein，1994)]。[1] 我们将在第12章叙述非参数衍生证券定价模型，在第9.3节讨论参数模型的有关问题。

第二个方面是用蒙特卡罗模拟(Monte Carlo simulation)对依赖于路径的衍生证券定价。依赖于路径的衍生证券是指它的收益在某种程度上依赖于在衍生证券有效期内标的资产价格的整个路径。例如，可以以标的资产的平均价格出售标的资产的看跌期权——这里平均是指期权整个有效期内的平均价格——是依赖于路径的。虽然在依赖于路径的衍生证券定价方面确实存在一些近似的解析解，但最为有效的还是蒙特卡罗模拟。这就有一些问题需要讨论，诸如如何测算模拟出的期权价格的精确度，在所要求的精确度下如何决定模拟次数，如何进行模拟的设计以便最经济地使用计算资源。我们将在第9.4节讨论这些问题。

9.1 布朗运动

在有些金融问题中，价格过程用连续时间模型比用离散时间模型更为方便。例如，布莱克—斯科尔斯期权定价公式的默顿推导假定可以瞬时、连续地调整所持有的证券组合来精确地复制期权的收益。这种复制证券组合的策略在离散的时间序列中一般是不可能做到的；因此，期权及其他衍生证券的定价公式几乎都是在连续时间下推导的，(详见第9.2节)。[2]

---

① 传统的参数确定方法是指标的资产的价格过程完全被有限个未知参数所指定，例如，具有未知漂移率和波动率的对数正态分布与传统的参数确定方法相反，非参数确定方法并不明确地说明价格过程，而是试图在恰当的规则下从数据中推断。

② 有两个值得注意的例外，即鲁宾斯坦(Rubinstein，1976)的平衡方法和考克斯、罗斯和鲁宾斯坦(Cox，Ross and Rubinstein，1979)的二项式期权定价模型。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

9.1.1 布朗运动的构造

金融资产价格的第一个正式的数学模型是由巴彻利尔(Bachelier,1900)得出的,它是一个连续时间的随机游动或布朗运动,目的是用于对在 Paris Bourse 交易的任股权证进行定价。因而,不必对布朗运动在现代衍生证券定价模型中处于如此中心的地位而感到惊奇。连续时间过程与我们在第 2 章第 2.1 节中所述的离散时间的随机游动紧密相连,我们将把离散时间的随机游动作为构造布朗运动的起点。① 我们的目标是通过一个离散时间的随机游动来定义一列连续时间的随机过程,它们收敛到连续时间的随机走动。

离散的随机游动

$\{p_k\}$表示一个离散的随机游动,其增量只取两个值,Δ 和$-\Delta$:

$$p_k = p_{k-1} + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = \begin{cases} \Delta & \text{概率为 } \pi \\ -\Delta & \text{概率为 } \pi' \equiv 1-\pi \end{cases} \tag{9.1.1}$$

其中 ε_k 是 IID 的(因而 p_k 服从第 2 章第 2.1.1 节中的随机游动 1),p_0 已知。考虑如下的连续时间过程 $p_n(t)$,$t\in[0,T]$,$p_n(t)$可由离散的过程$\{p_k\}$,$k=1,\cdots,n$ 构造,过程如下:将时间区间$[0,T]$分割成 n 段,每段长度 $h=T/n$,定义过程:

$$p_n(t) = p_{[t/h]} = p_{[nt/T]}, \quad t\in[0,T] \tag{9.1.2}$$

其中,$[x]$表示小于等于 x 的最大整数。$p_n(t)$是一个非常简单的连续时间过程,除了在时刻 $t=kh(k=1,\cdots,n)$外,其取值都是不变的,(见图 9.1)。

虽然 $p_n(t)$是一个连续的时间过程,但是它仍等同于离散时间过程 p_k,因为它只在离散的时间点上才变化。然而,如果我们将 T 固定而将 n 无限增加(使 h 趋向于 0),在区间$[0,T]$上,$p_n(t)$改变的时间点也会无限地增加。如果我们同时调整步长 Δ 及概率 π 和 π',那么 $p_n(t)$依分布收敛于非退化的连续时间过程 $p(t)$。

为了说明为什么有必要调整 Δ、π 和 π',需要考虑 $p_n(T)$的均值和方差:

$$\mathrm{E}[p_n(T)] = n(\pi-\pi')\Delta \tag{9.1.3}$$

$$\mathrm{Var}[p_n(T)] = 4n\pi\pi'\Delta^2 \tag{9.1.4}$$

当 n 无限增加,如果 Δ、π 和 π'保持不变,那么 $p_n(T)$的均值和方差也无限增加。为得到一个定义明确的非退化的极限过程,当 n 趋向无穷时,我们必须使 $p_n(T)$的矩是有限的。特别是因为我们希望得到连续时间的随机游动,我们希望极限过程 $p(T)$的均值和方差对 T 是线性的,就如(2.1.5)式和(2.1.6)式所表示的离散时间随机游动一样。因而,我们必须调整 Δ、π 和 π',使:

---

① 更精确的推导见比苓斯利(Billingsley,1968,第 37 节)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

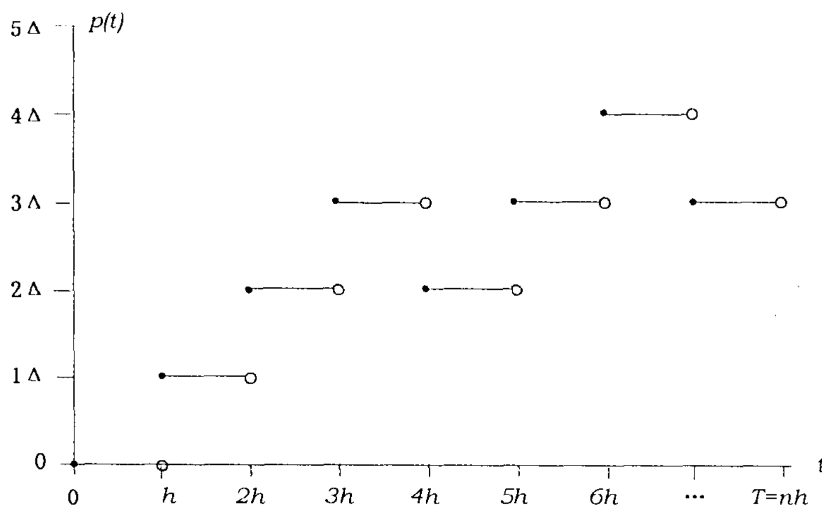


图 9.1 离散时间随机游动的样本路径

$$n(\pi-\pi')\Delta=\frac{T}{h}(\pi-\pi')\Delta\rightarrow\mu T \tag{9.1.5}$$

$$4n\pi\pi'\Delta^2=\frac{T}{h}4\pi\pi'\Delta^2\rightarrow\sigma^2 T \tag{9.1.6}$$

设：

$$\pi=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma}\right)$$

$$\pi'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma}\right),\quad \Delta=\sigma\sqrt{h} \tag{9.1.7}$$

(9.1.7)式的调整隐含了步长随 n 的增加而减少，不过比 $1/\sqrt{n}$ 或 $\sqrt{h}$ 更慢。概率同样以速度 $\sqrt{h}$ 收敛于 $\frac{1}{2}$，因而我们可以写成：

$$\pi=\frac{1}{2}+O(\sqrt{h}),\quad \pi'=\frac{1}{2}+O(\sqrt{h}),\quad \Delta=O(\sqrt{h}) \tag{9.1.8}$$

其中，$O(\sqrt{h})$ 是 $\sqrt{h}$ 的同阶无穷小。[①] 因而，当 n 增加，随机游动 $p_n(T)$ 在区间 $[0,T]$

---

① 函数 $f(h)$ 和 $g(h)$ 同阶无穷小——表示为：$f(h)\sim O(g(h))$——仅当下式满足：

$$0<\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)}<\infty$$

函数 $f(h)$ 是 $g(h)$ 的高阶无穷小——表示为 $f(h)\sim o(g(h))$——当

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)}=0$$

同阶无穷小与高阶无穷小的例子有：

$h\sim o(\sqrt{h})$ $3h^2\sim o(\sqrt{h})$ $5\sqrt{h}+h^2\sim O(\sqrt{h})$ $h-8h^2\sim O(\sqrt{h})$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

上变化更为频繁，不过有更小的步长 Δ，向上或向下的概率趋于$\frac{1}{2}$。

连续时间极限

通过计算 $p_n(T)$的矩函数并当 n 趋向无穷大时求它的极限，可得到 $p(T)$是均值为 μT，方差为 $\sigma^2 T$ 的正态分布；因而 $p_n(T)$趋于一个服从 $\mathcal{N}(\mu T,\sigma^2 T)$的随机变量的分布。

实际上，与 $p_n(T)$，$p(T)$有关的，更强的收敛概念是涉及到两个随机过程的有限维分布(finite-dimensional distributions, FDDs)。随机过程 $p(t)$的 FDD 是这个随机过程的任何有限个观察值的联合分布，例如，$f(p(t_1),p(t_2),\cdots,p(t_m))$，其中，$0\leqslant t_1<\cdots<t_m\leqslant T$。可以证明随机过程 $p_n(t)$的所有 FDDs(并不仅仅是随机变量 $p_n(T)$)都收敛于随机过程 $p(t)$的相应的 FDDs。[①] 如 $p_n(t)$的分布对任何 $t\in[0,T]$(并不仅在 T 时刻)都收敛于分布 $p(t)$，联合分布$\{p_n(0),p_n(3),p_n(7)\}$收敛于联合分布$\{p(0),p(3),p(7)\}$，等等。

除了 $p(T)$的正态性外，随机过程 $p(t)$还有以下性质：

(**B1**)对任何 $t_1,t_2,0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$：

$$p(t_2)-p(t_1)\sim\mathcal{N}(\mu(t_2-t_1),\sigma^2(t_2-t_1)) \tag{9.1.9}$$

(**B2**)任何 t_1,t_2,t_3 和 $t_4,0\leqslant t_1<t_2\leqslant t_3<t_4\leqslant T$，增量$p(t_2)-p(t_1)$满足与增量 $p(t_4)-p(t_3)$独立。

(**B3**)$p(t)$的样本路径是连续的。

显而易见，$p(t)$就是著名的算术布朗运动或称为威纳过程，它由上述三个性质完全表述。如果我们设 $\mu=0,\sigma=1$，就得到了标准布朗运动，以 $B(t)$表示。相应的，我们可以重新表述 $p(t)$如下：

$$p(t)=\mu t+\sigma B(t),\quad t\in[0,T] \tag{9.1.10}$$

为加深对 $p(t)$的印象，考虑以下条件矩：

$$\mathrm{E}[p(t)\mid p(t_0)]=p(t_0)+\mu(t-t_0) \tag{9.1.11}$$

$$\mathrm{Var}[p(t)\mid p(t_0)]=\sigma^2(t-t_0) \tag{9.1.12}$$

$$\mathrm{Cov}[p(t_1),p(t_2)]=\mathrm{Cov}[p(t_1),p(t_2)-p(t_1)+p(t_1)] \tag{9.1.13}$$

$$=\mathrm{Cov}[p(t_1),p(t_2)-p(t_1)]+\mathrm{Cov}[p(t_1),p(t_1)] \tag{9.1.14}$$

$$=\mathrm{Var}[p(t_1)]=\sigma^2 t_1 \tag{9.1.15}$$

至于离散时间的随机游动，$p(t)$的条件均值和条件方差与 t 成线性关系(见图 9.2)。

布朗运动的性质(B2)和(B3)隐含了它的轨迹是非常不规则、不光滑的——如果轨迹是光滑的，无限小增量 $B(t+h)-B(t)$可由 $B(t)-B(t-h)$来预测，这违背了独立性。实际上，当 h 趋于 0，观察到$(B(t+h)-B(t))/h$ 并不收敛于一个定义明确的随机变量，因为：

---

① FDDs 的收敛，与一个叫"紧密性"的技术条件语相连，称为弱收敛——一个来源于渐近近似性的用于许多非线性估计的统计定理，详见比苓斯利(Billingsley，1968)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

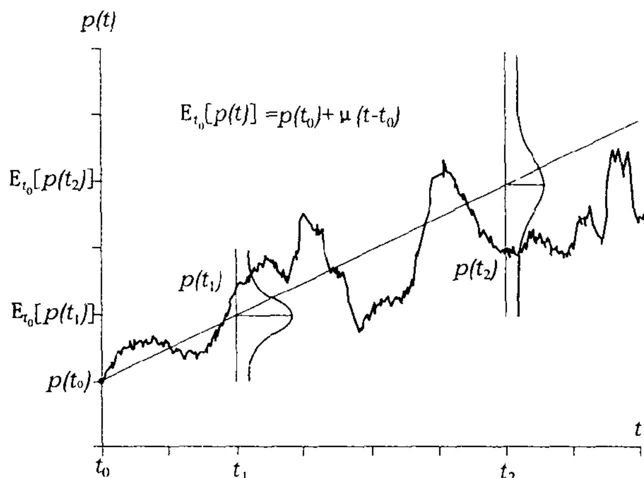


图 9.2 无漂移布朗运动的样本路径与条件期望

$$\mathrm{Var}\left[\frac{B(t+h)-B(t)}{h}\right]=\frac{\sigma^2}{h} \tag{9.1.16}$$

因而，布朗运动的导数 $B'(t)$ 在一般意义上是不存在的；而且虽然布朗运动的样本轨迹处处连续，但处处不可微。

9.1.2 随机微分方程

尽管如此，当 h 趋于无穷小时间(dt)时，布朗运动的无限小增量，$B(t+h)-B(t)$ 的极限仍记为 $dB(t)$，它有自己的解释，它成为构造其他连续时间过程的基本元素。① 由于 $B(t+h)-B(t)$ 可视为高斯白噪声(见第 2 章)，当 h 无穷小时，极限 $dB(t)$ 就是白噪声的连续形式。

可以这样理解，$dB(t)$ 是一种特殊的微分，即随机微分(a stochastic differential)，不能与微积分中的 dx 和 dy 混淆。然而，$dB(t)$ 确实遵循一般微分所满足的关系。例如(9.1.10)式通常写成微分形式：

$$dp(t)=\mu dt+\sigma dB(t) \tag{9.1.17}$$

不过不能认为(9.1.17)式是通常的微分方程，而应称其为随机微分方程。例如，一种自然而然的变换 $dp(t)/dt=\mu+dB(t)/dt$ 不代表任何意思。因为 $dB(t)/dt$ 不是一个定义明确的数量符号(虽然 $dB(t)$ 是有定义的)。

实际上，(9.1.17)式几乎没有超出(9.1.10)式的意义——它们是等价的。为赋于

① 布朗运动和随机微分方程的完整而严密的阐述超出了本文的范围。霍尔、波特和斯通(Hoel, Port and Stone, 1972, 第 4～6 章)，默顿(Merton, 1990, 第 3 章)和舒斯(Schuss, 1980)涵盖了这些内容。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(9.1.17)式独立的含义，我们必须更清楚地了解随机微分 $dB(t)$ 性质。例如，由于 dB 是随机变量，那么它的各阶矩是什么？$(dB)^2$ 和 $(dB)(dt)$ 又是什么？为回答这些问题，考虑 $dB(t)$ 的定义：

$$dB(t) \equiv \lim_{h \to dt} B(t+h) - B(t) \tag{9.1.18}$$

由性质(B1)，布朗运动增量是零均值(因为 $\mu=0$)方差等于微分间隔 h(因为 $\sigma=1$)的正态分布。因而有：

$$\mathrm{E}[dB] = \lim_{h \to dt} \mathrm{E}[B(t+h) - B(t)] = 0 \tag{9.1.19}$$

$$\mathrm{Var}[dB] = \lim_{h \to dt} \mathrm{E}[(B(t+h) - B(t))^2] = dt \tag{9.1.20}$$

$$\mathrm{E}[(dB)(dB)] = \lim_{h \to dt} \mathrm{E}[(B(t+h) - B(t))^2] = dt \tag{9.1.21}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[(dB)(dB)] &= \lim_{h \to dt} \{\mathrm{E}[(B(t+h) - B(t))^4] - h^2\} \\ &= o(dt) \end{aligned} \tag{9.1.22}$$

$$\mathrm{E}[(dB)(dt)] = \lim_{h \to dt} \mathrm{E}[(B(t+h) - B(t))h] = 0 \tag{9.1.23}$$

$$\mathrm{Var}[(dB)(dt)] = \lim_{h \to dt} \mathrm{E}[(B(t+h) - B(t))^2 h^2] = o(dt) \tag{9.1.24}$$

由(B1)及(9.1.19)式～(9.1.20)式我们可以将 $dB(t)$ 视为一个零均值、无穷小方差 dt 的正态分布随机变量。虽然方差 dt 很小，看起来与无方差一样，但我们处于一个无穷小的世界中，依(9.1.17)式，$dp(t)$ 的期望值是 μdt，在相对意义上，方差 dt 是不可忽略的。

然而，相对于 dt，$(dt)^2$ 项是可忽略的，因为无穷小的平方是比它本身更高阶的无穷小。如果我们将 $o(dt)$ 视为必为零的项，那么(9.1.21)式～(9.1.24)式表示 $(dB)^2$ 和 $(dB)(dt)=0$ 都是非随机的(因为式中右边的方差都是 $o(dt)$)。因而关系式 $(dB)^2=dt$，$(dB)(dt)=0$ 不仅仅在期望值意义上相等，而且是完全相等。这样就得到了著名的随机微分的乘法规则，如表 9.1 所示。为了明白为什么这个规则有用，我们可以计算 $(dp)^2$：

$$(dp)^2 = (\mu dt + \sigma dB)^2 \tag{9.1.25}$$

$$\begin{aligned} &= \mu^2 (dt)^2 + \sigma^2 (dB)^2 + 2\mu\sigma (dB)(dt) \\ &= \sigma^2 dt \end{aligned} \tag{9.1.26}$$

这个简单的计算表明，虽然 dp 是一个随机变量，而 $(dp)^2$ 却不是。它还表明，dp 确实像一个随机游动增量，因为 dp 的方差与微分间隔 dt 成比例。

表 9.1　　随机微分的乘法法则

$\times$	dB	dt
dB	dt	0
dt	0	0

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

几何布朗运动

如果算术布朗运动 $dp(t)$ 接近于一些资产的价格，性质(B1)显示价格在任何时间间隔上的变化将服从正态分布。但是由于正态分布在整个实数轴上取值，正态分布的价格变化隐含着价格可在一个正的概率下出现负值。由于几乎所有的金融资产都是有限责任——最大损失限定于全部投资的－100%——负的价格实际上是不可能的。

就如第 1 章第 1.4.2 节和第 2 章第 2.1.1 节一样，我们可以定义 $p(t)$ 是价格 $P(t)$ 的自然对数来消除这个问题。在这种定义下，$p(t)$ 可以是一个算术布朗运动而不会违反有限责任，因为价格 $P(t)=e^{p(t)}$ 总是非负的。价格过程 $P(t)\equiv e^{p(t)}$ 称为几何布朗运动或对数正态分布。我们将于第 9.3 节更详细地讨论算术布朗运动和几何布朗运动的统计性质。

伊藤引理

虽然第一个关于布朗运动的完整的数字理论是威纳(Wiener，1923)提出的，[1]但是将它广泛应用于数学、统计、物理、化学、生物学、工程学和金融经济学的是伊藤(Itô，1951)的重要贡献。特别是，伊藤构造了一组基于布朗运动的连续时间随机过程，它们在通常的非线性变换下是封闭的——就是伊藤过程或称为伊藤随机微分方程，即伊藤过程 p 和时间变量 t 的非线性函数 $f(p,t)$ 也是一个伊藤过程。

更为重要的是，伊藤(Itô，1951)给出了一个公式——伊藤引理——来计算 $f(p,t)$ 满足的随机偏微分方程：

$$df(p,t)=\frac{\partial f}{\partial p}dp+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(dp)^2 \tag{9.1.27}$$

谦逊的词汇“引理”对(9.1.27)式所带来的广泛的应用来说是不公正的。这个有力的工具使我们能够很容易掌握复杂的随机过程的变化。例如，令 p 表示资产价格的对数过程，假设 p 满足(9.1.17)式；动态的价格过程 $P(t)=e^{p(t)}$ 是什么？伊藤引理给了我们一个迅速的回答：

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial p}dp+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial p^2}(dp)^2 \qquad (9.1.28)\\ &= e^p dp+\frac{1}{2}e^p(dp)^2 \\ &= P(\mu dt+\sigma dB)+\frac{1}{2}P(\sigma^2 dt) \end{aligned}$$

$$dp=\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)Pdt+\sigma PdB \tag{9.1.29}$$

---

① 见杰里森、辛格和斯特鲁克(Jerison, Singer and Stroock，1996)对威纳的研究的历史回顾，包括了几篇关于威纳对现代金融经济学影响的文章。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

与算术布朗运动(9.1.17)式相反，从(9.1.29)式看到，几何布朗运动的瞬间均值和标准差与 P 成比例。(9.1.29)式隐含着瞬间价格变动率 dP/P 就像一个算术布朗运动或随机游动，当然在对数变换下才是精确的。

我们在第 9.2 节中给出伊藤引理中很重要的例子：布莱克—斯科尔斯公式的默顿推导。

9.2 衍生证券定价模型的简要回顾

虽然我们假定读者已经熟悉期权和其他衍生证券定价的理论，但在这里还是给出一个非常简要的回顾，主要是阐述术语和定义概念。我们的推导是简明扼要的，希望不熟悉这些模型的读者花些时间参看默顿(Merton，1990，第 8 章)最终论述的内容。同时，为简要讲解，在本章内我们将注意力集中在大众型(plain vanilla)期权特别是简单的无其他特征的看涨和看跌期权，标的资产假定为普通股票。[①]

$G(P(t),t)$表示在时刻 t 欧式看涨期权价格，期权的执行价为 X，到期日为 $T>t$，标的股票在 t 时刻的价格为 $P(t)$。[②] 当然 G 同样也依赖于其他变量，如到期日 T，执行价 X 和其他参数，但我们将不理会这些，除非当我们要特别关注它们的时候。

然而，以用即时股票价格 $P(t)$的函数来表示 G 而不是用过去的股票价格是一个重要的约束，这极大地简化了工作(在第 9.4 节，我们将考虑不满足这个约束的期权)。另外，布莱克和斯科尔斯(Black and Scholes，1973)作出以下假设：

(A1)市场是完美的。如，无税收和交易成本，无卖空限制，交易是连续而无摩擦的。

(A2)可以无风险连续复利收益率无限期地借贷；因而投资 1 美元于这种资产经 τ 时间后可收益 $1\cdot e^{r\tau}$ 美元。相应地，如果 $D(t)$是 t 时刻，到期日为 T、面值为 1 美元的折扣债券的价值，在 $t\in[0,T]$时刻，债券价格变动为：

$$dD(t)=rD(t)dt \tag{9.2.1}$$

(A3)股票价格变动由几何布朗运动给出，$t\in[0,T]$时刻的解服从于伊藤随机微分方程：

$$dP(t)=\mu P(t)dt+\sigma P(t)dB(t),\quad P(0)=P_0>0 \tag{9.2.2}$$

其中，$B(t)$是标准布朗运动，并且至少有一个投资者准确地观察到 σ。

---

① 不过，这一节中所回顾的技术同样也可应用于成百上千种其他的衍生证券，因而它们要比表面上显现出的更为一般化。

② 看涨期权是给予持有者以价格 X 购买标的资产的权力，而看跌期权是给予持有者以价格 X 卖出标的资产的权利。欧式期权只能在到期日才能执行。美式期权可在到期日或到期日前执行。为简单起见，在本章中，我们只讨论欧式期权。见考克斯和鲁宾斯坦(Cox and Rubinstein，1985)，赫尔(Hull，1993)，默顿(Merton，1990)详述欧式和美式期权的不同之处。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(**A4**)市场无套利机会。

9.2.1 布莱克—斯科尔斯和默顿方法

我们的目的是找出 G 满足的条件，希望得到 G 的明确的表达式。布莱克—斯科尔斯(Black and Scholes，1973)、默顿(Merton，1973b)通过考虑期权价格 G 的变化与股票价格 P 及无风险债券 D 的价格变化的关系实现了这一目标。首先假设 G 只是即期股票价格 P 和时间 t 的函数，并将伊藤引理应用于函数 $G(P(t),t)$[见第 9.1.2 节和默顿(Merton，1990，第 3 章)]，得到期权的价格变化：

$$dG=\mu_g G dt+\sigma_g G dB(t) \tag{9.2.3}$$

其中：

$$\mu_g\equiv\frac{1}{G}\left[\mu P\frac{\partial G}{\partial P}+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial P^2}\right] \tag{9.2.4}$$

$$\sigma_g\equiv\frac{1}{G}\left[\sigma P\frac{\partial G}{\partial P}\right] \tag{9.2.5}$$

不幸的是，这种解释似乎不能提供任何显而易见的约束可以让我们缩小对 G 的选择。有一种可能是，设 μ_g 等于所要求的收益率 r_0，r_0 是与期权风险相应的均衡收益率，就像 CAPM 那样(见第 5 章)。如果这样的 r_0 可以确定，条件 $\mu_g=r_0$ 化为 PDE 的条件，在一些假定和边界条件下，解 PDE 可得到惟一的解。这是布莱克和斯科尔斯(Black and Scholes，1973)所提出的方法。[①] 但是，这种方法需要比(A1)～(A4)更多的假设——一个完全明确表达的经济均衡动态模型，在模型中可完全决定 r_0。

默顿(Merton，1973b)提出了一个替代布莱克—斯科尔斯(Black and Scholes，1973)均衡方法的方法，在这个方法中，可获得相同的期权定价公式但是用不着超过(A1)～(A4)的任何传统的假设。这种方法是通过构造股票、期权和无风险债券的组合，这个组合不需要初始净投资，在 0 到 T 时间内也不需要另外的资金，这是一个自融资(self-financing)组合，其中多头头寸完全由空头头寸来融资。假定以 $I_p(t)$表示 t 时刻投资于股票的资金额，$I_d(t)$表示在 t 时刻投资于到期日为 T 的无风险债券的资金额，$I_g(t)$是 t 时刻投资于看涨期权的投资额。那么零净投资条件可以表示为：

$$I_p(t)+I_d(t)+I_g(t)=0,\quad \forall t\in[0,T] \tag{9.2.6}$$

满足(9.2.6)式的组合叫做套利组合。默顿(Merton，1969)指出这个套利组合瞬间收益是：

---

① 特别是，布莱克和斯科尔斯(Black and Scholes，1973)假定 CAPM 成立，用证券市场线得到 r_0，证券市场线是与 beta 相联的期望收益率。然而 CAPM 是均衡收益率的动态模型，而且在 CAPM 和连续时间期权定价模型间有显著的不合协[例如，见戴伯维格和因格索尔(Dybvig and Ingersoll，1982)]。然而，鲁宾斯坦(Rubinstein，1976)提出了动态均衡模型，在模型中布莱克—斯科尔斯公式成立。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$dI=\frac{I_P}{P}dP+\frac{I_d}{D}dD+\frac{I_g}{G}dG \tag{9.2.7}$$

其中，随机微分 dP 和 dD 分别由(9.2.2)式和(9.2.1)式给出，由伊藤引理，dG 服从如下关系式：

$$dG=\mu_g dt+\sigma_g dB \tag{9.2.8}$$

$$\mu_g\equiv\frac{\mu P\partial G/\partial P+\partial G/\partial t+\frac{\sigma^2}{2}\partial^2 G/\partial P^2}{G} \tag{9.2.9}$$

$$\sigma_g\equiv\frac{\sigma P\partial G/\partial P}{G} \tag{9.2.10}$$

将 $P(t)$，$B(t)$ 和 $G(t)$ 的变动代入(9.2.7)式并利用(9.2.6)式得到：

$$dI=[(\mu-r)I_p+(\mu_g-r)I_g]dt+[\sigma I_p+\sigma_g I_g]dB(t) \tag{9.2.11}$$

现在我们更严格地限定套利组合是完全无风险的，在这种意义上，它的收益率在时间 $[0,T]$ 内不是随机的。这可以通过选择 $I_g=I_g^*$ 和 $I_p=I_p^*$ 来保证：

$$\sigma I_p^*+\sigma_g I_g^*=0,\quad \forall t\in[0,T] \tag{9.2.12}$$

隐含着：

$$\frac{n_p^*(t)}{n_g^*(t)}=-\frac{\partial G(t)}{\partial P} \tag{9.2.13}$$

对任何 $t\in[0,T]$，其中 n_p^* 和 $n_g^*(t)$ 分别是自融资的无风险组合中股票和期权的个数。注意，除非 $\partial G(t)/\partial P$ 一直是常数，否则为保证组合一直处于无风险状态，$n_p^*(t)$ 和 $n_g^*(t)$ 必定随时间变化而变化。这样的组合被称为完美对冲的组合，而 $-\partial G(t)/\partial P$ 被称为对冲比率。

对所有 $t\in[0,T]$，用(9.2.6)式和(9.2.13)式得到动态组合策略，这个组合是无风险的而且不需要净投资。因而它的收益 dI 是非随机，且必为零。否则的话，就存在一个无成本、无风险的动态组合策略可获正的收益，与无套利相矛盾。因而，为了避免套利，必有：

$$(\mu-r)I_p^*(t)+(\mu_g(t)-r)I_g^*(t)=0 \tag{9.2.14}$$

其中，$\mu_g(\cdot)$ 写成是时间变量 t 的函数，强调它是随时间变化而变化的。

令人惊奇的是，这样一个简单的无套利条件，导出 G 必须满足如下二阶线性抛物型偏微分方程(PDE)：

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2\frac{\partial^2 G}{\partial P^2}+rP\frac{\partial G}{\partial P}+\frac{\partial G}{\partial t}-rG=0 \tag{9.2.15}$$

并满足以下两个边界条件：$G(P(T),T)=\mathrm{Max}[P(T)-X,0]$ 和 $G(0,t)=0$。

当然，惟一的解是布莱克—斯科尔斯公式：

$$G(P(t),t)=P(t)\Phi(d_1)-Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{9.2.16}$$

$$d_1\equiv\frac{\log(P(t)/X)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-1}} \tag{9.2.17}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$d_2 \equiv \frac{\log(P(t)/X)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{9.2.18}$$

其中，$\Phi(\cdot)$是标准正态累积分布函数，$(T-t)$是至期权到期日的时间。

(A1)和(A3)假设的重要性是明显的：布朗运动(连续样本路径)和连续交易的能力的结合使我们可以构造一个完美的对冲组合。不管哪一个假设不存在，就可能出现套利组合的收益不为零且是随机的情况。如果是这样，那么套利定价原理就无法使用。

布莱克—斯科尔斯公式的默顿推导同样也显示了伊藤引理的作用，它给出了期权价格 G 的变动并导出 PDE(9.2.15)式。在一个离散的时间序列中，即使最简单的线性随机过程要得到非线性函数的变动一般也是不可能的。然而知道期权价格的变动是精确地构造完美对冲组合所需要的。

更为重要的是，期权、股票和债券的自融资完美对冲组合的存在，隐含着期权可以由只包括股票和债券的自融资动态交易策略复制。复制组合的初始成本必定等于期权的价格，这是因为复制组合是自融资的并且复制了期权到期日的收益。对冲比率提供了执行复制策略的方法。

期权的灵敏度

G 对其他变量的灵敏度在交易和管理期权组合中是非常关键的，专业投资者用特殊的希腊字母来表示 G 的这些偏导数，[1]也就是为人所知的期权灵敏度，或非正式语“Greeks”：[2]

$$\text{Delta} \quad \Delta \equiv \frac{\partial G}{\partial P} \tag{9.2.19}$$

$$\text{Gamma} \quad \Gamma \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \tag{9.2.20}$$

$$\text{Theta} \quad \Theta \equiv \frac{\partial G}{\partial t} \tag{9.2.21}$$

$$\text{Rho} \quad \mathrm{R} \equiv \frac{\partial G}{\partial r} \tag{9.2.22}$$

$$\text{Vega} \quad \mathcal{V} \equiv \frac{\partial G}{\partial \sigma} \tag{9.2.23}$$

对布莱克—斯科尔斯公式(9.2.16)而言，这些期权灵敏度可以解析估算：

$$\Delta \equiv \Phi(d_1) \tag{9.2.24}$$

$$\Gamma \equiv \frac{\phi(d_1)}{P\sigma\sqrt{T-1}} \tag{9.2.25}$$

---

① 当然，偏导数在本文中指的是瞬间变化率。术语的巧合通常不是混淆的原因，但是读者应该注意。

② 当然，“Vega”不是一个希腊字母，v 是 V 的一个简单手写体。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\Theta = -\frac{P\sigma}{2\sqrt{T-1}}\phi(d_1) - Xre^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{9.2.26}$$

$$R \equiv (T-t)Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{9.2.27}$$

$$\mathcal{V} \equiv P\sqrt{T-t}\phi(d_1) \tag{9.2.28}$$

其中 $\phi(\cdot)$是标准正态分布的概率密度函数。我们在第 9.3.3 节讨论期权价格估计方法时会再次讨论这些度量。

9.2.2 鞅定价方法

布莱克与斯科尔斯(Black and Scholes,1973)和默顿(Merto,1973b)提出他们的期权定价模型后，大家很明显地看到，他们的方法同样可用于对其他衍生证券进行定价；找到动态的自融资组合策略以复制衍生证券的收益，应用无套利定价原理，自融资组合的价格就是衍生证券的价格。无套利定价原理使得期权的价格满足像(9.2.15)式一样的偏微分方程，边界条件由衍生证券的特殊条款决定。

一个有趣的事实是，在这个框架下的衍生证券定价并不需要对投资者的偏好作出特殊假定，只要投资者财富越多越高兴就行。投资者对更多财富的追求将导致市场无套利机会。因而利用这种衍生证券定价方法的定价结果不依赖于人的偏好，不管投资者是风险厌恶者也好，风险中性者也好。因此假定投资者偏好是风险中性的定价结果与上述定价结果一定相同。但是在风险中性条件下，所有资产一定有同样的期望收益率，在(A2)假设下，必等于无风险收益率 r。由考克斯和罗斯(Cox and Ross,1976)所得出的这个基本的见解，极大地简化了期权定价公式，因为在风险中性条件下，期权的价格简单地表示为以无风险收益率折现的期望收益：

$$G(t) = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}_t[\mathrm{Max}[P^*(T)-X,0]] \tag{9.2.29}$$

然而，(9.2.29)式中的条件均值必须按随机变量 $P^*(T)$来估计而不是 $P(T)$，其中 $P^*(T)$是风险中性调整后的到期日股票价格。

在(A3)假设下，给定 $P(t)$，$P(T)$的条件分布是 $\mathrm{E}[\log P(T)\mid P(t)] = \log P(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$，$\mathrm{Var}[\log P(T)\mid P(t)] = \sigma^2(T-t)$的对数正态分布。在风险中性条件下，所有资产的期望收益率必为 r，风险中性的最终股票价格 $P^*(T)$的条件分布也是对数正态分布，且有 $\mathrm{E}[\log P(T)\mid P(t)] = \log P(t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$，$\mathrm{Var}[\log P(T)\mid P(t)] = \sigma^2(T-t)$。

由于这种思路是假定投资者是风险中性情况下，对衍生证券进行定价，这个方法也称为风险中性定价方法。在(A1)到(A4)的假设下，(9.2.29)式的期望值可作为标准正态分布的分布函数的函数被明确地计算出来，就得到布莱克—斯科尔斯公式(9.2.16)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

为强调风险中性定价模型在评价收益现金流中的普遍性，(9.2.29)式经常写成：

$$G(t)=e^{-r(T-t)}E_t^*[\mathrm{Max}[P(T)-X,0]] \tag{9.2.30}$$

其中，E_t^* 的星号表示期望取自于按照风险中性调整后的概率分布。在更正式的情况下，哈里森和克雷普斯(Harrison and Kreps，1979)表明，调整的概率分布正好是股票价格服从鞅时的概率分布；因而他们将调整的分布称为“等价的鞅测度”(equivalent martingale measure)。相应地，风险中性定价方法被称为鞅定价技术。在第 9.4 节中我们将广泛地利用这种定价技术，通过蒙特卡罗模拟来估算像(9.2.30)式那样的期望值。

9.3 参数期权定价模型的实现

由于有太多的不同种类的期权和其他衍生证券，实际上不可能描述出一个完全一般化的方法涵盖所有衍生证券定价公式。每一个衍生证券的特点决定着计算它的价格的最有效的方法，但是参数期权定价模型的计算方法有共同的特征。期权定价模型中标的证券(称为基础资产)价格的变动由有限个参数决定，在这一节里，我们将关注这些共同的特征。

为了简化术语，除非另作说明，我们将用“期权”来表示一般的衍生证券，用“股票”来表示衍生证券的标的或基础资产。虽然一些衍生证券的特征不同于那些标准的期权，不能用类似的术语描述，但我们不必考虑通用意义上的一般化。在完成建立一般定价公式的结构后，我们将修改模型以适合特殊的衍生证券。

9.3.1 资产价格变动的参数估计

在这一节的题目中，“参数”一词用来强调期权定价公式与描述标的资产价格变动的有关假定及参数的联系。在这些假定下可得到对期权价格非常漂亮的解，但是假定往往不能得到实证数据的支持。这对定价公式的成功并不是个好兆头。实际上，任何期权定价模型成功的实证研究最重要的方面可能是正确地确定股票价格的变动，由于价格变动的不确定的复杂性，我们将在第 12 章考虑无参数方案。

但是现在，假设股票价格过程 $P(t)$ 具有确定的形式，但参数为参数空间 Θ 中未知向量 $\boldsymbol{\theta}$。价格满足以下的随机微分方程：

$$dP(t)=a(P,t;\boldsymbol{\alpha})dt+b(P,t;\boldsymbol{\beta})dB(t),\quad t\in[0,T] \tag{9.3.1}$$

其中，$B(t)$ 是标准威纳过程，$\boldsymbol{\theta}\equiv[\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}']'$ 是一个 $(k\times1)$ 的未知参数向量。$a(P,t;\boldsymbol{\alpha})$ 和 $b(P,t;\boldsymbol{\beta})$ 分别称为漂移和扩散函数，或统称为系数函数。例如，布莱克和斯科尔斯(Black and Scholes，1973)假设的对数正态分布由以下系数函数决定：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$a(P,t;\boldsymbol{\alpha})=\mu P \tag{9.3.2}$$

$$b(P,t;\boldsymbol{\beta})=\sigma P \tag{9.3.3}$$

在这种情况下，参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 只包括了两个元素，常数 α 和 β。[①]

在更为一般的情况下，函数 $a(P,t;\boldsymbol{\alpha})$ 和 $b(P,t;\boldsymbol{\beta})$ 必须以某种形式加以限定以保证随机微分方程(9.3.1)式存在解[例如，见安诺德(Arnold，1974)]。同时，为便于处理，我们假设系数函数只依赖于当期价格 $P(t)$；因而(9.3.1)式的解是一个马尔可夫过程(Markov process)。这个假设并不像看起来那么严格，因为非马尔可夫过程通常可通过状态的扩展重新解释为一个向量马尔可夫过程，特别是增加状态变量的数目以至于价格和状态变量的集合是一个向量马尔可夫过程。但在实用中，扩展状态会引起不易处理的情况，这样就会使克服原始价格过程的非马尔可夫性变得更为困难。

为了期权定价，我们所关心的是如何估计 $\boldsymbol{\theta}$，因为在 $P(t)$ 基础上的期权定价公式是 $\boldsymbol{\theta}$ 中的一些或全部参数的函数。假设期权定价函数的解析式存在并为 $G(P(t),\boldsymbol{\theta})$，当然期权价格还与其他变量有关，如执行价，到期日和利率，为方便，先不考虑这些。[②] 期权价格的估计值 $\hat{G}$ 可写成 $\hat{G}=G(P(t),\hat{\boldsymbol{\theta}})$，其中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计量。自然，$\hat{G}$ 的性质与 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的性质紧密相关，也就是说参数向量的估计不精确会使期权价格估计不精确，反之亦然。为了对 $\hat{G}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 精确度的关系进行定量，我们首先必须考察得到 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的过程。

极大似然估计

得到 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的最直接的方法是从历史数据中估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$。假设我们有一个含有 $n+1$ 个 $P(t)$ 样本观察值序列，观测点 $t_0<t_1<\cdots<t_n$ 非随机，且不必是相等步长。这是金融时间序列一个很重要的特征，因为市场一般在周末和假日关闭，造成不规则的样本间隔。由于假定 $P(t)$ 是一个连续的马尔可夫过程，不规则的样本不会引起概念性问题。样本联合密度函数 f 由下式给定：

$$f(P_0,\cdots,P_n;\boldsymbol{\theta}) = f_0(P_0;\boldsymbol{\theta})\prod_{k=1}^{n} f(P_k,t_k \mid P_{k-1},t_{k-1};\boldsymbol{\theta}) \tag{9.3.4}$$

其中，$P_k\equiv P(t_k)$，$f_0(P_0)$ 是 P_0 的边际密度函数，$f(P_k,t_k\mid P_{t-1},t_{k-1};\boldsymbol{\theta})$ 是给定 P_{k-1} 条件下 P_k 的条件密度函数，也称作转移密度函数。为了简便符号，我们将 $f(P_k,t_k\mid P_{k-1},t_{t-1};\boldsymbol{\theta})$ 简化为 f_k。

给定(9.3.4)式及观察值 $P_0,\cdots,P_n$，参数向量可以通过极大似然估计法估计[见附录 A.4 和西尔雅(Silvey，1975，第 4 章)]。为定义极大似然估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$，令 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ 表示对数似然函数，$P_0,\cdots,P_n$ 联合密度函数的自然对数可看成 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数：

---

① 注意，虽然漂移和分布函数依赖于不同的参数向量 α 和 β，但这两个向量中可能包含有一些共同的参数。
② 即使不能获得 G 的独立形式，在解 G 的数值解时，θ 仍是一个必要的输入量，必须予以估计。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \sum_{k=0}^{n} \log f_k \tag{9.3.5}$$

极大似然估计量为：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \equiv \underset{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}{\operatorname{argmax}}\, \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \tag{9.3.6}$$

在恰当的规则条件下，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是一致的估计量并且服从正态极限分布：

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, \mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})), \quad \mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \lim_{n\to\infty} -\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'}\right] \tag{9.3.7}$$

其中$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$称为信息矩阵。当 n 很大时，(9.3.7)式的渐近分布可使我们将 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的方差近似为：

$$\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] \approx \frac{1}{n}\mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \tag{9.3.8}$$

信息矩阵$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$可用以下公式估计：

$$\hat{\mathcal{I}} = \frac{1}{n}\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'} \tag{9.3.9}$$

而且，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 在所有的一致的和一致渐近正态估计(CUAN)中是渐近有效的估计量；即在所有的 CUAN 估计量中，它有最小的渐近方差。因而，在有可能的情况下，它是优先选择的估计方法。当然，极大似然估计只有当似然函数可得到精确形式时才可使用，在我们这种情况下，需要得到转移密度函数 f_k。但是，对 f_k 的精确形式一般是得不到的。

然而，f_k 的特征隐含在 PDE 的解中是可能的。特别是，固定条件变量 P_{k-1} 和 t_{k-1}，使 f_k 成为 P_k 和 t_k 的函数；删去下标 k，写成 $f_k(P,t\,|\,P_{k-1},t_{k-1})$，那么就服从 Fokker-Planck 方程或称前向方程，因而 f_k 必须满足下式[见罗(Lo,1998)关于衍生证券文章]：

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = -\frac{\partial(a f_k)}{\partial P} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(b^2 f_k)}{\partial P^2} \tag{9.3.10}$$

初始条件：

$$f_k(P, t_{k-1}\,|\,P_{k-1}, t_{k-1}) = \delta(P-P_{k-1}) \tag{9.3.11}$$

其中，$\delta(P-P_{k-1})$是以 P_{k-1}为中心的 Dirac-delta 函数。当(9.3.10)式有解析解，极大似然估计是可行的，这同时取决于系数函数 a 和 b 的复杂性。

一旦得到 f_k，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的值就可以由给定的数据 $P_0,\cdots,P_n$ 计算出来。为说明这个统计量，我们必须检验 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的一致性和渐近正态性是否满足。在某些情况下，它们并不满足。例如，对数正态分布 $dP=\mu P dt+\sigma P dB$ 违反了平稳性的要求。但是在这种情况下，数据简单的对数变换就满足规则条件：$r_1, r_2, \cdots, r_n$，其中，$r_k \equiv \log P_k/P_{k-1}$，是一个平稳序列。$\boldsymbol{\theta}$ 的极大似然估计可以用$\{r_k\}$来计算。我们将在第 9.3.2 节再次讨论这个例子。

GMM 估计

对 a 和 b 系数函数的许多组合，(9.3.10)式无解析解，因而在这些情况下极大似然估

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

计是不可行的。汉森和沙因克曼（Hansen and Scheinkman，1995）提出了一种替代方法，即用汉森（Hansen，1982）的广义矩估计法（GMM）的估计量，他们将这种方法扩展到严格平稳连续时间马尔可夫过程（见附录中有关 GMM 的内容）。

GMM 方法的焦点当然是矩条件，在这些条件中规定了参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 要满足的一些条件。GMM 估计量是使样本矩与它们的总体矩之间的距离最小化的参数向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$。

GMM 估计量的性质取决于矩条件和距离度量的选择，对标准的离散时间的 GMM 的应用，这两个问题已经有彻底研究。矩条件是条件信息和最优化或均衡条件相互作用。像欧拉方程一样的条件，它是线性工具变量估计的正交条件（见附表 A.1）。在一些情况下，最优（在渐近的意义上）距离度量可以解析推出[例如见汉密尔顿（Hamilton，1994，第 14 章）]，同时也可得到有效边界[见汉森（Hansen，1985）和汉森，希顿和奥加基（Hansen，Heaton and Ogaki，1988）]。

不过对在金融中连续时间问题，特别是那些涉及衍生证券的应用，GMM 估计量的性质知之甚少。实际上，汉森和沙因克曼（Hansen and Scheinkman，1995）的主要贡献之一就是给出了如何用离散的样本数据为连续时间的马尔可夫过程设计矩条件。虽然，对连续时间过程 GMM 估计的详细说明超出了本书的范围，但是这种方法的核心问题可以通过一个简单的例子来说明。

假设我们希望估计如下平稳扩散过程的参数：

$$dp=-\gamma(p-\mu)dt+\sigma dB,\quad p(0)=p_0>0,\gamma>0 \tag{9.3.12}$$

这是一个连续时间平稳的 AR(1)过程的表述，无条件均值为 μ（详见第 9.3.4 节），因而满足汉森和沙因克曼（Hansen and Scheinkman，1995）的假设。

为给$\{p(t)\}$设计矩条件，汉森和沙因克曼（Hansen and Scheinkman，1995）应用无穷算子$\mathcal{D}_0$，也叫“丁金算子（Dynkin operator）”，它是条件期望的时间导数：

$$\mathcal{D}_0[\cdot]\equiv\frac{d}{dt}E_0[\cdot] \tag{9.3.13}$$

其中，期望值 $E_0[\cdot]$是以 $p(0)=p_0$ 为条件的条件期望。

无穷小算子在得到扩散过程的矩条件方面有几个重要的应用。例如，以下是对 dp 期望值的计算：

$$\mathrm{E}_0[dp]=\mathrm{E}_0[-\gamma(p-\mu)dt]+\mathrm{E}_0[\sigma dB] \tag{9.3.14}$$

$$=-\gamma(\mathrm{E}_0[p]-\mu)dt+\sigma\mathrm{E}_0[dB] \tag{9.3.15}$$

$$d\mathrm{E}_0[p]=-\gamma(\mathrm{E}_0[p]-\mu)dt \tag{9.3.16}$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{E}_0[p]=-\gamma(\mathrm{E}_0[p]-\mu) \tag{9.3.17}$$

$$\mathcal{D}_0[p]=-\gamma[\mathrm{E}_0[p]-\mu] \tag{9.3.18}$$

其中，(9.3.14)式和(9.3.15)式应用了以下性质，即线性函数的期望等于期望的线性函数，(9.3.16)式对微分符号应用了同样的性质，同时，布朗运动增量的期望值是零，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(9.3.17)式是(9.3.16)式的另一种写法。

在考虑(9.3.18)式的重要性前，观察(9.3.17)式是 $E_0[p]$ 的一阶线性微分方程，可以很容易地获得 $E_0[p]$ 的解析解(初始条件 $E_0[p(0)]=p_0$)：

$$E_0[p]=p_0 e^{-\gamma t}+\mu$$

运用相似的方法于通过伊藤引理获得 p^2, p^3 的随机微分方程，所有 p 的更高阶矩都可以由相同的方法计算出来。

现在考虑无穷小符号 $\mathcal{D}[\cdot]\equiv dE[\cdot]/dt$ 的非条件形式。一系列类似于(9.3.14)式～(9.3.18)式的计算都服从但有一个重要的差别：无条件期望的时间导数是零，因为 p 是严格的平稳过程，因而我们有约束：

$$\mathcal{D}[p]=-\gamma(E[p]-\mu)=0 \tag{9.3.19}$$

其中隐含着：

$$E[p]=\mu \tag{9.3.20}$$

并且得到一阶条件：p 的无条件期望值等于稳态均值 μ。

更为重要的是，我们可以将无穷小符号应用于 p 的任何变换 $f(\cdot)$，并通过伊藤引理有：

$$\mathcal{D}[f(p)]=E\left[-f'(p)\gamma(p-\mu)+\frac{\sigma^2}{2}f''(p)\right]=0 \tag{9.3.21}$$

可得到很多与 $f(p)$ 的分布相联系的矩条件，每个 f 都有一个矩条件。从这些矩条件出发并在汉森和沙因克曼(Hansen and Scheinkman，1995)所提出的规则条件下，GMM 估计可以用通常的方法来运算。

汉森和沙因克曼(Hansen and Scheinkman，1995)还提出了多点矩条件——揭示了包含于 $f(p)$ 的条件和联合分布的信息，创造性地运用了时间逆向扩散的性质，它们为统计推断提供了渐近性。虽然评述他们的方法如何应用于实际还为时过早，但 GMM 估计量是目前惟一的同时兼顾可计算性和一致性的估计量。

9.3.2 在布莱克—斯科尔斯模型中估计 σ

为解释第 9.3.1 节中的所述的技术，我们考虑布莱克—斯科尔斯模型的补充(9.2.16)式，在(9.2.16)式中必须估计 σ。

关于 σ 有一个普遍的误解，即 σ 是股票简单收益率 R_t 的标准差，例如，如果 IBM 股票收益率的年标准差是 30%，那么通常假定 $\sigma=0.30$。为了明白为什么这是不对的，令价格 $P(t)$ 服从对数正态分布(9.2.2)式，这也是布莱克—斯科尔斯模型所要求的(见第 9.2.1 节)，为简便起见，假定价格样本的步长是相等的，在 $[0,T]$ 内都为 h，因而 $P_k\equiv P(kh)$，$k=0,1,\cdots,n$，$T=nh$。简单收益率 $R_k(h)\equiv(P_k/P_{k-1})-1$ 是对数正态分布，有均值和方

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

差：

$$\mathrm{E}[R_k(h)]=e^{\mu h}-1 \tag{9.3.22}$$

$$\mathrm{Var}[R_k(h)]=e^{2\mu h}\cdot[e^{\sigma^2 h}-1] \tag{9.3.23}$$

因此，IBM 股票的 σ 值并不能只根据 30%标出，因为这是 $\sqrt{\mathrm{Var}[R_k(h)]}$ 的估计而不是 σ 的估计。值得特别指出的是，解(9.3.22)式和(9.3.23)式得到：

$$\sigma=\left[\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{\mathrm{Var}[R_k(h)]}{(1+\mathrm{E}[R_k(h)])^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{9.3.24}$$

因而，均值和标准差分别为 10%和 30%的 IBM 股票的简单收益率的 σ 为 26.8%。30%和 26.8%在大多数实用意义上可视为等同的，前者表示一个执行价为 35 美元、股票现价为 40 美元的一年期看涨期权的布莱克—斯科尔斯价格(8.48 美元)，而后者表示同一期权的布莱克—斯科尔斯价格(8.10 美元)，这在经济学上是显著不同的。

因为大多数股票收益率的统计都是基于简单收益率，如果历史数据不容易得到的话，(9.3.24)式是很有用的公式，它可以迅速地得到 σ 的估计。如果历史数据容易得到，那么用连续复利收益率来计算极大似然估计量 σ 是很简单的，就如我们在第 9.3.1 节和第 9.3.3节讨论的那样。特别是，将伊藤引理用于 $\log P(t)$ 替换掉(9.2.2)式的 dp，得到：

$$d\log P=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma dB=\alpha dt+\sigma dB \tag{9.3.25}$$

其中 $\alpha\equiv\mu-\frac{1}{2}\sigma^2$。因此，连续复利收益率 $r_k(h)\equiv\log(P_k/P_{k-1})$ 是均值为 αh，方差为 $\sigma^2 h$ 的 IID 正态随机变量，而 $r_k(h)/\sqrt{h}$ 样本方差是 σ^2 的很好的估计量；实际上，$r_k(h)/\sqrt{h}$ 的样本方差是 σ^2 的极大似然估计。更正式的，在(9.3.25)式下，连续复利的样本 $r_1(h),\cdots,r_n(h)$ 的似然函数为：

$$\mathcal{L}(\alpha,\sigma)=-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2 h)-\frac{1}{2\sigma^2 h}\sum_{k=1}^{n}(r_k(h)-\alpha h)^2 \tag{9.3.26}$$

在这种情况下，α 和 σ^2 的极大似然估计量可以由下式得到：

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{nh}\sum_{k=1}^{n}r_k(h) \tag{9.3.27}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{nh}\sum_{k=1}^{n}(r_k(h)-\hat{\alpha}h)^2 \tag{9.3.28}$$

而且，因为在(9.2.2)式下，$r_k(h)$ 的变动是 IID 正态随机变量，估计量 $\hat{\sigma}^2$ 的一致性和渐近正态性规则条件都满足(见附录 A.4)。因而，我们保证 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 在 CUAN 统计量中是渐近有效的，渐近协方差矩阵由(9.3.8)式给出。

不规则的样本数据

明白为什么对连续时间过程来说，不规则的样本数据并不会产生问题，注意到样本间

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

隔 h 是不定的而且可在样本中变化而不会影响似然函数(9.3.26)式的形式。例如,假设年收益率有 n_1 个观察值,月收益率有 n_2 个观察值。若 h 是以年为单位,则 $h=1$ 表示持有期为 1 年。对 n_1+n_2 个观察值,σ^2 的极大似然估计量如下：

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\left(r_k(1)-\overline{r(1)}\right)^2+\frac{1}{n_2}\sum_{k=n_1+1}^{n_2}\left(\frac{r_k(1/12)-\overline{r(1/12)}}{\sqrt{1/12}}\right)^2 \tag{9.3.29}$$

其中：

$$\overline{r(1)}=\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}r_k(1),\qquad \overline{r(1/12)}=\frac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n_2}r_k(1/12)$$

注意,(9.3.29)式中的第二项可以写成：

$$\frac{12}{n_2}\sum_{k=n_1+1}^{n_2}(r_k(1/12)-\overline{r(1/12)})^2$$

就成为月连续复利收益率的简单方差估计量,重新划分了每年的频率。

不规则的样本数据可被轻易地调整是连续时间随机过程最大的优势。但是,这种优势是有成本的:这种灵活性是由于每个连续时间过程对所有有限维分布施加强参数限制条件的结果(见第 9.1.1 节对有限维分布的定义)。特别是,随机微分方程(9.3.25)式将独立性和正态性强加于所有 $\log P(t)$ 的变动,并且使均值和方差在变动间隔内保持线性,因而,从周五到周一的连续复利收益率的均值和方差必然是周二到周三的均值和方差的 3 倍,周二/周四的收益率与周六/周一收益率必有相同的分布,等等。实际上,像(9.3.25)式那样的连续时间随机过程的表述包含了大量的参数假定。所以,用连续时间随机过程来处理不规则样本是否合适,必须仔细考虑其中隐含的许多假设条件。

连续记录渐近

由于我们可以从变动的样本数据中估计 α 和 σ,那么有一个很自然的问题需考虑,那就是如何取样本收益率以得到最佳的估计量？10 个年观察值是否比 100 个日观察值更好,还是要取与我们最后感兴趣的范围相匹配的样本区间,例如与我们要定价的期权到期日一致？

要讨论这些问题,首先再次考虑包括 $n+1$ 个价格的样本,$P_0,P_1,\cdots,P_n$,观测点在固定的时间区间$[0,T]$上等步长,间隔为 h,因而 $P_k\equiv P(kh)$,$k=0,\cdots,n$,$T\equiv nh$。$[\alpha,\sigma^2]$的极大似然估计量的方差由(9.3.7)式给出,可写出解析式：

$$\mathrm{Var}[\hat{\alpha}]\overset{a}{\approx}\frac{\sigma^2}{T} \tag{9.3.30}$$

$$\mathrm{Var}[\hat{\sigma}^2]\overset{a}{\approx}\frac{2\sigma^4}{n} \tag{9.3.31}$$

注意(9.3.31)式并不依赖于样本间隔 h。当 T 固定而 n 无限增大(h 趋于 0),$\hat{\sigma}^2$ 变得

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

更为精确。因为 σ^2 的“最好”的估计量是具有最小渐近方差的估计量，也就是说，不管样本间隔如何，尽可能多的观察值所得到的估计量是最好的。

使我们感兴趣的是，这个结论对 α 的估计量并不成立，它的估计量依赖于 T 而不是 n。在一个固定的时间区间内更频繁地取样本（通常称为连续记录渐近）不会增加 $\hat{\alpha}$ 的精确性，一个基于尽可能长的时间区间的 α 估计量是最好的估计量。

表 9.2a $\hat{\alpha}$ **的渐近标准差**

n	h									
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1\,024}$
2	0.200 0	0.282 8	0.400 0	0.565 7	0.800 0	1.131 4	1.600 0	2.262 7	3.200 0	4.525 5
4	0.141 4	0.200 0	0.282 8	0.400 0	0.565 7	0.800 0	1.131 4	1.600 0	2.262 7	3.200 0
8	0.100 0	0.141 4	0.200 0	0.282 8	0.400 0	0.565 7	0.800 0	1.131 4	1.600 0	2.262 7
16	0.070 7	0.100 0	0.141 4	0.200 0	0.282 8	0.400 0	0.565 7	0.800 0	1.131 4	1.600 0
32	0.050 0	0.070 7	0.100 0	0.141 4	0.200 0	0.282 8	0.400 0	0.565 7	0.800 0	1.131 4
64	0.035 4	0.050 0	0.070 7	0.100 0	0.141 4	0.200 0	0.282 8	0.400 0	0.565 7	0.800 0
128	0.025 0	0.035 4	0.050 0	0.070 7	0.100 0	0.141 4	0.200 0	0.282 8	0.400 0	0.565 7
256	0.017 7	0.025 0	0.035 4	0.050 0	0.070 7	0.100 0	0.141 4	0.200 0	0.282 8	0.400 0
512	0.012 5	0.017 7	0.025 0	0.035 4	0.050 0	0.070 7	0.100 0	0.141 4	0.200 0	0.282 8
1 024	0.008 8	0.012 5	0.017 7	0.025 0	0.035 4	0.050 0	0.070 7	0.100 0	0.141 4	0.200 0

注：表 9.2a 为在假定基本间隔 $h=1$ 年和 $\sigma=0.20$ 下，不同 n 和 h 值分别对应的 $\hat{\alpha}$ 的渐近标准方差。因为恒有 $T\equiv nh$；所以 $n=64$ 和 $h=1/16$ 则意味着一个跨越 4 年的有 64 个观测值的样本。

n 和 h 值变动下的 $\hat{\alpha}$ 的渐近标准差，假定 h 的基准间隔为 $h=1$ 年，$\sigma=0.20$，$T\equiv nh$，因而 $n=64$ 和 $h=1/16$ 意味着一个含 64 个观察值的样本跨度为 4 年。

表 9.2a 和表 9.2b 说明了在 n 和 h 值不同取值下，$\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 两个估计量的渐近标准差的显著不同，假定 h 的基准间隔为 $h=1$ 年，$\sigma=0.20$，$T\equiv nh$，因而 $n=64$，$h=1/16$ 意味着一个含 64 个观察值的样本跨度为 4 年。

在表 9.2a 中，$\hat{\alpha}$ 的标准差越往下越小（随 T 的增大），越往右越大（随 T 的减小），在对角线上保持不变（T 保持不变）。为估计 α，拥有 2 个观察值 6 个月为间隔的月收益率和拥有1 024个观察值，一天四次观察所得到估计量的精确度是一样的。

在表 9.2b 中，模式有很大的不同。表中各列的数字按列相同——只有观测数 n 才决定了 $\hat{\sigma}^2$ 的标准差。在这种情况下，拥有1 024个观察值，一天 4 次观察的样本要比间隔为 6 个月只有 2 个观察值的样本得到的估计值更为精确。

在连续记录渐近下，$\hat{\sigma}^2$ 的一致性和 $\hat{\alpha}$ 的不一致性最初是由默顿（Merton，1980）在研究几何布朗运动观测到的，同样对一般扩散过程成立，这也是扩散样本路径的不可微性所产生的性质[详细讨论请见伯特西玛斯、科根和罗（Bertsimas，Kogan and Lo，1996）]。实际上，如果我们在任何有限区间内观测到 $P(t)$ 的连续取值，就可以无误地确定扩散系数 $\sigma(\cdot)$，即使扩散系数随时间变化，也可以做到这一点。但在实际中我们观测不到一个连

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续样本路径——连续时间的概念是个近似，近似的程度随用途的变化而变化。

表 9.2b $\hat{\sigma}^2$ 的渐近标准差

n	h									
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1\,024}$
2	0.040 0	0.040 0	0.040 0	0.040 0	0.040 0	0.040 0	0.040 0	0.040 0	0.040 0	0.040 0
4	0.028 3	0.028 3	0.028 3	0.028 3	0.028 3	0.028 3	0.028 3	0.028 3	0.028 3	0.028 3
8	0.020 0	0.020 0	0.020 0	0.020 0	0.020 0	0.020 0	0.020 0	0.020 0	0.020 0	0.020 0
16	0.014 1	0.014 1	0.014 1	0.014 1	0.014 1	0.014 1	0.014 1	0.014 1	0.014 1	0.014 1
32	0.010 0	0.010 0	0.010 0	0.010 0	0.010 0	0.010 0	0.010 0	0.010 0	0.010 0	0.010 0
64	0.007 1	0.007 1	0.007 1	0.007 1	0.007 1	0.007 1	0.007 1	0.007 1	0.007 1	0.007 1
128	0.005 0	0.005 0	0.005 0	0.005 0	0.005 0	0.005 0	0.005 0	0.005 0	0.005 0	0.005 0
256	0.003 5	0.003 5	0.003 5	0.003 5	0.003 5	0.003 5	0.003 5	0.003 5	0.003 5	0.003 5
512	0.002 5	0.002 5	0.002 5	0.002 5	0.002 5	0.002 5	0.002 5	0.002 5	0.002 5	0.002 5
1 024	0.001 8	0.001 8	0.001 8	0.001 8	0.001 8	0.001 8	0.001 8	0.001 8	0.001 8	0.001 8

注：n 和 h 变动下的 $\hat{\sigma}^2$ 渐近标准差，假定 h 的基准间隔为 $h=1$ 年，$\sigma=0.20$，$T\equiv nh$，因而 $n=64$ 和 $h=1/16$ 意味着一个含 64 个观察值的样本跨度为 4 年。

当样本间隔变得很小时，其他的问题会跟着出现，诸如买卖差价效应，不同时间交易，相关的市场微观结构问题等（见第 3 章）。例如，假设我们决定用日数据来估计 σ——那么如何对待周末和假日呢？一种选择是完全忽略它们，这等同于假定当闭市时，价格无波动率，这意味着周五收盘价总是等于周一的开盘价，这与事实不符。另一种方法是用(9.3.29)式来表示周末的情况，但这种过程隐含假定当闭市时，价格过程有相同的波动率，同样表示周五至周一的收益率是周一至周二收益率的 3 倍。根据弗兰切和罗尔(French and Roll，1986)所指出的，这同样与事实不符。

更频繁地抽取样本必然引起更高的成本，不幸的是，没有一般的原则来指导如何进行这样的权衡——这必然由个人在不同的用途和在可得到的数据的基础上进行抉择。[①]

9.3.3 期权定价估计量精确性的计量

当标的资产参数的极大似然估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 已经得到，那么期权价格 G 的极大似然估计量可用 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 代入期权定价公式（或数值算法中）得出。[②] 由于 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 包含了估计误差，$\hat{G}\equiv G(P(t),\hat{\boldsymbol{\theta}})$ 也同样包含有估计误差，在交易和对冲中必须度量它的精确性。这可以对 $G(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ 进行

① 关于样本间隔和样本大小相互作用的详细分析见伯特西玛斯、科根和罗(Bertsimas，Kogan and Lo，1996)，罗和麦金雷(Lo and MacKinlay，1989)、珀伦(Perron，1991)及希勒和珀伦(Shiller and Perron，1985)。

② 这是根据不变性原理，一个参数向量的非线性函数的极大似然估计量是参数向量的极大似然估计量的非线性函数。例如，见泽纳(Zehna，1966)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

一阶泰勒展开来计算它的渐近分布(见附录 A.4)。

$$\sqrt{n}(\hat{G}-G)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,V_f(\theta)) \tag{9.3.32}$$

$$V_f(\boldsymbol{\theta})\equiv\frac{\partial G(P(t),\boldsymbol{\theta})'}{\partial\boldsymbol{\theta}}\mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial G(P(t),\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}} \tag{9.3.33}$$

其中,$G\equiv G(P(t),\boldsymbol{\theta})$,$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$是由(9.3.7)式定义的信息矩阵。因而,对较大的 n,$\hat{G}$ 的方差近似于:

$$\mathrm{Var}[\hat{G}]\approx\frac{1}{n}V_f(\boldsymbol{\theta}) \tag{9.3.34}$$

V_f 可由下式估计:

$$\hat{V}_f=V_f(\hat{\boldsymbol{\theta}})\equiv\frac{\partial G(P(t),\hat{\boldsymbol{\theta}})'}{\partial\boldsymbol{\theta}}\mathcal{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\frac{\partial G(P(t),\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\theta}} \tag{9.3.35}$$

用同样的方法,期权的灵敏度估计量的精确度也可以计量,估计量包括了期权的 Delta、Gamma、Theta、Rho 和 Vega。

布莱克—斯科尔斯例子

作为对这些结论的说明,考虑布莱克和斯科尔斯(Black and Scholes,1973)例子,$P(t)$服从几何布朗运动,

$$dP(t)=\mu P(t)dt+\sigma P(t)dB(t) \tag{9.3.36}$$

在上式中,惟一感兴趣的参数是 σ。因为 σ^2 的极大似然函数估计量 $\hat{\sigma}$ 有渐近分布 $\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,2\sigma^4)$(见第 9.3.2 节),布莱克—斯科尔斯看涨期权价格估计量 $\hat{G}$ 的渐近分布是:

$$\sqrt{n}(\hat{G}-G)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,V_f),\quad V_f\equiv\frac{T-t}{2}P^2(t)\sigma^2\phi^2(d_1) \tag{9.3.37}$$

其中,$\phi(\cdot)$是标准正态分布的密度函数,d_1 由(9.2.17)式给定。

从(9.3.37)式给出的渐近方差 v_f,可以得到一些比较简单的统计结果:

$$\frac{\partial V_f}{\partial P}=-P\sigma\sqrt{T-t}\phi^2(d_1)d_2,\quad \frac{\partial V_f}{\partial X}=\frac{P^2}{X}\sigma\sqrt{T-t}\phi^2(d_1)d_1 \tag{9.3.38}$$

$$\frac{\partial V_f}{\partial(T-t)}=\frac{1}{2}P^2\sigma^2\phi^2(d_1)\times\left[1-\left(\frac{(r+1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\left(\frac{\log(P/X)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right] \tag{9.3.39}$$

可建立如下不等式:

$$\frac{\partial V_f}{\partial P}\gtreqless 0\quad 如果\frac{P}{X}\lesseqgtr c_1 \tag{9.3.40}$$

$$\frac{\partial V_f}{\partial X}\gtreqless 0\quad 如果\frac{P}{X}\gtreqless c_2 \tag{9.3.41}$$

$$\frac{\partial V_f}{\partial(T-t)}>0\quad 如果\frac{P}{X}\notin\left(c_2,\frac{1}{c_2}\right) \tag{9.3.42}$$

$$\frac{\partial V_f}{\partial(T-t)}>0\quad 如果\quad c_3<1 \tag{9.3.43}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中：

$$c_1 \equiv e^{-(r-\sigma^2/2)(T-t)}$$

$$c_2 \equiv e^{-(r+\sigma^2/2)(T-t)}$$

$$c_3 \equiv \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

不等式(9.3.40)显示，如果股票价格与执行价之间的比率小于 c_1，那么 $\hat{G}$ 的精确度将随着股票价格水平的上涨而下降。但当股票价格超过 Xc_1 时，$\hat{G}$ 的精确度开始提高。不等式(9.3.41)显示了 V_f 与执行价之间类似的关系。

令人感兴趣的是，不等式(9.3.43)既不依赖于股票价格也不依赖于执行价格，因而对期限越短的期权，$\hat{G}$ 的精确度越高。但是即使(9.3.43)式不满足，如果(9.3.42)式成立，那么 $\hat{G}$ 的精确度随 $T-t$ 的增加而下降。

表 9.3 **V_f 的比较静态折现值**

$T-t$	c_1	c_2	$1/c_2$	c_3
1	1.001 5	0.996 7	1.003 3	0.048 2
2	1.002 9	0.993 3	1.006 7	0.068 2
4	1.005 9	0.986 7	1.013 5	0.096 4
8	1.011 8	0.973 6	1.027 1	0.136 3
12	1.017 7	0.960 7	1.040 9	0.167 0
24	1.035 8	0.922 9	1.083 5	0.236 1
48	1.072 9	0.851 8	1.174 0	0.333 9

表 9.3 显示了对不同的 $T-t$ 值，c_1 至 c_3 的值，假定年利率 5%，年标准差 50%，相应的周利率 $r \equiv \log(1.05)/52$，周标准差 $\sigma = 0.50/\sqrt{52}$。给定 c_2 和 $1/c_2$ 的值，如果期权是实值期权或虚值期权时，(9.3.42)式满足。例如，如果股票价格是 40 美元，期权的期限是 24 个星期，执行价超过 42.09 美元或低于 38.02 美元，那么期权价格估计的精确度随着到期日时间的缩短而增加。这与麦克贝恩和默维尔(MacBeth and Merville，1979，1980)的发现相一致，即实值和虚值期权随到期日的临近，估价与实际价格的偏差缩小，这也同时受到伽尔特肯、罗盖尔斯基和蒂尼克(Gultekin，Rogalski and Tinic，1982)的支持，即布莱克—斯科尔斯公式对期限短的期权定价更为精确。①

通过一阶泰勒展开(见附录 A.4)，可以得到期权灵敏度的精确性，因而也可以得到动态对冲策略的精确性。为方便起见，我们将这些计量的渐近方差列于表 9.4 中。

① 当然，对这些实证的规律有很多其他的解释，例如随机波动率的存在，或股权变动的说明错误等。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

9.3.4 资产收益率可预测性效应

第 9.2.2 节所描述的鞅定价方法揭示了(9.2.15)式定价方程独立于 $P(t)$的漂移的事实。因为漂移并不进入 PDE(9.2.15)式。

表 9.4 **布莱克—斯科尔斯看涨期权灵敏度估计的渐近方差**

估计量	渐近方差
$\hat{\Delta}$	$\frac{1}{2}\phi^2(d_1)d_2^2$
$\hat{\Gamma}$	$\frac{1}{2}\Gamma^2(d_1d_2-1)^2$
$\hat{\Theta}$	$2\sigma^4\left[-\frac{P\phi(d_1)(1+d_1d_2)}{4\sigma\sqrt{T-t}}+\frac{Xre^{-r(T-t)}\phi(d_2)d_1}{2\sigma^2}\right]^2$
$\hat{R}$	$\frac{1}{2}(X(T-t)e^{-r(T-t)}d_1\phi(d_2))^2$
$\hat{\mathcal{V}}$	$\frac{1}{2}(\mathcal{V}\,d_1d_2)^2$

注：这些渐近方差都基于假设方差估计量 $\hat{\sigma}^2$ 是极大似然估计量，渐近分布$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)\underset{\sim}{a}\mathcal{N}(0,2\sigma^4)$，因而$\sqrt{n}(F(\hat{\sigma}^2)-F(\sigma^2))\underset{\sim}{a}\mathcal{N}(0,2\sigma^4(\partial F(\sigma^2)/\partial\sigma^2)^2$，其中 $F(\sigma^2)$是期权灵敏度。按标准习惯，列于表中的是$\sqrt{n}(F(\hat{\sigma}^2)-F(\sigma^2))$的渐近方差，必须除以样本大小 n 后得到(非正态化的)灵敏度 $F(\hat{\sigma}^2)$的渐近方差。

为了不失一般性地对期权进行，可以将漂移设为任何变动函数或是常数(服从某些规则条件)。特别是，在等价鞅测度下，所有资产价格都服从鞅，期权的价格是它在到期日时的期望收益的折现值，其中期望值按照风险中性过程 $P^*(t)$来计算：

$$dP^*(t)=rP^*(t)dt+\sigma P^*(t)dB \tag{9.3.44}$$

$$d\log P^*(t)\equiv dP^*(t)=(r-\sigma^2/2)dt+\sigma dB \tag{9.3.45}$$

虽然，风险中性过程不能实证观察，[①]然而对定价以价格服从 $P(t)$过程的股票为标的的期权来说，它仍然是一个极为方便的工具。

而且，从风险中性定价方法得到如下启示：如果对数价格过程的扩散系数是常数 σ，那么不管漂移如何，布莱克—斯科尔斯公式将得到准确的期权价格。这对任何满足如下条件的衍生证券都成立：可用套利定价理论来定价；其中标的资产的对数价格变化用扩散系数为常数的伊藤的扩散过程来描述。衍生证券的定价公式独立于漂移，只决定于扩散

① 然而，在特定条件下可以估计：例如见艾特萨哈里尔和罗(Aït-Schalia and Lo, 1996)，杰克韦斯和鲁宾斯坦(Jackwerth and Rubinstein, 1995)，鲁宾斯坦(Rubinstein, 1994)，希姆科(Shimko, 1993)和第 12.3.4 节。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

系数和衍生资产的合同说明。

这似乎有些似是而非，因为两个股票有同样的 σ 而漂移不同，却得到相同的布莱克—斯科尔斯价格，然而，拥有较大漂移率的股票有较大的期望收益，这隐含着基于那个股票上的看涨期权比基于较小漂移率股票上的看涨期权更有可能在到期日成为实值期权。这种问题可以这样来解释：虽然有较大漂移率的看涨期权的期望收益率确实也较大，但它必须以更大的折现率折现（与标的资产的风险和期望收益相匹配），较高的折现率实际上抵消了较大的期望收益率，使得现值与拥有较小漂移率的股票的看涨期权的价格相同。因而，事实上漂移率在布莱克—斯科尔斯公式中并不起直接作用，但仍发挥间接作用，因为决定了股票、债券和其他金融资产的期望收益率的经济力量也在期权定价中起作用。

当漂移率假定为常数时，这些考虑都显得不重要了，但是如果期望收益率是随时间变化的，而股票收益在某种程度上可预测，那么这种可预测性必须在估计 σ 时加以考虑。

趋势奥斯坦因—乌伦贝克（Ornstein-Uhlenbeck）过程

为说明一个随时间变化的漂移如何影响期权的价格，我们追随罗和万（Lo and Wang，1995）的分析，用下面对数价格 $p(t)$ 过程的随机微分方程替换布莱克—斯科尔斯模型的几何布朗运动（A3）：

$$dp(t)=(-\gamma(p(t)-\mu t)+\mu)dt+\sigma dB \tag{9.3.46}$$

其中：

$$\gamma\geqslant 0,\qquad p(0)=p_0,\qquad t\in[0,\infty)$$

与原始布莱克—斯科尔斯模型的几何布朗运动的变化不同的是，几何布朗运动隐含着对数价格服从增量是 IID 正态的算术随机游动，而这个对数价格是零均值平稳自回归高斯过程——Ornstein-Uhlenbeck 过程的和，它有一确定性的线性趋势，因而我们称之为趋势 O-U 过程。改写（9.3.46）式为：

$$d(p(t)-\mu t)=-\gamma(p(t)-\mu t)dt+\sigma dB \tag{9.3.47}$$

等式表示当 $p(t)$ 离开趋势 μt，它会以一个与偏差成比例的速度被拉回，其中 γ 是调整的速度。这种趋势回复显示了资产收益率的可预测性。

为了对（9.3.46）式产生更深的印象，下面我们看一下它的解析解：

$$p(t)=\mu t+e^{-\gamma t}p_0+\sigma\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}dB(s) \tag{9.3.48}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

从中我们可以得到连续复利 τ 期收益率 $r_t(\tau)\equiv p(t)-p(t-\tau)$ 的无条件矩和各阶矩：[①]

$$E[r_t(\tau)]=\mu\tau \quad \text{（有计算错误 ——译者注。）} \tag{9.3.49}$$

$$\mathrm{Var}[r_t(\tau)]=\frac{\sigma^2}{\gamma}[1-e^{-\gamma t}],\quad \tau\geqslant 0 \tag{9.3.50}$$

$$\mathrm{Cov}[r_{t_1}(\tau),r_{t_2}(\tau)]=-\frac{\sigma^2}{2\gamma}e^{-\gamma(t_2-t_2-\tau)}[1-e^{-\gamma t}]^2$$

$$t_1+\tau\leqslant t_2 \tag{9.3.51}$$

$$\mathrm{Corr}[r_t(\tau),r_{t+\tau}(\tau)]\equiv\rho_1(\tau)=-\frac{1}{2}[1-e^{-\gamma\tau}] \tag{9.3.52}$$

因为(9.3.46)式是一个高斯过程，所以(9.3.49)式～(9.3.51)式矩完全表示了 $r_\tau(t)$ 的有限维分布的特征(见第 9.1.1 节的有限维分布的定义)。与算术布朗运动或非平稳的随机游走(也称随机趋势)不同的是，趋势 O-U 过程被称为趋势平稳，因为它与趋势的偏离服从平稳过程。[②]

注意，趋势 O-U 过程增量的一阶自相关系数(9.3.52)式总是小于等于零，当 τ 趋于 $+\infty$，总是在 $-\frac{1}{2}$ 的下方并接近 $-\frac{1}{2}$。这对很多实际应用来说是很严格的约束，激发了罗和万(Lo and Wang，1995)介绍替代过程，在那些过程中有更为灵活的自相关系数函数。但是作为解释序列相关性对期权价格的影响的，趋势 O-U 过程是非常理想的；尽管趋势 O-U 过程和算术布朗运动不同，但两者都产生相同的风险中性价格过程(9.3.44)式，因而布莱克—斯科尔斯公式仍可用于由(9.3.46)式给定的对数价格变动的股票期权。

但是，虽然对(9.3.46)式来说，布莱克—斯科尔斯公式是相同的，但(9.3.46)式中的 σ 不必与(9.2.2)式中的几何布朗运动的 σ 相同。特别是，(9.2.2)式和(9.3.46)式两过程具有同样的价格观测数据时，毕竟，它们是一个价格过程"真实"DGP 下的两种说明。因而，在序列相关性面前，例如，(9.3.46)式，布莱克—斯科尔斯公式的 σ 的输入数值与在几何布朗运动(9.2.2)式下的 σ 是不同的。

更具体的，令 $\overline{r_1(\tau)}$，$s^2[r_t(\tau)]$ 和 $\rho_1(\tau)$ 分别表示 $\{r_t(\tau)\}$ 的无条件均值、方差和一阶自

---

① 因为我们已经在 $p(0)=p_0$ 的条件上定义无趋势的对数价格过程，称这些矩为"无条件"的可能是有些滥用。但是，在这种情况下的区别首先是语义上的，因为所指的条件变量更多的是指初始条件而非信息变量——如果我们定义初始时间为 $t=0$，初始观测值 $p(0)$ 为 p_0，那么(9.3.49)式～(9.3.52)式或相对于这些初始条件而言是无条件矩。在这章余下的部分我们将接受无条件矩的这个定义。

② 趋势平衡性隐含着 τ 阶收益率的方差在 τ 趋于无穷大时有有限的极限值，在这个例子中是 σ^2/γ，而在随机游动情况下，方差随 τ 的增加而增加。趋势稳定过程通常更易于估计，但它们被视为对金融资产价格的不实际的模型，因为它们不符合通常的印象：即长期资产收益更有风险或当预测期增加，预测价格更不稳定。然而，如果这种印象来源于实际观察，那么这正好与趋势稳定性相一致，因为现在所知，对任何有限数据系列，趋势平衡性和差分平稳性实际上根本难以区分[例如，见第 2 章第 2.7 节，坎贝尔和珀伦(Campbell and Perron，1991)，汉密尔顿(Hamilton，1994，第 17～18 章)，和其他很多他们所引用的"单位根"论文]。然而，罗和万(Lo and Wang，1995)提出了一个一般化的趋势 O-U 过程，在这个过程中包含有随机趋势，在这种情况下，收益率的方差随持有期的增加而增加。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

相关系数，这里并不知道其服从的数据生成过程(data-generating process，DGP)(即数据样本来自的总体所服从的过程——译者注)。[①] 这些量的取值是已知的。所有对真实的数据生成过程的选择必须与这些数据的矩相一致(当然，最好的选择是与所有的矩相一致，在这种情况下，真实的数据生成过程将被发现)。对于算术布朗运动，这隐含着参数(μ,σ^2)必须满足以下关系：

$$\overline{r_t(\tau)}=\mu\tau \tag{9.3.53}$$

$$s^2[r_t(\tau)]=\sigma^2\tau \tag{9.3.54}$$

$$\rho_1(\tau)=0 \tag{9.3.55}$$

从(9.3.54)式，我们得到了著名的结论，即布莱克—斯科尔斯的σ^2可以用连续复利收益率$\{r_t(\tau)\}$的样本方差来估计。

在趋势 O-U 过程的情况下，参数(μ,γ,σ^2)必满足：

$$\overline{r_t(\tau)}=\mu\tau \tag{9.3.56}$$

$$s^2[r_t(\tau)]=\frac{\sigma^2}{\gamma}[1-e^{-\gamma t}],\tau\geqslant0 \tag{9.3.57}$$

$$\rho_1(\tau)=-\frac{1}{2}[1-e^{-\gamma t}] \tag{9.3.58}$$

如果 O-U 过程对 DGP 描述准确，那么这些关系一定成立。而且，(9.3.56)式～(9.3.58)式也同时隐含了如何进行估计参数。特别是，在趋势 O-U 过程的说明下，连续复利收益率的样本方差明显不是σ^2的合适的估计量。

假定收益率的无条件方差不变，σ^2现依赖于γ。解(9.3.57)式和(9.3.58)式可得：

$$\gamma=-\frac{1}{\tau}\log(1+2\rho_1(\tau)) \tag{9.3.59}$$

$$\sigma^2=s^2(r_\tau)\gamma(1-e^{-\gamma t})^{-1}=\frac{s^2(r_\tau)}{\tau}[\gamma^\tau(1-e^{-\gamma\tau})^{-1}] \tag{9.3.60}$$

上式表示了σ^2对γ的依赖关系。

在(9.3.60)式的第二个等式中，σ^2可表示成两项的乘积：第一项是在算术布朗运动是数据生成过程的假设下的标准布莱克—斯科尔斯输入参数，而第二项是趋势 O-U 过程所需的调整因子。由于这个调整因子是γ的增函数，当收益率变得更正(或负)自相关时，股票期权就变得更有价值。更为明确地，(9.3.60)式可写成如下$\rho_1(\tau)$的解析函数：

$$\sigma^2=\frac{s^2[r_t(\tau)]}{\tau}\cdot\frac{\log(1+2\rho_1(\tau))}{2\rho_1(\tau)},\rho_1(\tau)\in\left(-\frac{1}{2},0\right] \tag{9.3.61}$$

收益率的无条件方差$s^2[r_t(\tau)]$固定，当自相关系数的绝对值从 0 增加到$\frac{1}{2}$，σ^2的值

---

① 当然，必须假定各阶矩存在。然而，即使它们不存在，一个类似的但更复杂的理由可基于位置，规模和相关的参数而产生。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

增加至$+\infty$。[①] 这意味着在 $s(t)$ 的变动中的一个说明误差会导致期权定价出现戏剧性的结果。

当收益率间隔 τ 减小，(9.3.61)式中对 $s^2[r_t(\tau)]/\tau$ 的调整因子趋于 1(运用 L'Hôpital定理)。在连续时间极限下，连续复利收益率的标准差是 σ 的一致估计量，σ 的可预测性效应消失。这种印象来源于以下事实，σ 是局部波动率的度量——价格微小变动的波动率，在很短的时间里，价格变化无可预测性(见第 9.1.1 节)。因而，可预测性对 σ 的估计量的影响是一个实证问题，它与样本数据时间间隔和可预测程度的关系有关，并且要具体问题具体分析。我们在下一节中提出一个案例，在这个案例中，我们在布莱克—斯科尔斯模型下定量衡量这些效应。

根据可预测性调整的布莱克—斯科尔斯公式

(9.3.61)式提供了资产价格变动服从趋势 O-U 过程时对其期权进行定价的布莱克—斯科尔斯公式的必要参数。如果日收益率的无条件方差是 $s^2[r_1(1)]$，并且如果 τ 期收益率的一阶自相关系数是 $\rho_1(\tau)$，那么看涨期权的价格由下式给出：

$$C_{ou}(P(t),t;K,T,r,\sigma)=P(t)\Phi(d_1)-Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{9.3.62}$$

其中：

$$\sigma^2=\frac{s^2[r_t(1)]}{\tau}\cdot\frac{\log(1+2\rho_1(\tau))}{([1+2\rho_1(\tau)]^{1/\tau}-1)},\rho_1(\tau)\in\left(-\frac{1}{2},0\right] \tag{9.3.63}$$

d_1 和 d_2 分别由(9.2.17)式和(9.2.18)式定义。

(9.3.62)式是一个简单的有调整波动率的布莱克—斯科尔斯公式。(9.3.63)式中调整因子乘以 $s^2[r_t(1)]/\tau$ 可制成表[见罗和万(Lo and Wang，1995)]；因而，在实际中，为(9.3.58)式中的负自相关性来调整布莱克—斯科尔斯公式是非常简单的：用罗和万(Lo and Wang，1995，表 3)中相应的因子乘以通常的方差估计量 $s^2[r_t(1)/\tau]$，并以此作为布莱克—斯科尔斯公式中的 σ^2。

注意：对在$\left(-\frac{1}{2},0\right]$区间内的所有 $\rho_1(\tau)$ 值，在(9.3.63)式中乘以 $s^2[r_t(1)]/\tau$ 的因子都大于等于一阶自相关系数的绝对值。这意味着，在趋势 O-U 过程条件下的期权价格都大于等于在标准布莱克—斯科尔斯条件下的期权价格，并且期权价格是一阶自相关系数绝对值的增函数。这些是 O-U 过程所独有的特征，对漂移率的其他说明不能一般化[其他形式的例子见罗和万(Lo and Wang，1995)]。

---

① 我们关注自相关系数的绝对值以避免比较资产收益率的负自相关和正自相关时产生的混淆，详见罗和万(Lo and Wang，1995)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 9.5 负自相关回报资产的期权价格

执行价格	布莱克—斯科尔斯价格	趋势 O-U 价格，当每日 $\rho_r(1)=$					
		−0.05	−0.10	−0.20	−0.30	−0.40	−0.45
距离到期日的时间 $T-t=7$ 天							
30	10.028	10.028	10.028	10.028	10.028	10.028	10.028
35	5.036	5.037	5.038	5.042	5.051	5.074	5.108
40	0.863	0.885	0.910	0.973	1.062	1.216	1.368
45	0.011	0.013	0.016	0.024	0.041	0.082	0.137
50	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.005
距离到期日的时间 $T-t=182$ 天							
30	11.285	11.336	11.394	11.548	11.786	12.238	12.725
35	7.558	7.646	7.746	7.998	8.365	9.014	9.668
40	4.740	4.851	4.976	5.286	5.728	6.491	7.244
45	2.810	2.922	3.048	3.361	3.812	4.595	5.375
50	1.592	1.687	1.797	2.073	2.482	3.214	3.963
距离到期日的时间 $T-t=364$ 天							
30	12.753	12.845	12.950	13.218	13.620	14.349	15.102
35	9.493	9.622	9.769	10.133	10.661	11.582	12.501
40	6.908	7.061	7.234	7.660	8.269	9.315	10.343
45	4.941	5.102	5.283	5.732	6.374	7.478	8.566
50	3.489	3.645	3.821	4.261	4.896	6.003	7.106

注：比较布莱克—斯科尔斯算术布朗运动看涨期权价格与对数价格趋势 O-U 过程的期权价格，假设股票价格为 40 美元，连续复利收益率日标准差为 2%，连续复利无风险利率日 log(1.05)/364。自相关系数的绝对值越大则期权价格越高。假设日连续复利的标准方差为 2%，日无风险连续复利为 log(1.05)/364，比较对于价值为 40 美元的股票在股票价格波动呈算术布朗运动假设下的布莱克—斯科尔斯看涨期权价格和在趋势奥斯坦因—乌伦贝克过程的对数价格，可以看出当自相关的绝对值变大时，期权价格上涨。

实证解释

为测定自相关系数的调整的实证意义，表 9.5 表示了在算术布朗运动下和在趋势奥斯坦因—乌伦贝克过程下，不同的持有期、执行价下的布莱克—斯科尔斯价格的比较。假定股票价格为 40 美元时，日自相关系数从−5%至−45%，日收益率的无条件标准差固定为每天 2%，布莱克—斯科尔斯价格由(9.2.16)式计算，假定 σ 等于无条件标准差。趋势奥斯坦因—乌伦贝克过程期权价格计算过程为：给定 τ 和收益率的自相关系数 $\rho_1(\tau)$ 为 −0.05，−0.10，−0.20，−0.30，−0.40 和−0.45，通过解(9.3.57)式和(9.3.58)式求得 σ，将这些 σ 值代入布莱克—斯科尔斯公式(9.2.16)求出价格，其中 $\tau=1$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

表 9.5 的第一张表显示，即使极端的日收益率相关性也不会对短期实值看涨期权产生太大的影响。例如，日相关系数为－45%并没有对执行价为 30 美元的至到期日时间为 7 天的看涨期权产生影响；在趋势 O-U 过程下的价格与标准的布莱克—斯科尔斯价格是相同的，都为10.028美元。但是，即使至到期日只有这么短的时间，当执行价上升，两者的差异就更为显著；对一个两平看涨期权，当不考虑自相性时，值0.863美元，当日相关系数为－45%时，增加到了1.368美元。

但是，随着到期日时间增加，表 9.5 显示，自相关系数的影响也同时增加。当日自相关系数为－10%，到期日时间为 1 年时两平期权的价格为 7.234 美元，当日自相关系数为－45%时，价格上升为10.343美元，而标准布莱克—斯科尔斯价格为6.908美元。这并不奇怪，因为布莱克—斯科尔斯公式的 σ 的灵敏度——期权的 Vega 是至到期日时间的增函数(见第 9.2.1 节)。从(9.2.28)式我们可知，对至到期日时间较短的期权，σ 的变化并不会对看涨期权的价格产生影响，但是至到期日时间较长的期权则更敏感。

总之，资产收益率的可预测性对衍生证券价格的影响依赖于可预测性的一些性质。例如，自相关性对期权价格的重要性完全由自相关程度而定，当然，也根据决定自相关性衰减有多快的数据生成过程而定。基于上述原因，罗和万(Lo and Wang，1995)提出几个比趋势 O-U 过程更适合的、自相关性和可预测性具有更复杂形式的新的随机过程。

9.3.5 隐含波动率为估计量

假设以无红利支付股票为标的时，一年期欧式看涨期权的现在市场价格是7.382美元，它的执行价是 35 美元，股票的现在价格是 40 美元，年无风险收益率单利是 5%。如果布莱克—斯科尔斯模型成立，那么波动率 σ 隐含于上述给定值中，求出值为－0.200。因为当所有其他的参数不变，在布莱克—斯科尔斯公式(9.2.16)中，期权价格与 σ 之间是一一对应的。因而，上述期权的隐含波动率是 0.200 或 20%。隐含波动率这个概念如此普通以至于期权交易者经常以波动率而不是以期权价格进行报价，例如，“一年期欧式看涨期权，执行价为35 000美元，以 20%交易。

由于隐含波动率直接与现在的市场价格相联系(通过布莱克—斯科尔斯公式)，一些投资家认为它们比从历史数据中得到的波动率估计量如 $\hat{\sigma}^2$ 来得更好。隐含波动率经常被认为是“前瞻的”(forward looking)，因为它们是基于现在的价格，而现在的价格可能包含有对未来的预期。

然而，这种观点忽视了一个事实，即隐含波动率与特殊的参数期权定价模型相联系——典型的是布莱克—斯科尔斯模型，接下来它又与特别的标的股票价格变动序列相联系(在布莱克—斯科尔斯情形下是几何布朗运动)。在这一点，问题出在隐含波动率上：如果布莱克—斯科尔斯公式成立，那么参数 σ 可以通过对任何一个期权价格经布莱克—

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

斯科尔斯公式转换后准确无误地得到（每一个期权价格得到相同的 σ 数值）；如果布莱克—斯科尔斯公式不成立，那么隐含波动率很难得到解释，因为它是从布莱克—斯科尔斯公式转化而解得的。因此，用一个期权的隐含波动率来获得波动率的更精确的预测，并用于对其他期权的定价既没有必要，在逻辑上也不一致。

为了更清楚地明白这个问题，考虑这样一个观点，隐含波动率是对未来波动率的更好的预测，因为市场情况的变化引起波动率随时间随机地变化，历史波动率不会快速调整以适合市场的变化。这个观点的愚蠢之处在于，随机波动率与布莱克—斯科尔斯模型所要求的假设是矛盾的——如果波动率真的随时间随机地变化，那么布莱克—斯科尔斯公式就不再是一个正确的定价公式，并且来源于布莱克—斯科尔斯公式的波动率也并没有带来新的信息。

当然，在这种情况下历史波动率估计量也同样无效的，因为它不需要进入到正确的随机波动率期权定价公式中[实际上它没有进入，见赫尔和怀特（Hull and White，1987），威金（Wiggins，1987）和其他文献——见第 9.3.6 节]。正确的方法是，用一个未知参数的历史估计量进入定价公式——在布莱克—斯科尔斯情况中，参数 σ 是与连续复利收益率的历史波动率相联系的，但在其他股票价格变动模型的假设下，历史波动并不至于扮演如此重要的角色。

这就引起了一个有趣的有关布莱克—斯科尔斯公式有效性的争论。如果布莱克—斯科尔斯公式真的是正确的，那么基于同一个股票的一系列期权的隐含波动率必定在数值上相同。当然，实际上并非如此；因而，布莱克—斯科尔斯模型的假设实际上并不是正确的。对这并不要感到惊奇；毕竟，布莱克—斯科尔斯模型的所有假设隐含着期权是多余的证券，同时期权市场也是多余的市场。

困难在于确定布莱克—斯科尔斯假设中的哪些被违背了。例如，如果布莱克—斯科尔斯模型在实证中失败是因为股票价格并不服从对数正态分布，我们可以用其他价格过程，使其对数据拟合更好，在这种情况下，基于同一种股票的期权的"隐含"参数应该在数值上是相等的。另外，如果布莱克—斯科尔斯模型在实证中失败是由于实际中因交易成本和其他机构性限制而不可能进行连续交易所造成的，那么市场是不完善的，期权不是多余的证券，我们就不能期望对任何期权定价公式而言，基于同一股票的期权的"隐含"参数是相同的。在这种情况下，隐含参数差异的程度可以表示期权是如何真正"多余的"。

期权交易者按布莱克—斯科尔斯隐含波动率来进行报价的事实并不与它在定价中非常有用有关，但是这是由于布莱克—斯科尔斯公式作为一个方便的研究和应用方法的普及而进行的一个约定。按点数而不是按期权价格进行报价并没有特别的经济含义，因为人们都知道点数和期权价格之间是一一对应的。另外，正是由于期权交易者按布莱克—斯科尔斯隐含波动率进行报价，因而这并不表示他们是用布莱克—斯科尔斯模型来设定它们价格的。隐含波动率确实传递了信息，但是这种信息是作为隐含波动率基础的市场

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

价格中同样包含的。

9.3.6 随机波动率模型

许多实证研究显示，几何布朗运动(9.2.2)式对特定的证券价格并不是合适的模型。例如，贝克斯(Beckers，1983)，布莱克(Black，1976)，布莱特伯格和戈内德斯(Blattberg and Gonedes，1974)，克里斯蒂(Christie，1982)，法马(Fama，1965)，罗和麦金雷(Lo and MacKinlay，1988，1990c)以及曼德尔布罗特(Mandelbrot，1963，1971)已经证明了就美国股票而言收益率与(9.2.2)式有重大区别：如在偏度、过大的峰度、序列相关性和随时间变化的波动率上的差别。虽然所有这些发现都对期权定价产生影响，但是在近期的文献中，最后一个引起最高度的重视，①部分原因是因为波动率在布莱克—斯科尔斯/默顿公式及实用中太为重要了。

如果在几何布朗运动模型(9.2.2)中 σ 是一个已知的确定性的以时间为自变量的函数 $\sigma(t)$，那么布莱克—斯科尔斯公式仍可应用，只是将 σ 用在期权有效期内的积分 $\int_t^T\sigma(s)ds$ 替换。但是，如果 σ 是随机的，那么情形就变得更为复杂了。例如，假设基础资产的变动给定如下：

$$dP=\mu Pdt+\sigma PdB_p \tag{9.3.64}$$

$$d\sigma=\alpha(\sigma)dt+\beta(\sigma)dB_\sigma \tag{9.3.65}$$

其中 $\alpha(\cdot)$ 和 $\beta(\cdot)$ 是波动率 σ 函数，B_p 和 B_σ 是标准布朗运动，截面相关性 $dB_pdB_s=\rho dt$。在这种情况下，只用套利观点来决定期权的价格是不可能的，一个简单的理由是不存在包含股票和无风险债券的动态"自融资"组合策略可以完美地复制期权的收益。

随机波动率在复制组合中引入了第二个不确定源，如果这个不确定源(B_σ)与股票价格的不确定源(B_σ)并不是完全相关，那么"复制组合"将不可能复制期权在到期日实现的收益[见哈里森和克雷普斯(Harrison and Kreps，1979)，以及达菲和华恩(Duffie and Huang，1985)的详细讨论]。当然 σ 是可交易资产价格，那么在较弱的条件下，存在着包括股票、债券和波动率资产的动态"自融资组合"可完美地复制期权。

在这种另加的对冲证券缺乏的情况下，随机波动率以(9.3.65)式的形式出现，期权定价的惟一可行的方法是应用动态均衡模型。最简单的方法是认为与随机波动率相关的风险并不在均衡中起作用。这是赫尔和怀特(Hull and White，1987)在波动率服从几何布何运动时所采用的方法：

---

① 例如，见埃米因和纳格(Amin and Ng，1993)，鲍尔和罗马(Ball and Roma，1994)，贝克斯(Beckers，1980)，考克斯(Cox，1975)，哥德伯格(Goldenberg，1991)，海斯顿(Heston，1993)，霍夫曼、普拉顿和施韦策(Hofmann，Platen and Schweizer，1992)，赫尔和怀特(Hull and White，1987)，约翰森和香农(Johnson and Shanno，1987)，斯科特(Scott，1987)，以及威金(Wiggins，1987)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$dP = \mu dt + \sigma P dB_p \tag{9.3.66}$$

$$d\sigma^2 = \alpha\sigma^2 dt + \xi\sigma^2 dB_\sigma \tag{9.3.67}$$

假设波动率与总消费无关，这表示期权的均衡价格由布莱克—斯科尔斯公式期权价格的期望值给定，其中期望值是根据期权有效期内的平均波动率取期望值。

利用加曼(Garman，1976b)和考克斯、因格索尔和罗斯(Cox，Ingersoll and Ross，1985b)，威金(Wiggins，1987)的动态均衡模型可得到在经济中波动率风险的均衡价格，其中投资者有对数效用函数，得到一个对期权价格即期期望收益率的均衡条件——形式上是有特定边界条件的 PDE。其他随机波动率的衍生证券定价模型采用了类似的方法，所不同的是均衡模型的形式或投资者的偏好。

参数估计

随机波动率模型最具挑战性的方面是波动率是不可观测的，而期权定价公式是 σ 的函数。至今，很少有人关注像(9.3.64)式～(9.3.65)式的这个重要观点，主要是因为用离散样本数据来估计连续时间模型的存在一些固有的困难。然而，许多人已经在关注离散时间模型：如恩格尔(Engle，1982)的条件异方差自回归(ARCH)模型和它的许多变形(见第 12 章以及鲍勒斯利夫，邹和克洛纳[Bollerslev，Chou and kroner，1992])。

虽然最初提出这些观点的动机并不是期权定价，但 ARCH 模型确实抓住了相应的连续时间模型的精髓。纳尔逊和佛斯特(Nelson and Foster，1994)，纳尔逊和拉马斯沃米(Nelson and Ramaswamy，1990)，以及纳尔逊(Nelson，1991，1992，1996)近年来的研究提出了两者之间的重要联系。特别是，纳尔逊(Nelson，1996)以及纳尔逊和佛斯特(Nelson and Foster，1994)得到了几个离散时间 ARCH 模型的渐近连续过程，其中的一些收敛于赫尔和怀特(Hull and White，1987)以及威金(Wiggins，1987)的连续时间过程。这些估计量的很多实证性质已经被揭示，但无疑仍将是未来研究的主题。

离散时间模型

另一种期权定价的方法是从期权定价的离散时间动态均衡模型开始，假定基础资产价格变动服从 ARCH 模型。虽然在离散时间里用套利定价理论来进行证券定价是不可能的，但是在随机波动率的情况下连续时间形式必然同样诉诸于均衡观点；因而，将连续时间结构完全用于这种情况将不失一般性。这种方法是由埃米因和纳格(Amin and Ng，1993)所采用的，他们得到了一系列价格变动是随机波动率，随机消费增长方差，随机利率和系统性跳跃的期权定价公式，使用的是由布里恩南(Brennan，1979)和鲁宾斯坦(Rubinstein，1976)提出的离散时间动态均衡模型。

离散时间模型在实证应用上较为简单，因为实际上所有历史数据都是离散的，金融交易典型的记录是有离散间隔的，参数估计与假设检验包含了离散数据记录，并且预测也是

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在离散的时间范围内进行。基于上述原因，用 ARCH 来做随机波动率模型，用离散时间均衡模型来进行衍生证券定价是很有优势的。

然而，连续时间模型提出了其他一些内容却很难在离散时间结构中体现。例如，数据生成过程的非线性函数的变动，要在离散时间下，得到变动的表达式几乎不可能的，但在连续时间，伊藤微分定理中给出了这些变动的解析解。在衍生证券价格的均衡理论中，哪些解释变量影响衍生证券价格，而哪些不影响也同样在诸如考克斯、因格索尔和罗斯(Cox, Ingersoll and Ross，1985b)提出的连续时间结构中更方便地得到。因而，一种模型提供的一些有价值的内容都无法在其他模型中得到。

9.4 用蒙特卡罗模拟对依赖于路径的衍生证券进行定价

考虑 0 时刻的一个合同，这个合同给予持有者一个权利而非义务，在 T 时刻，可以以等于股票在 0 至 T 时间段内的最高价出售一股股票。这样的一个合同通常称为回望期权。很明显，这是一个看跌期权，因为它给予持有者在到期日以特定价格出售股票的权利。但是，在这种情况下的执行价是随机的且只有在到期日时才能确定。因为执行价依赖于股价从 0 至 T 时间区间内所走过的路径，而并不只是依赖于最后的股票价格 $P(T)$，这个合同称为依赖于路径的期权。

当投资者所需要的对冲变得越来越复杂的时候，依赖于路径的期权就越来越受欢迎。例如，现在许多跨国公司花很大的精力进行对冲以规避汇率的波动，因为它们很大部分的收入与支出都以外币结算。那么最为流行的依赖于路径的期权之一平均汇率或亚式期权(Asian Options)就可以给予持有者以合同有效期间的平均汇率来购买外币的权利。[①]

依赖路径的期权可以用第 9.2.1 节中的动态对冲方法来定价，但是要得到这种 PDE 的解通常是很困难的。风险中性定价方法提供了更为简单的解决方案，可利用高速电子计算机来求解。例如，考虑可在有效期内的最高价出售股票的期权的定价问题。若 $P(t)$ 表示 t 时刻的股票价格，$H(0)$表示这个期权的初始价值，有：

$$H(0)=e^{-rT}\mathrm{E}^*\left[\underset{0\leqslant t\leqslant T}{\mathrm{Max}}P(t)-P(T)\right] \tag{9.4.1}$$

$$=e^{-rT}\mathrm{E}^*\left[\underset{0\leqslant t\leqslant T}{\mathrm{Max}}P(t)\right]-e^{-rT}\mathrm{E}^*\left[P(T)\right] \tag{9.4.2}$$

$$=e^{-rT}\mathrm{E}^*\left[\underset{0\leqslant t\leqslant T}{\mathrm{Max}}P(t)\right]-P(0) \tag{9.4.3}$$

其中，E^* 是按风险中性概率分布或等价鞅测度的期望算子。

① “亚式”一词起源于一个事实，这些期权最初交易是在亚洲交易所里。由于这些交易所通常比它们的欧洲和美洲的同行来得小，日交易量也很小，价格某种程度上易于被操纵。为了尽可能减小期权暴露于股价操纵的风险之中，就创造了以期权有效期内的平均股价代替最终股价的新期权。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

请注意，从(9.4.2)式到(9.4.3)式我们用了 $P(T)$ 以无风险收益率 r 为折现率的期望值的现值是 $P(0)$。这是因为我们使用了风险中性期望算子 E^*，并且在风险中性概率下 E^* 中隐含着所有资产必定以 r 作为期望收益率，因而有 $e^{-rT}\mathrm{E}^*[P(T)]=P(0)$。

为了通过蒙特卡罗模拟来估计(9.4.3)式，我们将模拟 $\{P(t)\}$ 的很多条路径，找到每条样本路径的最大值，对所有路径中的最大值进行折现后求出均值以得到在所有路径中的期望值，即 $H(0)$ 的估计。这样立刻会引起两个争论：其一是我们如何来模拟一个连续的样本路径，其二是为了得到较为精确的 $H(0)$ 估计需要进行多少次模拟？

9.4.1 离散时间与连续时间

从本质上来讲，数字计算机不能模拟真正的连续现象；但实际上它们通常可以做出非常好的近似。特别是，如果我们将时间区间$[0,T]$分割成 n 个长度为 h 的离散的间隔并且在每个离散点 $kh, k=0,\cdots,n$ 时刻进行模拟，其结果将是连续样本路径的一个近似，还可以通过使 n 增大、h 缩小、T 保持不变使得模拟更为精确。

例如，考虑几何布朗运动(9.2.2)式，风险中性变动量如下：

$$dP^*(t)=rP^*(t)dt+\sigma P^*(t)dB(t) \tag{9.4.4}$$

并考虑模拟以下近似样本路径 P_n^*：

$$P_n^* = P^*(0)\exp[\sum_{k=1}^{n} r_k^*(h)], \quad r_k^*(h) \sim \mathcal{N}(\mu h, \sigma^2 h) \tag{9.4.5}$$

尽管模拟路径 P_n 只在 h 的倍数处变化，不过可以通过增大 n 因而减小 h 使得这种近似更为精确——当 n 增大并趋于无穷大，P_n^* 弱收敛于(9.4.4)式（详细讨论见第 9.1.1 节）。不过，对多大的 n 必能得到足够的精确性没有一般性的规则——选择 n 必然以个案分析的方式进行。

9.4.2 模拟需多少次

然而，我们能够为选择模拟的次数 m 给出明确的指标。$H(0)$ 的蒙特卡罗估计包含了在所有的轨迹中求简单平均：

$$\hat{H}(0) = e^{-rT}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_{jn} - P(0), \quad Y_{jn} \equiv \underset{0\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}} P_{jk}^* \tag{9.4.6}$$

其中，$\{P_{jk}^*\}_{k=0}^{n}$ 是在风险中性分布下的股票价格过程第 j 条样本路径，在(9.4.4)式情况下，$\mu=r-\frac{\sigma^2}{2}$。但是因为这种结构下，Y_{jn} 是有有限正方差的 IID 随机变量，对很大的 m 由中心极限定理可得：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\sqrt{m}(\hat{H}(0)-H(0))\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,\sigma_y^2(n)),\quad \sigma_y^2(n)\equiv \text{Var}[e^{-rT}Y_{jn}] \tag{9.4.7}$$

因而，对很大的 m，$H(0)$的 95%置信区间可根据(9.4.7)式构造：

$$\Pr\left(\hat{H}(0)-\frac{1.96\sigma_y(n)}{\sqrt{m}}\leqslant H(0)\leqslant \hat{H}(0)+\frac{1.96\sigma_y(n)}{\sqrt{m}}\right)\overset{a}{=}0.95 \tag{9.4.8}$$

因此，m 的选择直接依赖于 $\hat{H}(0)$所需要的精度。例如，如果我们需要一个 95%置信度的与 $H(0)$偏差在0.000 1美元内的 $\hat{H}(0)$，必须选择 m，使其满足：

$$\frac{1.96\sigma_y(n)}{\sqrt{m}}\leqslant 0.001 \Rightarrow m\geqslant\left(\frac{1.96}{0.001}\right)^2\sigma_y^2(n) \tag{9.4.9}$$

通常 $\text{Var}[Y_{jn}]$是未知的，但它可从模拟中很方便地估计出来：

$$\widehat{\text{Var}}[Y_{jn}]=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(Y_{jn}-\bar{Y}_n)^2,\quad \bar{Y}_n\equiv\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_{jn} \tag{9.4.10}$$

因为模拟路径是通过 IID 构造的，诸如(9.4.10)式的估计量通常是快速地依概率收敛于期望值，并且当严格正态化后，它们快速依分布收敛于它们的极限分布。

9.4.3 与解析解的比较

在价格过程是几何布朗运动，可在最高价卖出资产的期权的价格解析解由戈登曼、索辛和加托(Goldman, Sosin and Gatto, 1979)给出如下：

$$H(0)=P(0)e^{-rT}\Phi\left(-\frac{\alpha T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\left[1-\frac{\sigma^2}{2r}\right]-P(0)$$
$$+P(0)\left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)\left[1-\Phi\left(-\frac{(\alpha+\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \tag{9.4.11}$$

其中，$\alpha\equiv r-\frac{\sigma^2}{2}$

因而，在这种情况下，我们可以比较蒙特卡罗估计量 $\hat{H}(0)$与理论价值 $H(0)$之间的精确性。表 9.6 在以下假定下提供了这样一个比较。

年(简单)无风险利率=5%

年(简单)股票期望收益率=15%

年股票收益率的标准差=20%

初始股票价格 $P(0)=40$ 美元

至到期日时间 $T=1$ 年

从表 9.6 我们看到，连续时间价格 $H(0)=3.098$ 1美元和原蒙特卡罗估计量 $\hat{H}(0)$之间的差别是存在的，即使当 m 和 n 较大(对照估计量在下一节中定义和讨论)。例如，当 $n=250$时，$H(0)$和 $\hat{H}(0)$之间差了 18 美分，对通常大小的期权来说，这是一个不小的差

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

别。

引起 $\hat{H}(0)$ 与 $H(0)$ 的不同有两个原因：$\hat{H}(0)$ 中的样本变动和模拟的价格样本路径的离散性。造成不同的前一个原因，可用模拟次数来控制，而后一个原因可通过在每条模拟样本路径的观察值数 n 来控制。增加 m 就可以提高估计 $\mathrm{E}^*[\hat{H}(0)]$ 的精确性，但如果 n 固定，则 $\mathrm{E}^*[\hat{H}(0)]$ 就不会收敛于连续时间价格 $H(0)$。那么这种差异是否意味着当存在解析解的蒙特卡罗估计量比解析解差呢？未必如此。

这种差异强调了在依赖于路径的衍生证券定价中离散化的重要性。因为我们在 k 价（离散的）部分和 $\sum_{i=1}^{k} r_i^*$ 中选择最大值，其中 k 从 0 至 n，当 n 增大，最大值也可能同时增大。[①] 由此启发，在一年中（$n=250$ 个交易日）P 的最大收盘价必然小于在同一年中最大的日最高价（$n\to\infty$）。因而，更接近于最大的日最高价的连续时间价格 $H(0)$ 几乎总是超过模拟的离散化的价格 $\hat{H}(0)$。

表 9.6　　回望期权价格的蒙特卡罗估计

n	原始		取反	
	$\hat{H}(0)$	SE$[\hat{H}(0)]$	$H(0)$	SE$[H(0)]$
100	2.786 6	0.011 5	2.795 4	0.004 3
250	2.919 1	0.011 6	2.911 1	0.004 3
365	2.949 8	0.011 6	2.940 9	0.004 3
500	2.965 8	0.011 6	2.962 8	0.004 3
750	2.970 0	0.011 6	2.991 1	0.004 3
1 000	2.999 6	0.011 6	3.007 0	0.004 3
2 000	3.041 5	0.011 6	3.031 2	0.004 3
5 000	3.070 4	0.011 6	3.055 9	0.004 3

注：一年期回望看跌期权价格的蒙特卡罗估计量，连续时间戈登伯格—索辛—加托价格 $H(0)=3.098\ 1$ 美元。每行对应一个独立的100 000次模拟，样本间隔长度为 $\frac{1}{n}$。对照模拟，IID 随机变量的每个序列都用两次——初始序列和负的序列——得到200 000条样本路径，或100 000条负的相关路径。SE$[\hat{H}(0)]$和 SE$[\widetilde{H}(0)]$分别是 $\hat{H}(0)$ 和 $\widetilde{H}(0)$ 的标准差。

哪个价格更为适宜当然取决于合同的条款。例如，平均汇率期权通常说明度量汇率的特定时刻，并且几乎总是选择市场收盘汇率（如 IMM 期货收盘时的即期汇率）或中央银行固定汇率。在这两种情况下，较适宜的价格将成为模拟价格，因为路径依赖所按照的是汇率的离散序列而不是理想化的连续过程。

---

① 虽然，部分和的最大值有可能随 n 的增大而增大，但这却不能确保。当我们在表 9.6 中增大 n，我们就生成了一个新的独立随机序列$\{r_i^*\}_{i=1}^{n}$，有可能这个新序列含有更多项却得到了更小的部分和。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

9.4.4 计算的效率

对任何一个蒙特卡罗模拟的主要考虑是精确性和计算的成本，在很多情况下必须对两者进行权衡。就像我们在第 9.4.2 节所知，蒙特卡罗估计量 $\hat{H}(0)$的标准差与模拟次数 m 的平方根成反比。因而，要减少 50%的标准差需要现在次数 4 倍的模拟次数。这种蒙特卡罗过程由显而易见的原因经常被称为原始(Crude)蒙特卡罗[例如，见汉默斯里和汉德斯康姆(Hammersley and Handscomb，1964)]，因此，现已发展了很多方差削减技术以改善模拟估计量的有效性。虽然详细讨论这些技术超出了本文的范围，但我们还是在这里进行简单的回顾。①

改进蒙特卡罗估计量的一个简单方法是尽可能用总体的量来代替估计量，这样就会减少估计量中的样本变化。例如，当模拟风险中性资产收益率，每条轨迹的样本均值几乎都不会等于它的总体均值(无风险收益率)，但是我们可以通过将无风险收益率与样本均值之间的差异加到每条轨迹上来纠正样本变化。如果这样做，结果是得到一系列对均值来说没有样本变化的轨迹。效率获得依赖于均值的样本误差对整个模拟的样本变化的贡献度，但在很多情况下这种改进是非常显著的。

另一相关技术是利用总体信息的其他形式。例如，假设我们希望估计 $\mathrm{E}^*[f(x)]$而我们发现一个随机变量 $g(Y)$，而 $\mathrm{E}^*[g(Y)]$非常接近于 $\mathrm{E}^*[f(x)]$且 $\mathrm{E}^*[g(Y)]$已知(这是所要利用总体信息)。$\mathrm{E}^*[f(x)]$可能是需要估计的新创造的依赖于路径的衍生证券的价格，而 $\mathrm{E}^*[g(Y)]$是已存在的相似的衍生证券的市场价格，因而有相似的期望。将 $\mathrm{E}^*[f(x)]$拆为 $\mathrm{E}^*[g(Y)]$和 $\mathrm{E}^*[f(x)-g(Y)]$这两项之和，那么要估计的期望也分成两项，而第一项是已知的，第二项可以用较小的样本变化进行模拟，这种技术称为变量控制方法——$g(Y)$是 $f(x)$的控制变量，它是否成功取决于 $\mathrm{E}^*[g(Y)]$与 $\mathrm{E}^*[f(x)]$的接近程度。

另一种可利用总体信息的形式是对称性。例如，如果总体分布是关于均值对称的，而均值是已知的(当在风险中性资产收益的情况下)，那么 $m/2$ 条轨迹可以获得 m 条样本路径，因为每条轨迹可以通过均值进行“反射”以产生一条有相同统计性质的镜像。这种方法得到了加总的好处：一对轨迹之间是负相关的。如果蒙特卡罗估计量的被加数是轨迹

---

① 有很多论文涵盖了这方面的内容。汉默斯里和汉德斯康姆(Hammersley and Handscomb，1964)是一个经典，简明而完整。库卢斯和惠特劳克(Kolos and Whitlock，1986)提出了更详细的更新的内容。费雪曼(Fishman，1996)更为广泛且包含了许多在其他蒙特卡罗文章中没有的新的主题，如 Markov 链样本，Gibbs 样本，随机游历，模拟退火。费雪曼(Fishman，1996)还包含许多这方面应用，所涉及技术的解析算法和随机数产生的 FORTRAN 软件(从一个 ftp 地址)。最后，方恩和万(Fang and Wang，1994)提出一个基于确定性样本的蒙特卡罗模拟新方法的简要介绍。虽然谈论这些方法如何与传统方法进行比较还为过早，方恩和万(Fang and Wang，1994)提出了一些有趣的例子，看起来是很有希望的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的单调函数，那么它们也是负相关的，这表示可获得具有较小方差的估计量。

这是一个被称为变量对照法的更一般的技术的一个简单例子，在这种方法下，轨迹之间具有相关性从而减少了总的方差，促进这种方法的更为正式的原因是来源于以下定理：对任何可被解释为随机变量之和的估计量，总是有可能在被加数间创造出函数变量，它可以使估计量无偏但通过这些随机变量得到与最小方差接近的方差[见汉默斯里和马尔顿(Hammersley and Mauldon，1956)]。当然，问题是，如何构造这样一个函数的应变量，但即使最优化变换不那么明显，通过更简单的自变量也可以得到实质性的效率。

减少方差也可通过更复杂的取样方法实现。在分层取样中被模拟的基本随机变量 X 被分割成有限个区间，在每个区间里执行原始蒙特卡罗模拟。如果在每个区间内 $f(X)$ 的变化比区间之间的方差小，那么 $E^*[f(x)]$的估计量的取样变化将会减小。

按重要性取样是一种更复杂的方法，在 $f(x)$变化越多的地方取样越为频繁，那里的样本更重要，而不是在规定的区间内取样。这种方法的更复杂的说明由方恩和万(Fang and Wang，1994)提出，即路径的产生是确定性的而不是随机的，是按照可直接使估计量的取样变动最小化的算法来产生的。这种称为数字—理论的方法如何与更为传统的蒙特卡罗估计量进行比较仍然为时过早，但现在发现金融机构已经在用这种方法[例如，见帕斯克夫和特劳布(Paskoo and Traub，1995)]，并且这种初步的发现令人鼓舞。

方差削减的一个解释

为说明方差削减技术的潜在能力，我们构造一个第 9.4.3 节的一年期回望看跌期权价格估计量的对照变量。对每条模拟路径$\{P_{jk}^*\}_{k=0}^n$，另一条路径不必再模拟就可得到，就是将每个价格路径所依赖的随机产生的 IID 标准正态变量的符号改变，得到了第二条路径$\{P_{jk}^*\}_{k=0}^n$，这条路径与第一条是负相关的。如果$\{P_{jk}^*\}_{k=0}^n$的 m 条样本路径已经产生，那么对照变量估计量 $\widetilde{H}(0)$的结果是所有 $2m$ 条路径的均值。

$$\widetilde{H}(0)=e^{-rT}\frac{1}{2m}\Big(\sum_{j=1}^{m}Y_{jn}+\sum_{j=1}^{m}\widetilde{Y}_{jn}\Big)-P(0) \tag{9.4.12}$$

其中，

$$Y_{jn}\equiv\mathop{\mathrm{Max}}_{0\leqslant k\leqslant n}P_{jk}^* \qquad \widetilde{Y}_{jn}\equiv\mathop{\mathrm{Max}}_{0\leqslant k\leqslant n}\widetilde{P}_{jk}^*$$

对照变量和原始蒙特卡罗之间的关系可根据重写(9.4.12)式后非常方便地看出：

$$\widetilde{H}(0)=\Big(\frac{1}{2}e^{-rT}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_{jn}+\frac{1}{2}e^{-rT}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\widetilde{Y}_{jn}\Big)-P(0) \tag{9.4.13}$$

$$=e^{-rT}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{Y_{jn}+\widetilde{Y}_{jn}}{2}-P(0) \tag{9.4.14}$$

等式(9.4.13)表示 $\widetilde{H}(0)$基于两个均值的简单平均，其中一个基于样本路径$\{P_{jk}^*\}_{k=0}^n$，另一个基于$\{\widetilde{P}_{jk}^*\}_{k=0}^n$。这两个均值的负相关性导致了方差的减小。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

等式(9.4.14)将(9.4.13)式的两个求和合并为一个，将两个对照的均值作为被加数。这个求和对分析来说特别简单，因为被加数是 IID 的——相关性限于每个被加数而并不跨越两者，因而和的方差就是方差之和。$\widetilde{H}(0)$方差如下表示：

$$\mathrm{Var}[\widetilde{H}(0)]=\mathrm{e}^{-2rT}\frac{1}{m}\mathrm{Var}\left[\frac{Y_{jn}+\widetilde{Y}_{jn}}{2}\right] \tag{9.4.15}$$

$$=e^{-2rT}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Var}[Y_{jn}]+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}[Y_{jn},\widetilde{Y}_{jn}]\right)$$

$$=\frac{\sigma_y^2(n)}{2m}(1+\rho) \tag{9.4.16}$$

其中，$\sigma_y^2(n)\equiv\mathrm{Var}[e^{-rT}Y_{jn}]=\mathrm{Var}[e^{-rT}\widetilde{Y}_{jn}]$，$\rho\equiv\mathrm{Corr}[e^{-rT}Y_{jn},e^{-rT}\widetilde{Y}_{jn}]$。等式(9.4.15)式显示 $\widetilde{H}(0)$的方差可通过 e^{-rT}/m 和 IID 序列$\{(Y_{jn}+\widetilde{Y}_{jn})/2$ 的样本方差来估计。没必要再去考虑一对对照变量之间的相关性，因为已经在$\{(Y_{jn}+\widetilde{Y}_{jn})/2$ 的样本方差中考虑了。

等式(9.4.16)提出了对照变量所给出的方差削减的另一个观点。方差的减小来自于两个原因：模拟路径增加了一倍，从 m 到 $2m$，如果对照变量间的相关性是负的，那么$(1+\rho)$必小于 1。注意即使相关性是正的，$\widetilde{H}(0)$的方差仍小于原始蒙特卡罗估计量 $\hat{H}(0)$，除非有极大的相关性，即 $\rho=1$。当然，当我们将模拟的次数增加一倍，通过改变它们的符号也做到了这样的结果。因为计算包含的伪随机发生器通常不仅仅需要符号的改变，这是对照变量模拟的另一个优势。

原始蒙特卡罗估计量 $\hat{H}(0)$和对照变量估计量 $\widetilde{H}(0)$之间的比较列于表 9.6 中，对大多数模拟来说，$\widetilde{H}(0)$的标准差对 $\hat{H}(0)$的标准差的比率是0.004 3/0.011 6=0.371，方差大约减少了 63%。在比较中，模拟次数从 m 增加到 $2m$ 对原始蒙特卡罗估计量来说得到一个比率为 $1/\sqrt{2}=0.707$，只有 29%的减少额。更正式地，由(9.4.7)式和(9.4.16)式 $\widetilde{H}(0)$的标准差对 $\hat{H}(0)$的标准差之间的比率是 $\sqrt{(1+\rho)/2}$ 的一个估计量，因而比率为 0.004 3/0.011 6=0.371，表示在表 9.6 中的对照变量间的相关度为−72%，这是显著降低 $\widetilde{H}(0)$的方差的一个实质性的值。

9.4.5 拓展与局限性

用蒙特卡罗方法进行依赖于路径的期权的定价是非常普遍的，实际上它可以用于任何欧式衍生证券。例如，对平均汇率期权的定价我们可以如上文所述的一样进行模拟价格路径(可能用更适合于汇率的随机过程)，对每条路径计算均值，重复许多次，计算所有路径的均值。因而考克斯—罗斯的风险中性定价方法是非常重要的。然而，必须注意到这种方法有几个局限性。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

首先，蒙特卡罗方法只能用于欧式期权，期权不能提前执行。美式期权的提前执行特征在确定最优执行政策中增加了复杂性，而这必须用一个动态程序分析进行递归。在这种情况下，相应的 PDE 的数值解是至今为止惟一一种获得价格的方法。

其次，将考克斯—罗斯的技术应用于给定的衍生证券，必须首先证明这个证券可以只用套利理论来定价。在布莱克—斯科尔斯结构中，无套利条件完全确定了期权的价格只是因为我们可以构造一个包含股票、债券和期权的动态组合使之成为无风险的。实际上，这隐含着期权是由股票和债券所“跨越”的，或者更确切地说，在 T 时刻期权的收益可由只包括股票和债券的动态交易策略完全地复制。无套利条件可解释为期权价格必等于动态策略复制期权收益时的成本。

但是，在有些情况下，衍生证券不能由任何包括现存的证券的动态策略来复制的。例如，如果我们假设在(9.2.2)式中扩散参数 σ 是随机的，那么在没有对 σ 的其他约束下，就不存在包含了股票、债券和期权的无风险的动态交易策略。这是因为现在有两个风险源，期权不再能由股票和债券的组合来复制[更详细的讨论见第 9.4.6 节和华恩(Huang，1992)]。

因此，在我们将风险中性定价方法用于一个特定的衍生证券之前，首先必须检验它能否可以用其他交易资产来对冲。由于戈登曼，索辛和加托(Goldman，Sosin and Gatto，1979)证明由最高价出售资产的期权是可以用其他交易资产来对冲的，对此种情形应用考克斯—罗斯方法可保证所得价格确实是无套利价格，所得这个价格必隐含无风险组合的机会。但是很难证明其他更为复杂的依赖于路径的衍生证券也是可对冲的。在那种情况下，我们可以将证券放入到经济均衡模型中。例如，在第 9.3.6 节的随机波动率模型，并对代理人的偏好作出假设，设定投资机会。

9.5 结 论

衍生证券定价是现代经济学绝对成功的范例之一。它改变了经济学家对证券价格动态模型的考察方法，同时也对投资机构产生了巨大的冲击。更复杂的金融工具的创造是对学术研究和真正的“金融工程”学科建立的一个巨大的鼓舞。近年来在衍生证券方面的创新包括：平均汇率期权、更一般化的回望期权、障碍期权(也称为“下降敲出期权”或“生灭”期权)，复合期权、两值货币或两值股票期权、假想可转换期权、差价锁定利率互换、彩虹期权和许多其他的新型证券。在这些例子中，只有很少部分标的资产价格过程能够得到解析定价公式，在这方面需要进一步的研究来检验这些过程是否真的适合那些数据。另外，在很多情况下这些证券对冲的解析表达不存在，必须通过实证来确定。

对用离散数据来描述连续时间过程时所产生的统计影响的很多争论至今仍未解决。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

现在，最迫切的争论是很难得到具有非线性漂移或非线性扩散系数伊藤过程的参数的一致性估计。对很多重要的伊藤过程来说，我们得不到它们的转换密度的完美的表达，因而极大似然估计是不可行的。汉森和沙因克曼(Hansen and Scheinkman，1995)的 GMM 方法可能是最有希望的替代方法，实际应用和蒙特卡罗研究必定紧随其后。

现在热点研究的另一个领域包括创造出基础资产价格变动的更好的模型。例如，偶然的观测表明，资产价格跳跃成分的出现是相对较大和突然波动的原因，但发生得并不频繁，也难以精确估计。① 事实上，能否将这种跳跃过程从离散样本价格数据中辨别出来是有疑问的，因为正是离散样本的表现破坏了扩散过程和跳跃过程的清晰的分辨——这是由于这两种过程都需要样本路径的连续性。

估计资产价格变动参数模型的困难导致了人们尝试获得非参数变动所作的大量工作。例如，通过往一个扩散过程的漂移系数上加约束条件，艾特萨哈里尔(Aït-Schalia，1993)找到了扩散系数的非参数估计量，并将这个估计量用于对利率期权的定价。伦斯达夫(Longstaff，1995)发现了期权价格中隐含了风险中性分布，提出了期权定价模型的一个检验，哈切恩森、罗和波吉尔(Hutchinson，Lo and Poggio，1994)试图通过中性网络模型进行衍生证券定价。虽然这些非参数和数据高度密集的方法是否会对参数方法能够进行改进还很难说，但最初的迹象表明，这些方法是非常有希望的。在第 12 章，我们将回顾其中的一些技术，并提出它们在衍生证券定价和对冲中的应用。

人们从有关股票价格变动的争论过程中看到了与之紧密相关的若干个不完全市场的期权定价问题，在这些市场中，影响基础资产的不确定性来源不能用交易证券来对冲。例如，如果基础资产价格的波动率是随机的，只有在最强烈的假设条件下，基于这种资产的期权的价格才可通过套利观点确定。因为普遍认为在随机样式下波动率的确定随时间而变化，很明显，关于市场不完善性的争论是衍生证券定价的中心。

在这章中，我们只是触及了关于衍生证券研究的很小一部分讨论，那些在现有的文献中很少被提及的方面希望学术界和投资界加入讨论并使这些令人兴奋的领域加快发展。

习 题

9.1 证明，通过计算第 9.1.1 节连续时间过程 $p_n(t)$ 的矩生成函数并取极限，依分布收敛于正态分布的连续时间过程 $p(t)$。

9.2 通过估计和转化在(9.3.7)式中费雪尔信息矩阵中基于正常样本数据得到的几何布朗运动的参数极大似然估计量 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}^2$，来求得(9.3.30)式和(9.3.31)式。

9.3 求趋势 Ornstein-Uhlenback 过程(9.3.46)式的参数极大似然估计量 $\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\gamma}$，并用(9.3.7)式计算它们的渐近分布。在标准渐近和连续记录渐近下三个估计量的渐近性质有何不同。

---

① 例如，见鲍尔和托劳斯(Ball and Torous，1983，1985)。默顿(Merton，1976b)建立了一个将扩散和跳跃过程结合起来的期权。也见默顿(Merton，1976a)关于在期权定价中不具体说明股票价格变动时的影响的一般性讨论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

9.4 假设你现在管理一个大型的养老基金且已经将大部分基金投资于 IBM 股票。从现在起一年后，你必须清空所有的 IBM 股票，但你担心那时并不是卖掉头寸的好时机。CLM 金融产品公司提出如下建议：你支付一部分费用后，他们将同意在一年后购买你的所有 IBM 头寸，每股价格等于一年中最高的日收盘价。问你期望付出多少费用?

具体是：

9.4.1 用蒙特卡罗模拟估计现在(0 时刻)以最高价卖出股价的期权的市场公平价格 $H(0)$。为简单起见，IBM 股票价格 $P(t)$服从几何布朗运动(9.2.2)式，那么：

$$\log \frac{P(t_2)}{P(t_1)} \sim \mathcal{N}\left(\mu(t_2-t_1), \sigma^2(t_2-t_1)\right) \qquad (9.5.1)$$

并用最近五年的 IBM 股票日收益率估计参数 μ 和 σ^2 来进行模拟。

假定一年有 253 个交易日，并且在闭市时(如周末、假日等)市场价格没有波动性。

9.4.2 给定 $H(0)$在 95%的置信区间上的估计 $\hat{H}(0)$，估计得到与真实价格相差在 0.05 美元之内的估计所需的模拟次数。

9.4.3 这一价格与 Goldman-Sosin-Gatto 公式给出的价格相比有什么差异? 你能解释这些差异吗? 你将用哪一个价格决定接受或拒绝 CLM 公司的建议?

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

10.

固定收益证券

本章和下一章，我们转而讨论债券市场。我们研究没有赎回条款或违约风险的债券，债券的支付事先完全确定，这些债券称为固定收益证券，也常被用于泛指未来支付实际上不确定的债券。在美国市场上，几乎所有的固定收益证券都是由美国财政部发行。传统国债的名义支付是固定的，但 1996 年初，财政部宣布计划发行指数债券，这种债券的名义支付是按通货膨胀来调整的，从而其实际支付是固定的[①]。

前面各章讨论的许多观点除可应用于其他任一资产外，还可应用于固定收益证券。但我们特别注意固定收益证券有以下几个原因。首先，固定收益市场已从股票市场分离出来，并有自身的制度结构和术语。而且，固定收益证券的学术研究有其自身的传统。第二，无论用未偿付额还是交易额来度量，国债市场规模都非常大。第三，在财务学理论中，固定收益证券有其特殊的地位，因为它们的现金流是确定的，因而，其价格只随折现率而变动。通过研究固定收益证券，我们可以探讨折现率变动的影响，而不必面对预期未来现金流变化而引起的复杂情况。传统的国债价格反映了名义折现率的信息，而指数证券的价格反映实际折现率的信息。最后，有许多其他的资产可以被看作是固定收益证券和衍生证券的组合，例如，一个可赎回债券是一个固定收益证券和一个看跌期权的组合。

关于固定收益证券方面有大量的文献[②]，我们将它分成两个主要部分。本章我们首先引入基本概念，讨论债券收益率的线性时间序列模型的实证研究。这项工作仅是由理论而引发的，兼有探讨利率期限结构预测力的实用目标。我们将在第 11 章作进一步拓宽，详细讨论可应用于利率衍生证券定价的期限结构模型。

---

① 英国、加拿大和其他国家政府已发行了这种债券，参阅坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1996)的评述。

② 幸运的是，自坎恩(Ed Kane)的评述“普遍认为，一个领域的丰富程度与过去一段时间内倾注的成熟程度大致成比例。依照这一标准，利率期限结构已成为……一个特别丰富的领域”[坎恩(Kane，1970)]后，研究质量提高了。最近精彩的评述可参阅梅利诺(Melino，1988)或希勒(Shiller，1990)，森德里桑(Sundaresan，1996)也有论述。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

10.1 基本概念

原则上，固定收益证券承诺支付任何形式的未来现金流，但有两种基本类型。

零息债券，也称折现债券，在未来到期日进行一次性支付，支付的数额就是债券面值。至到期日的时间长度就是债券的到期期限。美国国库券(到期期限最长为 12 个月的国债)采取这种形式。

附息债券在相等的时间间隔内按面值给定比例的息票支付，直至到期日，此时也支付面值。美国的中期国债和长期国债(政府发行的到期期限大于 12 个月的国债)采取这种形式。中期、长期国债每 6 个月支付一次息票，但这些投资工具的息票利率通常是年利率；也就是年息票利率 7％的国债实际上每 6 个月支付一次面值的 3.5％，直至到期日[①]。

附息债券被认为是一组折现债券的组合，每一次息票支付，对应于一个折现债券，最后一次息票支付，本金和息票对应于一个折现债券。这不仅仅是一个学术概念，因为从 1985 年起，美国国债的本金和利息已在财政部(Separating Trading of Registered Interest and Principal Securities，STRIPS)的计划项目下分别交易。并且从 1989 年起，所有到期期限的 strips 的价格每天在《华尔街日报》上公布。

10.1.1 折现债券

以折现债券为例，我们首先定义并说明债券市场的基本概念。债券的到期收益率为使债券支付的现值与债券价格相等的折现率。因而，如果折现债券在 $t+n$ 期一次性支付 1 美元的，P_{nt} 是其 t 期价格，Y_{nt} 是债券的到期收益率，有：

$$P_{nt}=\frac{1}{(1+Y_{nt})^n} \tag{10.1.1}$$

因而，到期收益率可由债券价格计算：

$$(1+Y_{nt})=P_{nt}^{-\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{10.1.2}$$

在财务学实证研究的文献中，普遍使用对数或连续复利变量，这有利于将非线性方程(10.1.2)转换成一个线性方程。以小写字母表示的对数到期收益率和对数价格间的关系为：

$$y_{nt}=-\left(\frac{1}{n}\right)p_{nt} \tag{10.1.3}$$

利率期限结构，是指在给定的时期，不同到期期限债券到期收益率的集合。收益率之

---

① 美国国债市场进一步的细节，可参阅教科书，如法鲍兹(Fabozzi，1995)或法鲍兹(Fabozzi，1996)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

差 $S_{nt} \equiv y_{nt} - y_{1t}$，或对数形式 $s_{nt} \equiv y_{nt} - y_{1t}$，是 n 期债券的到期收益率与 1 期债券的到期收益率之差，是对期限结构形状的一种度量。收益率曲线是期限结构图，即某一特定日期 t，对应到期期限 n 的 Y_{nt} 或 y_{nt} 的图。图 10.1 中的实线表示 1987 年 1 月底美国国债零息对数收益率曲线[①]。这一特定的收益率曲线先上升，然后在更长的期限里下降，故呈驼背形。这一形状并非异常，收益率曲线一般在整个到期期限内向上倾斜。有时收益率曲线是反转的，在整个到期期限内向下倾斜。

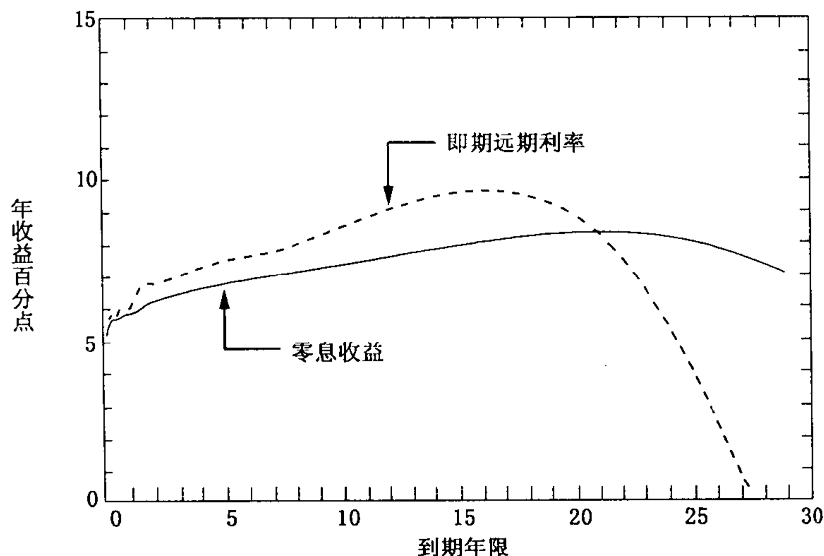


图 10.1 1987 年 1 月零息收益率和远期利率曲线

持有期报酬

债券持有期报酬为短于债券到期期限的持有期内的报酬。为了简化符号，我们考虑特殊的情形，持有期为一期[②]。记 $R_{n,t+1}$ 为 t 期买入，$t+1$ 期卖出 n 期债券的持有期为一期的报酬。由于 n 期债券出售后为 $(n-1)$ 期债券，价格为 $P_{n-1,t+1}$，持有期报酬为：

$$(1+R_{n,t+1}) = \frac{P_{n-1,t+1}}{P_{nt}} = \frac{(1+Y_{nt})^n}{(1+Y_{n-1,t+1})^{n-1}} \tag{10.1.4}$$

如果在 t 期买入债券时有高的到期收益率，而在 $t+1$ 期卖出债券时有低的到期收益率（因为低收益率对应高价格），那么，(10.1.4)式中的持有期报酬就高。

为简单起见，改用对数形式，持有期对数报酬 $r_{n,t+1} \equiv \log(1+R_{n,t+1})$：

---

① 该曲线不是基于 strips 的报价，该报价近几年才能得到，而是由附息国债价格计算而来。图 10.1 源自于麦卡拉西和昆（McCulloch and Kwon，1993），并利用了第 10.1.3 节讨论的麦卡拉西（McCulloch，1971，1975）的估计方法。

② 希勒（Shiller，1990）给出了更全面的处理方法，该法符号更为复杂。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$r_{n,t+1}=p_{n-1,t+1}-p_{nt}=ny_{nt}-(n-1)y_{n-1,t+1}$$
$$=y_{nt}-(n-1)(y_{n-1,t+1}-y_{nt}) \qquad (10.1.5)$$

(10.1.5)式中的最后一个等式表示持有期报酬是由期初的到期收益率(正的)和持有期内到期收益率的变化(负的)决定。

(10.1.5)式重新表示,今天的对数债券价格与明天的对数债券价格和下期的报酬有关:$p_{nt}=r_{n,t+1}+p_{n-1,t+1}$。通过迭代至到期日,可向前解出该差分方程(注意到期时的对数价格等于0),可得,$p_{nt}=-\sum_{i=0}^{n-1}r_{n-i,t+1+i}$,或到期收益率为:

$$y_{nt}=\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1}r_{n-i,t+1+i} \qquad (10.1.6)$$

上式表示,若持有债券到期,零息债券的对数到期收益率等于每期对数报酬的平均。

远期利率

不同到期期限的债券可以组合起来,确保未来取得固定收益投资的利率;这项投资的利率称为远期利率①。

为确保在 $t+n$ 期获得在 t 期所作的一项 1 期投资的利率,一个投资者可操作如下:要求未来的投资在 $t+n+1$ 期获得 1 美元,她首先购买了一个$(n+1)$期债券,在 t 期花费 $P_{n+1,t}$,在 $t+n+1$ 期获得 1 美元。投资者想将这项投资的成本从 t 期转到 $t+n$ 期,为此,她卖出 $P_{n+1,t}/P_{nt}$ 份 n 期债券,在 t 期她获得正的现金流 $P_{nt}(P_{n+1,t}/P_{nt})=P_{n+1,t}$,正好抵消 t 期第一次交易时的负现金流。卖出 n 期债券,意味着 $t+n$ 期负的现金流 $P_{n+1,t}/P_{nt}$。这可以看成在 $t+n$ 期进行 1 期投资的成本。交易产生的现金流如图 10.2 所示。

时间			
交易	t	$t+n$	$t+n+1$
买入 1 单位$(n+1)$期债券	$-P_{n+1,t}$		1
卖出 $P_{n+1,t}/P_{nt}$ 份 n 期债券	$\left(\frac{P_{n+1,t}}{P_{nt}}\right)P_{nt}$	$-\frac{P_{n+1,t}}{P_{nt}}$	
净值	0	$-\frac{P_{n+1,t}}{P_{nt}}$	1

图 10.2　远期交易的现金流

远期利率定义为 $t+n$ 期投资 $P_{n+1,t}/P_{nt}$ 的报酬:

$$(1+F_{nt})=\frac{1}{(P_{n+1,t}/P_{nt})}=\frac{(1+Y_{n+1,t})^{n+1}}{(1+Y_{nt})^{n}} \qquad (10.1.7)$$

符号 F_{nt},第一个下标指进行 1 期投资之前的期数,第二个下标指设定远期利率的日

① 远期交易的一个例子是美国国债的随时发行市场。新的证券拍卖结果宣布后,证券发行之前,证券可在随时发行市场交易,债券发行时就会出现偿付。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

期。我们也可以定义多期投资的远期利率，仅增加符号的复杂性，这里我们不推导。

为简单起见，改用对数形式，n 期远期的对数远期利率为：

$$\begin{aligned} f_{nt} &= p_{nt} - p_{n+1,t} \\ &= (n+1)\ y_{n+1,t} - n\ y_{nt} \\ &= y_{n+1,t} + n\ (y_{n+1,t} - y_{nt}) \\ &= y_{nt} + (n+1)\ (y_{n+1,t} - y_{nt}) \end{aligned} \tag{10.1.8}$$

(10.1.8)式表明，当折现债券价格随到期期限而下降时，远期利率为正。而且，如果 $(n+1)$ 期折现债券到期收益率较 n 期折现债券的到期收益率高，收益率曲线向上倾斜，① 这样，远期利率比 n 期和 $n+1$ 期折现债券的到期收益率都高，到期收益率与瞬时远期利率之间的关系类似于边际成本和平均成本间的关系。到期收益率是 n 期的平均借入成本，而远期利率是延长贷款期限的边际成本。

图 10.1 显示远期利率曲线（虚线表示）和收益率曲线（实线表示）之间的关系，当收益率曲线向上倾斜时，远期利率曲线在其上方；当收益率曲线向下倾斜时，远期利率曲线在其下方；当收益率曲线水平时，两条曲线相交。这是边际成本和平均成本曲线的特征。当单位边际成本超过单位平均成本时，随着单位边际成本的上升，平均成本也上升，因而当边际成本高于平均成本时，平均成本上升。相反，当边际成本低于平均成本时，平均成本下降。

10.1.2 附息债券

正如我们已经强调过的，一个附息债券可以看成是一系列折现债券的组合，即其面值与息票支付日支付息票相同的折现债券，并与附息债券面值和到期期限均相同的折现债券。图 10.3 给出了附息债券支付的时间线。

附息债券的价格不仅与到期期限 n 和日期 t 有关，还与息票利率有关。为了使符号尽可能简单，我们将息票支付的间隔期定义为一期，每期息票利息为 C。就美国国债而言，一期为 6 个月，C 为年息票的一半，记附息债券的价格 P_{cnt}，表示与息票利率有关。

附息债券每期到期收益率 Y_{cnt} 定义为使债券支付的现值与其价格相等时的折现率，则有：

$$P_{cnt} = \frac{C}{(1+Y_{cnt})} + \frac{C}{(1+Y_{cnt})^2} + \cdots + \frac{1+C}{(1+Y_{cnt})^n} \tag{10.1.9}$$

对于 6 个月一期的美国国债，Y_{cnt} 是 6 个月的到期收益率，年收益率通常为 Y_{cnt} 的 2

① 当时间单位相对债券到期期限 n 缩小，(10.1.8)式近似于 $f_{nt} = y_{nt} + n\partial y_{nt}/\partial_n$，$n$ 期收益率加上 n 乘以在到期期限 n 时收益率曲线的斜率。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

倍。

从(10.1.9)式求不出 Y_{cnt} 的解析式，而只能数值求解。但由于所有未来的支付为正，故 Y_{cnt} 有惟一的正实数解①，所以求解过程是简单的。与折现债券的到期收益率不同，如果持有债券到期，附息债券的到期收益率不必与本期报酬相同。在将债券到期前收到的息票再投资的条件下，报酬才能确定。所以当息票以到期收益率再投资时，到期收益率才等于附息债券持有到期的每期报酬。

	t	$t+1$	$t+2$	$t+n-1$	$t+n$
(1)期限	1	2		$n-1$	n
(2)面值	C	C		C	$1+C$
(3)以 Y_{cnt} 折现值	$\frac{C}{(1+Y_{cnt})}$	$\frac{C}{(1+Y_{cnt})^2}$		$\frac{C}{(1+Y_{cnt})^{n-1}}$	$\frac{(1+C)}{(1+Y_{cnt})^n}$
(1)×(3)	$\frac{C}{(1+Y_{cnt})}$	$\frac{2C}{(1+Y_{cnt})^2}$		$\frac{(n-1)C}{(1+Y_{cnt})^{n-1}}$	$\frac{n(1+C)}{(1+Y_{cnt})^n}$

$$D_{cnt}=\frac{\sum[(1)\times(3)]}{\sum(3)}$$

图 10.3 附息债券久期的计算

(10.1.9)式中的隐含收益率可在两种重要的特定情形下简化。首先，当 $P_{cnt}=1$ 时，债券平价发行。在这种情况下，到期收益率恰好等于息票利率：$Y_{cnt}=C$。第二，到期期限 n 无穷大，债券被称为统一债券或永久债券。在这种情况下，收益率恰好等于附息债券息票与债券价格之比：$Y_{c\infty t}=C/P_{c\infty t}$。

久期和免疫

对于折现债券，到期期限度量债券持有者投资货币的时间长度。而对于附息债券，由于附息债券价值大部分由到期前的支付所决定，到期期限并不完全度量投资货币的时间长度。麦考雷的久期，源自麦考雷(Macaulay，1938)，是一种更好的度量方法；同到期期限一样，它的单位是期。为了理解麦考雷久期，将附息债券看成是一组折现债券。麦考林久期是折现债券到期期限的加权平均，其中，每一到期期限的权重是以附息债券的收益率为折现率计算的相应折现债券的现值：②

$$D_{cnt}=\frac{\frac{C}{(1+Y_{cnt})}+2\frac{C}{(1+Y_{cnt})^2}+\cdots+n\frac{1+C}{(1+Y_{cnt})^n}}{P_{cnt}}$$

---

① 对于负的未来现金流，(10.1.9)式有多重正实数解。在分析投资计划时，使计划的现值与其成本相等的折现率称为内部收益率，当计划有未来负现金流时，内部收益率有多重解。

② 麦考雷也提出可以使用折现债券的到期收益率，而不是附息债券的到期收益率，计算每期息票的现值，但这种方法要求度量一个完整的零息期限结构。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$=\frac{C\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(1+Y_{cnt})^{i}}+\frac{n}{(1+Y_{cnt})^{n}}}{P_{cnt}} \tag{10.1.10}$$

第一个折现债券的到期期限是一期，权重为 $C/(1+Y_{cnt})$，即 Y_{cnt} 为折现率时折现债券的现值；第二个折现债券的到期期限是 2，权重为 $C/(1+Y_{cnt})^2$，等等，直至到期期限 n 的最后一个折现债券，权重为 $(1+C)/(1+Y_{cnt})^n$。为了转换成平均数，我们用权重加总：$C/(1+Y_{cnt})+C/(1+Y_{cnt})^2+\cdots+(1+C)/(1+Y_{cnt})^n$，由(10.1.9)式可知，这恰好是债券价格 P_{cnt}。这些计算参见图 10.3。

当 $C=0$ 时，债券为折现债券，麦考雷久期就是到期期限。当 $C>0$ 时，麦考雷久期小于到期期限，并随息票利率的增加而下降。给定息票利率，久期随债券收益率的上升而下降，因为平均来说，高的收益率降低按(10.1.10)式久期计算中远期支付的权重值。当附息债券平价出售或其到期期限无穷大时，久期公式可简化。平价债券的价格 $P_{cnt}=1$ 和收益率 $Y_{cnt}=C$，因而，久期 $D_{cnt}=(1-(1+Y_{cnt})^{-n})/(1-(1+Y_{cnt})^{-1})$。到期期限无穷大的统一年金债券的收益率为 $Y_{c\infty t}=C/P_{c\infty t}$，因而，久期 $D_{c\infty t}=(1+Y_{c\infty t})/Y_{c\infty t}$。

上面的这些特性可由表 10.1 中的数字例子说明。表中显示债券的麦考雷久期(以及括号内为下面(10.1.12)式的修正久期)，这些债券的收益率和息票利率分别为 0%、5% 和 10%，到期期限从 1 年到无穷大。久期单位为年，但实际是以 6 个月计算的，以适用于美国国债。

表 10.1 **选定债券的麦考雷久期和修正久期**

		期限(年)					
		1	2	5	10	30	∞
息票利率	0%						
到期收益率	0%	1.000	2.000	5.000	10.000	30.000	—
		(1.000)	(2.000)	(5.000)	(10.000)	(30.000)	
	5%	1.000	2.000	5.000	10.000	30.000	—
		(0.976)	(1.951)	(4.878)	(9.756)	(29.268)	
	10%	1.000	2.000	5.000	10.000	30.000	—
		(0.952)	(1.905)	(4.762)	(9.524)	(28.571)	
息票利率	5%						
到期收益率	0%	0.988	1.932	4.550	8.417	21.150	—
		(0.988)	(1.932)	(4.550)	(8.417)	(21.150)	

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

续表

		1	2	5	10	30	∞
	5%	0.988	1.928	4.485	7.989	15.841	20.500
		(0.964)	(1.881)	(4.376)	(7.795)	(15.454)	(20.000)
	10%	0.988	1.924	4.414	7.489	10.957	10.500
		(0.940)	(1.832)	(4.204)	(7.132)	(10.436)	(10.000)
息票利率	10%						
到期收益率	0%	0.977	1.875	4.250	7.625	18.938	—
		(0.977)	(1.875)	(4.250)	(7.625)	(18.938)	
	5%	0.977	1.868	4.156	7.107	14.025	20.500
		(0.953)	(1.823)	(4.054)	(6.933)	(13.683)	(20.000)
	10%	0.976	1.862	4.054	6.543	9.938	10.500
		(0.930)	(1.773)	(3.861)	(6.231)	(9.465)	(10.000)

表 10.1 给出给定的收益率和到期期限债券的麦考雷久期，括号内为修正久期。久期、收益率和期限以年为单位，但计算假定债券以 6 个月为时间间隔支付。

如果(10.1.9)式关于 Y_{cnt}(或关于$(1+Y_{cnt})$)求导，我们可以看到麦考雷久期有另外一个非常重要的特性，它是附息债券价格关于其总收益$(1+Y_{cnt})$弹性的负数：[①]

$$D_{cnt}=-\frac{dP_{cnt}}{d(1+Y_{cnt})}\frac{(1+Y_{cnt})}{P_{cnt}} \tag{10.1.11}$$

实际应用时，麦考雷久期经常除以总收益，称为修正久期：

$$\frac{D_{cnt}}{(1+Y_{cnt})}=-\frac{dP_{cnt}}{dY_{cnt}}\frac{1}{P_{cnt}} \tag{10.1.12}$$

修正久期度量债券价格关于债券收益率很小的绝对值变化的成比例的敏感度。因而，如果修正久期是 10，收益率每增加一个基点(如从 3.00%～3.01%)将导致价格下降 10 个基点或 0.10%。[②]

有时麦考雷久期和修正久期可解决下面的问题：何种息票债券最接近于给定到期期限的零息债券的报酬。这一问题具有实际意义，因为许多金融中介机构持有长期零息负债，例如养老负债，他们或许希望运用附息债券匹配或免疫这些负债。[③] 虽然现在已有剥

① 一个变量 B 关于一个变量 A 的弹性定义为 B 关于 A 的导数乘以 A/B：$(dB/dA)(A/B)$，同理也是 $\log(B)$关于 $\log(A)$的导数。

② 注意如果久期是以 6 个月的时间单位度量的，那么收益率应以 6 个月度量。可以取久期的一半和两倍收益率转换到以年为基础。表 10.1 中的数据已经通过这种方法年度化。

③ 免疫最早被雷丁顿(Reddington，1952)定义为："现有的商业行为不受利率的一般变动影响的资产投资方式"。法鲍兹和法鲍兹(Fabozzi and Fabozzi，1995)的第 42 章给出了全面的讨论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

离零息债券可投资，但由于税收顾客或流动性效应的原因，它们或许不具吸引力，因而，免疫问题仍然存在。如果收益率曲线平移，从而所有到期期限债券的收益率都移动相同的数额，那么，零息债券收益率随着附息债券收益率发生相同的变化。这样，(10.1.11)式表明，麦考雷久期等于零息债券久期的附息债券(同样地，修正久期等于零息债券的修正久期的附息债券)在一阶近似条件下与零息债券有相同的报酬。这种债券——或有相同久期债券的任何投资组合——解决了期限结构小的平移免疫问题。

尽管这种方法相当简单，但由于下面几个原因要小心使用。首先，它假定期限结构的平移时，所有到期期限的收益率移动相同数额。我们在第 10.2.1 节说明，从历史上来看，短期利率的变动往往较长期债券收益率变动大。当短期收益率比长期收益率变动幅度大时，而期限结构非平行移动，也有一些修正的方法可解决更为实际的情况[见比尔威格，考夫曼和托弗斯(Bierwag，Kaufman and Toevs，1983)，格拉尼托(Granito，1984)，因格索尔，斯凯尔顿和韦尔(Ingersoll，Skelton and Weil，1978)]。

第二，(10.1.11)式和(10.1.12)式给出一阶导数，因而，只适用于收益率有无穷小的变化的情况。图 10.4 表明，债券对数价格和对数收益率间的关系是凸的，而不是线性的。这一变化曲线的斜率就是修正久期，它随收益率下降而上升(表 10.1 也说明这一事实)。这样可以考虑利用二阶导数。债券的凸性(convexity)定义为：

$$\text{凸性} = \frac{\partial^2 P_{cnt}}{\partial Y_{cnt}^2}\frac{1}{P_{cnt}} = \frac{C\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{(1+Y_{cnt})^{i+2}} + \frac{n(n+1)}{(1+Y_{cnt})^{n+2}}}{P_{cnt}} \tag{10.1.13}$$

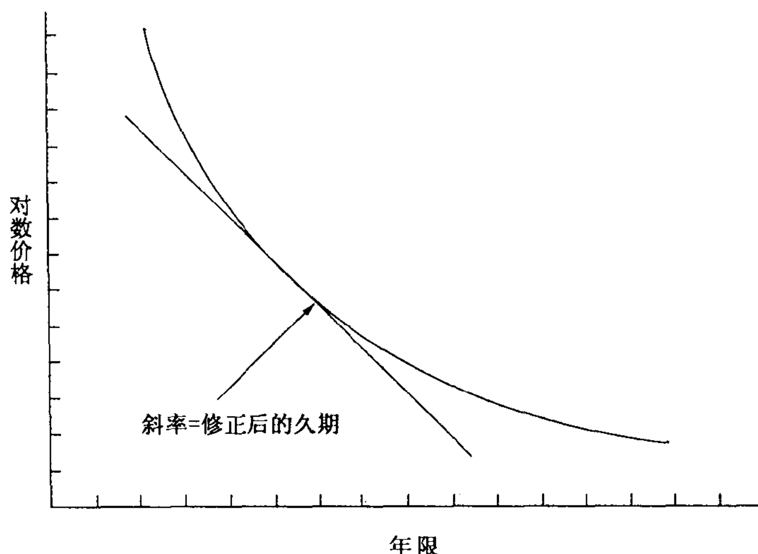


图 10.4 价格—收益率关系

凸性可用收益率变化对价格影响的二阶泰勒展开来近似：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\frac{dP_{cn}(Y_{cn})}{P_{cn}} \approx \frac{dP_{cn}}{dY_{cn}}\frac{1}{P_{cn}}dY_{cn} + \frac{1}{2}\frac{d^2P_{cn}}{dY_{cn}^2}\frac{1}{P_{cn}}(dY_{cn})^2$$
$$= (-\text{修正的久期})dY_{cn} + \frac{1}{2}\text{凸性}(dY_{cn})^2 \quad (10.1.14)$$

最后，麦考雷久期和修正久期都假定现金流是固定的，且不随利率而变化。该假定适合于国债，但并不适合可赎回证券，如公司债券和抵押担保证券，或违约风险随利率而变化的违约风险债券。通过模型化现金流随利率变化的方式，可计算更复杂的证券价格对利率的敏感性，该敏感性称为有效久期。①

附息债券的对数线性模型

学术文献中，久期的思路还用于附息债券对数收益率与持有期报酬和远期利率间的近似线性关系，该关系与零息债券的精确关系相同。为理解该方法，从第 7 章导出的对数线性近似报酬方程(7.1.19)开始，应用于 n 期附息债券的一期报酬 $r_{c,n,t+1}$：

$$r_{c,n,t+1} \approx k + \rho p_{c,n-1,t+1} + (1-\rho)c - p_{cnt} \quad (10.1.15)$$

这里，对数名义息票 c 相当于股票股利，在这里是固定的，而不是随机的。参数 ρ 和 k 由 $\rho \equiv 1/(1+E\overline{(c-p)})$ 和 $k \equiv -\log(\rho)-(1-\rho)\log(1/\rho-1)$ 给定。当债券平价发行时，价格为 1 美元，因而其对数价格为 0，$\rho=1/(1+C)=(1+Y_{cnt})^{-1}$，$\rho$ 利用该值是标准的，它给出以接近于平价售出的债券报酬的一个很好的近似。

类似于零息票表达式(10.1.15)，可以将式(10.1.15)看成是债券对数价格的差分方程。向前计算至到期日，有：

$$p_{cnt} = \sum_{i=0}^{n-1}\rho^i[k+(1-\rho)c - r_{c,n-i,t+1+i}] \quad (10.1.16)$$

该方程将附息债券的价格与息票支付的现金流和债券未来报酬联系起来。对数到期收益率 y_{cnt} 的同样近似表明它满足同样形式的方程：

$$p_{cnt} \approx \sum_{i=0}^{n-1}\rho^i[k+(1-\rho)c - y_{cnt}]$$
$$= \frac{(1-\rho^n)}{(1-\rho)}[k+(1-\rho)c - y_{cnt}] \quad (10.1.17)$$

(10.1.16)式和(10.1.17)式都意味 n 期附息债券收益率满足 $y_{cnt} \approx ((1-\rho)/(1-\rho^n))\sum_{i=0}^{n-1}\rho^i r_{c,n-i,t+1+i}$。尽管不是精确关系，但持有到期，附息债券对数到期收益率与持有到期时债券报酬加权平均间有近似等式。

(10.1.11)式表示附息债券的麦考雷久期是其对数价格关于对数收益率的导数。由(10.1.17)式给出导数为：

① 参见法鲍兹和法鲍兹(Fabozzi and Fabozzi, 1995)，第 28～30 章，以及法鲍兹(Fabozzi, 1996)关于固定收益分析中计算有效久期不同方法的讨论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$D_{cn}\approx\frac{1-\rho^{n}}{1-\rho}=\frac{1-(1+Y_{cnt})^{-n}}{1-(1+Y_{cnt})^{-1}} \tag{10.1.18}$$

其中，第二个等式利用了 $\rho=(1+Y_{cnt})^{-1}$。正如上面所指出的，久期与收益率间的精确关系仅对平价发行债券成立。

将(10.1.17)式和(10.1.18)式代入(10.1.15)式，可得附息债券持有期报酬和收益率之间的对数线性关系：

$$r_{c,n,t+1}\approx D_{cn}y_{cnt}-(D_{cn}-1)y_{c,n-1,t+1} \tag{10.1.19}$$

该方程最初由希勒、坎贝尔和舍恩豪尔茨(Shiller，Campbell and Schoenholtz，1983)推导出来。[①] 它类似于零息债券的(10.1.5)式，(10.1.5)式中的到期期限由久期替代。当然，对于久期等于到期期限的零息债券而言，这两个方程是相同的。

对远期利率的相同分析表明，隐含于附息期限结构的 n 期远期 1 期利率为：

$$f_{nt}\approx\frac{D_{c,n+1}y_{c,n+1,t}-D_{cn}y_{cnt}}{D_{c,n+1}-D_{cn}} \tag{10.1.20}$$

该式同样源于希勒，坎贝尔和舍恩豪尔茨(Shiller，Campbell and Schoenholtz，1983)，当久期等于到期期限时，可简化为折现债券的公式(10.1.8)。

10.1.3 估计零息期限结构

典型的免疫问题是找到一个附息债券或附息债券的投资组合，其报酬对利率微小变动的敏感度与零息债券报酬的相同。也可寻找到附息债券的投资组合，其现金流恰好与零息债券的现金流匹配。一般地，这种投资组合涉及卖空一些债券。该过程也具有学术意义，人们可以从附息期限结构中推出隐含的零息期限结构。

如果完整的零息期限结构——即在每一息票支付日折现债券的价格 $P_1\cdots P_n$——已知，那么很容易得到附息债券的价格：

$$P_{cn}=P_1C+P_2C+\cdots+P_n(1+C) \tag{10.1.21}$$

为了简化符号，这里及本节省略时间下标。

同样，如果一个完整的附息期限结构——每一息票支付日附息债券价格 $P_{c1}\cdots P_{cn}$——已知，那么，(10.1.21)式可用于向后推出隐含的零息期限结构。首先从一期附息债券开始，$P_{c1}=P_1(1+C)$，因而，$P_1=P_{c1}/(1+C)$，然后进行重复迭代，在给定折现债券价格 $P_1,\cdots,P_{n-1}$ 的情况下，我们可得到 P_n 为：

$$P_n=\frac{P_{cn}-P_{n-1}C-\cdots-P_1C}{1+C} \tag{10.1.22}$$

有时不止一个附息债券在每一息票支付日到期，几个附息债券在某些息票支付日到

---

① 希勒、坎贝尔和舍恩豪尔茨用 Y_{cnt} 而不是 y_{cnt}，但对用于推导(10.1.19)式的同样的一阶近似是相等的。他们还推导出持有期报酬率与收益率关系的方程。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

期，这样，附息期限结构从某种意义上说是不完整的。在这种情况下，(10.1.22)式限制了一些附息债券的价格恰好为其他附息债券价格的精确函数。由于税收效应和其他的市场摩擦，那些限制条件实际上是成立的。为解决该问题，卡里顿和库珀(Carleton and Cooper，1976)提出在(10.1.21)式中加入一个债券特定误差项，并在特定日期对所有未到期债券作横断面回归估计。如果这些债券标示为 $i=1\cdots I$，那么回归为：

$$P_{c_in_i}=P_1C_i+P_2C_i+\cdots+P_{n_i}(1+C_i)+u_i,\quad i=1\cdots I \tag{10.1.23}$$

其中，C_i 是第 i 个债券的息票，n_i 是第 i 个债券的到期期限。回归项是不同时期的息票支付，系数为折现债券价格 P_j，$j=1\cdots N$，其中，$N=\max_i n_i$，是最长的附息债券到期期限。假定附息期限结构是完整的，且 $I\geqslant N$，该系统可用最小二乘法来估计。

样条插值法估计

实际上，附息债券的期限结构通常是不完整的，这意味着如果不进一步约束，就不能确定(10.1.23)式中的系数。似乎很自然地假定折现债券的价格随到期期限光滑变动。麦卡拉西(McCulloch，1971，1975)认为一种简单的方法是将 P_n 看作是到期期限的函数 $P(n)$，即是一些预先设定函数的线性组合：

$$P_n=P(n)=1+\sum_{j=1}^{J}a_jf_j(n) \tag{10.1.24}$$

麦卡拉西称 $P(n)$ 为折现函数。(10.1.24)式中的 $f_j(n)$ 是到期期限 n 的已知函数，a_j 是需估计的系数。因为 $P(0)=1$，对所有 j，必有 $f_j(0)=0$。

将(10.1.24)式代入(10.1.23)式中，并重新排列，我们得到一个回归方程：

$$\prod_i=\sum_{j=1}^{J}a_jX_{ij}+u_i,\qquad i=1\cdots I \tag{10.1.25}$$

其中，$\prod_i\equiv P_{c_in_i}-1-c_in_i$，是附息债券价格和其未来支付未折现的值之差，并且，$X_{ij}\equiv f_j(n_i)+C_i\sum_{l=1}^{n_i}f_j(l)$。同(10.1.23)式，该方程可用最小二乘法来估计，但现只有 J 个而不是 N 个系数。①

一个关键的问题是，如何将(10.1.24)式中的函数 $f_j(n)$ 表示出。一个简单方法是将折现函数 $P(n)$ 表示为多项式。为此，令 $f_j(n)=n^j$。虽然一个充分高阶的多项式可以近似任何函数，实际上，人们也许想由更多参数拟合某些到期期限的折现函数。例如，人们想在有许多债券交易的到期期限范围内，得到更具弹性的近似。

为此，麦卡拉西(McCulloch)认为，$P(n)$ 应是一个样条函数。② 一个定义于某一确定区间的 r 阶样条函数，是一个分段的 $r-1$ 阶连续导数的 r 阶多项式，它的 r 阶导数是一

---

① 债券定价误差不可能是同方差。麦卡拉西认为 u_i 的标准偏差与债券 i 买入价卖出价的价差成比例，因此，由价差的倒数作为每一观察值的权重。这不是一致性的要求，而是为了改善估计的效率。

② 休茨、梅森和查恩(Suits，Mason and Chan，1978)给出了样条方法的入门介绍。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

个阶梯函数。r 阶导数不连续变化的点(包括样条函数定义区间的起始点和结束点)称为结点。如果有 K 个结点,就有 $K-1$ 个子区间,其中,每一区间的样条函数是一个多项式。样条函数有 $K-2+r$ 个自由参数,第一个子区间有 r 个,接下来的 $K-2$ 个区间中的每一区间有 1 个(确定未约束的 r 阶导数)。麦卡拉西认为,应该选择与每一子区间包含的债券到期日数相等的结点数。

如果远期利率是连续的,折现函数至少有一个连续导数。因此,由麦卡拉西(McCulloch,1971)估计的一个二次样条能拟合折现函数的最低阶样条。如果我们要求远期利率曲线也连续可导的,那么,需利用由麦卡拉西(McCulloch,1975)和其他人估计的三次样条。麦卡拉西(McCulloch)的文章给出了函数 $f_j(n)$ 更复杂的公式,使得 $P(n)$ 是二次或三次样条。[①]

税收效应

(10.1.25)式的最小二乘法估计选择参数 a_j,使债券定价误差 u_i 与定义折现函数的变量 X_{ij} 无关。如果使用充分弹性的样条,那么,定价误差与到期期限或到期期限的任何非线性函数无关。然而,定价误差也许与债券的其他定义特征的息票利率有关。确实,麦卡拉西(McCulloch,1971)发现由于低的息票利率,其模型往往低估了折价发行的债券的价格。

麦卡拉西(McCulloch,1975)将这归因于税收效应。美国对国债息票和普通收入都征税,而以折扣购买的附息债券的价格上升却按资产利得征税。如果资产利得税率 τ_g 低于普通收入税率 τ(如同历史上的情形一样),那么,这可以解释为折价发行债券的价格升水。对于一个持有债券到期的投资者来说,定价公式(10.1.21)应修改为:

$$P_{cn}=[1-\tau_g(1-P_{cn}]P(n)+(1-\tau)C\sum_{i=1}^{n}P(i) \qquad (10.1.26)$$

修改样条方法可以处理如(10.1.26)式中所示的税收效应,但代价是估计变得复杂一些。一旦考虑税收效应,附息债券价格必须被用于构建(10.1.25)式右边的变量 X_{ij}。这意味着债券定价误差与回归项有关,因而必须通过工具变量法而不是简单的最小二乘法来估计。利曾伯格和罗尔弗(Litzenberger and Rolfo,1984)将这类经税收调整的样条模型应用于几个国家债券市场。

税收调整的样条模型假定所有债券相关的税率相同。模型不能处理"顾客"效应,即被课征不同税收的投资者专门投资于不同的债券。谢弗(Schaefer,1981, 1982)认为,在一个特定的税收篮子中寻找一系列税收即有效的债券处理顾客效应,然后,从这些债券中

① 亚当斯和范德文特(Adams and Van Deventer,1994)提出使用省略立方项的四阶样条,为了使远期利率曲线光滑性最大化。其中光滑性定义为远期利率曲线关于到期期限二阶导数平方的平均的负数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

导出隐含的零息收益率曲线。

非线性模型

尽管样条方法具有弹性，但是样条函数还是有一些没有吸引力的特性。首先，由于样条函数是多项式，它们隐含了一个折现函数，折现函数随到期期限的增加而发散，而不是理论上要求的趋于0；隐含的远期利率也发散，而不是收敛于任何确定的有限值。第二，没有简单的方法保证折现函数总是随到期期限增加而下降（即所有的远期利率都是正的）。图10.1中的远期利率曲线在到期期限为27年时变成负的，这种情况是正常的[参见谢伊(Shea，1984)]。这些问题与这样一个事实有关，即平的零息收益率曲线隐含了一个以指数递减的折现函数，它不易为一个多项式函数近似，因为任何合理的收益率曲线在长期末端变平，对于更长的到期期限债券，使用样条方法可能存在困难。

这些困难使得一些作者以非线性定式来代替(10.1.24)式中的线性定式。瓦西塞克和佛恩(Vasicek and Fong，1982)提出的一种替代方法，是用指数样条，即一个应用于到期期限的负指数变换的样条。指数样条有这样的特性，即远期利率和零息收益率随着到期期限的增加收敛于固定的有限值。更一般地，平的收益率曲线易用指数样条拟合。

尽管理论上指数样条很具吸引力，实际应用中是否比标准的样条表现好还不清楚[参见谢伊(Shea，1985)]。指数样条不易限制远期利率为正。对于长的到期期限的行为，记住不能在息票债券最长到期期限之外直接估计远期利率是重要的，只能通过限制长持有期的远期利率和短持有期的远期利率间的关系来确定。同标准的样条一样，指数样条弹性地拟合观察到的到期期限区域，使得有限的远期利率和向该利率收敛的速度更多地由样条的约束条件决定，而不是由长持有期数据的任何特性决定。因为指数样条涉及用于变换到期期限的一个参数的非线性估计，它较标准的样条更难估计，这一代价可能会超过指数样条的长持有期的特征。在任何情况下，如果他们外推超出可交易债券最长到期期限时，就要小心对待远期利率和收益率曲线了。

一些其他的作者通过限制零息收益率曲线的形状来处理负远期利率。例如，纳尔逊和西格尔(Nelson and Siegel，1987)将到期期限为 n 时的瞬时远期利率构模为等根的二阶差分方程的解，$f(n)=\beta_0+\beta_1\exp(-\alpha n)+\alpha n\beta_2\exp(-\alpha n)$，这意味着，折现函数是双指数：

$$P(n)=\exp[-\beta_0 n+(\beta_1+\beta_2)(1-\exp(-\alpha n)/\alpha-n\beta_2\exp(-\alpha n)]$$

该定式生成一定形状的远期利率和收益率曲线，包括向上倾斜、反转和驼背型。斯文森(Svensson，1994)进一步发展这种定式。近来其他的研究是从期限结构的完全具体化的均衡模型生成债券价格公式，这将在第11章中讨论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

10.2 解释利率期限结构

有大量的实证文献论述检验债券间预期报酬的关系，而没有由完全特定的均衡模型导出这些论述。为简便起见，假定零息债券价格可观察或由附息债券价格估计，下面我们将讨论这些文献。

10.2.1 预期假说

期限结构简单模型称为预期假说(expectations hypothesis，EH)。我们从预期假说中分出纯预期假说(pure EH，PEH)。纯预期假说指长期债券较短期债券的超额报酬为0，预期假说指预期超额报酬为不随时间而变的常数。该术语源自于拉兹(Lutz，1940)。

纯预期假说的不同形式

我们可以根据不同持有期的预期超额报酬为 0 来区分纯预期假说的不同形式。PEH 的第一种形式是使 1 期和 n 期债券的一期预期报酬相等。1 期债券的一期报酬是事先已知的，为$(1+Y_{1t})$，因而，纯预期假说的形式表示为：

$$(1+Y_{1t})=E_t[1+R_{n,t+1}]=(1+Y_{nt})^n E_t[(1+Y_{n-1,t+1})^{-(n-1)}] \qquad (10.2.1)$$

其中，第二个等式遵循持有期报酬的定义，且在 t 期，$(1+Y_{1t})$已知。

纯预期假说的第二种形式是使 1 期和 n 期债券的 n 期预期报酬相等：

$$(1+Y_{nt})^n=E_t[(1+Y_{1t})(1+Y_{1,t+1})\cdots(1+Y_{1,t+n-1})] \qquad (10.2.2)$$

这里，$(1+Y_{nt})^n$ 是一个 n 期债券 n 期报酬，等于 1 期债券预期报酬在 n 期内的再投资。对所有 n，如果(10.2.2)式成立，意味着：

$$1+F_{n-1,t}\equiv\frac{(1+Y_{nt})^n}{(1+Y_{n-1,t})^{n-1}}=E_t[1+Y_{1,t+n-1}] \qquad (10.2.3)$$

在纯预期假说的这种形式下，$(n-1)$期远期一期利率等于$(n-1)$期远期的预期即期利率。

对所有的 n，如果(10.2.2)式成立，意味着：

$$(1+Y_{nt})^n=(1+Y_{1t})E_t[(1+Y_{n-1,t+1})^{n-1}] \qquad (10.2.4)$$

但当利率是随机的，(10.2.4)式与(10.2.1)式是不同的。问题在于杰森不等式，一个随机变量倒数的期望不等于该随机变量期望的倒数。因而，纯预期假说的 1 期形式和 n

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

期形式不能同时成立。①

假定利率服从对数正态分布，并具同方差，利用 1 期的纯预期假说方程(10.2.1)和 n 期的纯预期假说方程(10.2.4)的对数形式，可更清晰地理解这一问题。注意从式(10.1.5)可得 n 期债券的一期对数超额报酬是：

$$r_{n,t+1}-y_{1t}=(y_{nt}-y_{1t})-(n-1)(y_{n-1,t+1}-y_{nt}) \qquad (10.2.5)$$

(10.2.1)式意味着：

$$\mathrm{E}[r_{n,t+1}-y_{1t}]=-(1/2)\mathrm{Var}[r_{n,t+1}-y_{1t}] \qquad (10.2.6)$$

而(10.2.4)式意味着：

$$\mathrm{E}[r_{n,t+1}-y_{1t}]=(1/2)\mathrm{Var}[r_{n,t+1}-y_{1t}] \qquad (10.2.7)$$

(10.2.6)式与(10.2.7)式右边的差别在于 $\mathrm{Var}[r_{n,t+1}-y_{1t}]$，它度量了杰森不等式在一个对数正态同方差模型中数量的重要性。

表 10.2 期限结构变量的均值和标准偏差

变量	长期债券期限(n)						
	2	3	6	12	24	48	120
超额报酬	0.385	0.564	0.848	0.917	0.709	0.614	−0.048
$r_{n,t+1}-y_{1t}$	(0.644)	(1.222)	(2.954)	(6.218)	(11.33)	(19.40)	(37.08)
收益率变化	0.010	0.010	0.010	0.010	0.011	0.011	0.012
$y_{n,t+1}-y_{nt}$	(0.592)	(0.576)	(0.570)	(0.547)	(0.488)	(0.410)	(0.310)
收益率变化	−0.188	−0.119	−0.056	−0.014	0.011	0.011	0.012
$y_{n-1,t+1}-y_{nt}$	(0.608)	(0.586)	(0.573)	(0.555)	(0.488)	(0.410)	(0.310)
收益率之差	0.197	0.326	0.570	0.765	0.958	1.153	1.367
$y_{nt}-y_{1t}$	(0.212)	(0.303)	(0.438)	(0.594)	(0.797)	(1.012)	(1.237)

注：长期债券到期期限以月度量。对每一变量，表 10.2 利用 1952 年 1 月～1991 年 2 月间月度数据给出样本均值和样本标准差(括号内)，单位是年度化的百分点。基本数据是麦卡拉西和昆(McCulloch and Kwon，1993)中的零息债券收益率。

表 10.2 给出了 1952 年 1 月～1991 年 2 月间几个期限结构变量无条件样本均值和标准偏差。② 利用月度数据，但以年度百分点度量的，也就是初始变量乘以 1 200。第一行显示 n 月零息债券对 1 月国库券超额报酬的均值和标准偏差。平均超额报酬是正的，

① 考克斯，因格索尔和罗斯(Cox、Ingersoll and Ross，1981a)清晰地说明了这一点。他们还认为在连续时间内，只有瞬时报酬的预期等式(对应于(10.2.1)式的一个模型)与无套利情况下是一致的。但麦卡拉西(McCulloch，1993)认为，该结果依赖于约束的假定，一般并不成立。

② 表 10.2 是坎贝尔(Campbell，1995)表中的扩展。这里给出的数据与那篇论文中的数据略有不同，因为那篇论文的样本区间从 1951 年 1 月～1990 年 2 月，虽然被错误地报告为 1952 年 1 月～1991 年 2 月。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

并随到期期限而上升，但在 1 年的到期期限时开始下降，对于 10 年期零息债券，降为负数。

这种形态可由将超额报酬分解为(10.2.5)式右边的两部分来理解：n 期和 1 期债券收益率之差($y_{nt}-y_{1t}$)，以及－($n-1$)乘以 n 期债券收益率变动($y_{n-1,t+1}-y_{nt}$)。样本期内，所有固定到期期限的利率呈上升态势，如表 10.2 中第二行以及图 10.5 中 1 个月和 10 年期利率所示。由于持有债券一个月，债券到期期限从 n 下降到 $n-1$，在期限结构短的一端，该效应被抵消，如表 10.2 中第三行，对短期债券而言，由于报酬是正的，因而收益率变化($y_{n-1,t+1}-y_{nt}$)是负的。① 而在期限结构长的一端，期限从 n 下降到 $n-1$ 可以忽略的，因而收益率变化($y_{n-1,t+a}-y_{nt}$)是正的，从而长期零息债券的资产损失，该损失超过由这些债券更高的收益率，如表 10.2 第四行所示。

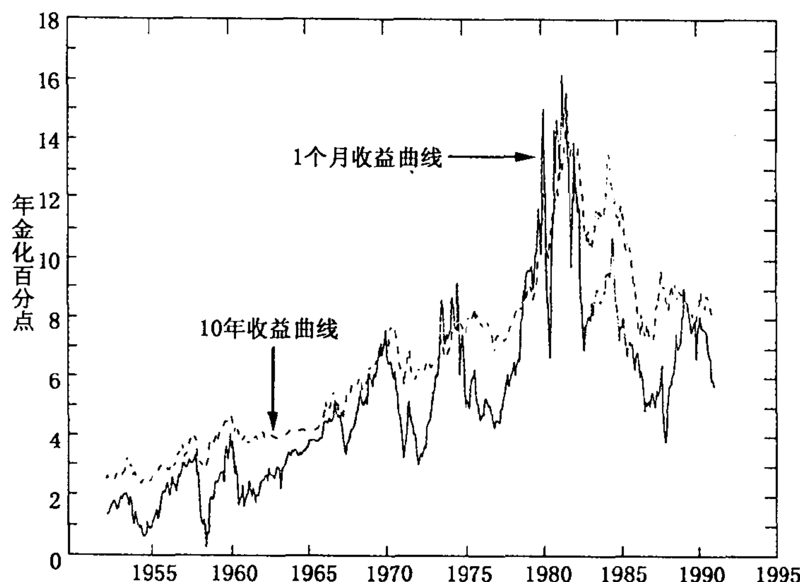


图 10.5 1952～1991 年短期利率和长期利率

超额报酬的标准偏差随到期期限而迅速上升。如果债券超额报酬是白噪声，那么，样本均值的标准误差是标准偏差除以样本容量(469 个月)的平方根。当 $n=2$ 时，标准误差只有 0.03%，$n=120$ 时，标准误差为 1.71%。因而，长的到期期限，平均报酬的估计是不准确的。

超额报酬的标准偏差也决定了纯预期假说 1 期和 n 期形式间的大小。(10.2.6)式和(10.2.7)式间平均年超额报酬之差在 $n=2$ 时只有 0.000 3%，$n=24$ 时只有 0.11%，但在 $n=120$ 时上升到 1.15%。这表明，除长到期期限零息债券之外，纯预期假说不同形式间

① 试图从随到期期限的缩短债券收益率下降的趋势中获利的投资者称为“控制收益率曲线”。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的差别很小。因为这些债券平均报酬估计是不精确的，在期限结构短的一端，数据拒绝所有形式的纯预期假说，但在期限结构长的一端，却不拒绝纯预期假说的任何形式。在这个意义上说，不同形式的纯预期假说间的差别再评价这种假说的时候是不重要的。

大多数的实证研究既不利用纯预期假说的 1 期形式(10. 2. 6)，也不利用 n 期形式(10. 2. 7)，而是采用对数形式，这种形式使所有到期期限债券的预期对数报酬相等：

$$\mathrm{E}[r_{n,t+1}-y_{1t}]=0 \tag{10.2.8}$$

该模型介于(10. 2. 6)式和(10. 2. 7)式之间，并在方差项很小时，可以调整为近似于两者中任何一个，或如麦卡拉西(McCulloch，1993)中的直接推导那样。

对数纯预期假说的含义

一旦纯预期假说以对数形式表示，就比较容易说明关于更长期限债券的含义。首先，对数纯预期假说隐含着一期对数收益率(与 1 期债券 1 期报酬相同)应等于更长的 n 期债券持有一期的预期对数持有期报酬：

$$y_{1t}=\mathrm{E}_t[r_{n,t+1}] \tag{10.2.9}$$

第二，一个长期限 n 期对数收益率应等于 1 期债券 n 个连续对数收益率总和的预期，即 n 期内以对数收益率再投资：

$$y_{nt} = (1/n)\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{E}_t[y_{1,t+i}] \tag{10.2.10}$$

最后，$(n-1)$期远期的 1 期对数利率应该等于 $(n-1)$期远期预期 1 期即期利率：

$$f_{n-1,t}=\mathrm{E}_t[y_{1,t+n-1}] \tag{10.2.11}$$

这意味着一项在未来某个特定日期进行的 1 期投资的对数远期利率应服从一个鞅过程：

$$f_{nt}=\mathrm{E}_t[y_{1,t+n}]=\mathrm{E}_t[\mathrm{E}_{t+1}[y_{1,t+n}]]=\mathrm{E}_t[f_{n-1,t+1}] \tag{10.2.12}$$

对于所有的 n 和 t，如果方程(10. 2. 9)、方程(10. 2. 10)和方程(10. 2. 11)中任一方程成立，那么对于所有的 n 和 t，其他方程也成立。对某一 t 期，当 $n=2$ 时，如果三个方程中任一方程成立，其他方程也成立。而需注意的是，对特定的 n 和 t，一般方程(10. 2. 9)～方程(10. 2. 11)并不等同。

纯预期假说替代

预期假说较纯预期假说更为一般，因为它允许不同到期期限债券的预期报酬相差一个常数，这与到期期限有关，而与时间无关。不同到期期限债券预期报酬之差有时称为期限溢酬。纯预期假说认为期限溢酬为 0，而预期假说认为是常数。[①] 同纯预期假说一样，

---

① 这种用法是文献中最普遍的一种。而法马(Fama，1984)，法马(Fama，1990)及法马和布里斯(Fama and Bliss，1987)以“期限溢酬”表示长期债券实现的(而不是预期的)超额报酬。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

可以形成1期简单报酬、n期简单报酬，或对数报酬的预期假说。如果债券报酬是对数正态和同方差，如辛格尔顿(Singleton,1990)所述，那么，这些公式是互相一致，因为杰森不等式效应是常数。近来的实证研究集中在预期假说的对数形式上。

期限结构的早期讨论往往忽略了期限溢酬时变的可能性，而关注其符号。希克斯(Hicks,1946)和拉兹(Lutz,1940)认为，贷款者偏好短到期期限而借款者喜欢长到期期限，因而，长期债券较短期债券有更高的平均报酬。莫蒂格利尼和萨奇(Modigliani and Sutch,1966)认为，不同的贷款者和借款者可能有不同的偏好习惯，因而期限溢酬可能是负的，也可能是正的。所有这些作者质疑纯预期假说对预期假说并未提出明显的质疑。最近的研究应用跨时资产定价理论来推导平均符号和时变的期限溢酬，我们将在第11章中讨论。

10.2.2 收益率之差和利率预测

现在我们考虑预期假说的实证研究。由于预期假说认为短期和长期债券预期报酬之差为常数，但并不限制常数项，为简便起见，在本节中的所有方程中，省掉了常数项。

我们已经从名义利率水平上说明预期假说的含义，对于"二战"后美国的数据，名义利率似乎服从非常接近于单位根的高度持续过程，因而许多实证研究利用收益率之差而不是收益率水平。①

回顾n期收益率和1期收益率间的收益率之差，$s_{nt}\equiv y_{nt}-y_{1t}$，式(10.1.6)意味着：

$$\begin{aligned} s_{nt} &= \left(\frac{1}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\left[(y_{1,t+i}-y_{1t})+(r_{n+1-i,t+i}-y_{1,t+i})\right]\right] \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{E}_t\left[\sum_{i=1}^{n}\left[(n-i)\Delta y_{1,t+i}+(r_{n+1-i,t+i}-y_{1,t+i})\right]\right] \end{aligned} \tag{10.2.13}$$

(10.2.13)式中第二个等式由一期利率变动的总和代替多期利率变动。该式表明，收益率之差等于预期未来利率变动的加权平均，加上长期债券预期未来超额报酬的非加权平均。如果利率变动平稳(也就是说，如果利率本身有一个而不是两个单位根)，且如果超额报酬平稳(正如任一模型隐含的那样，风险规避和债券的风险特性是平稳的)，那么，收益率之差也平稳，这意味着不同到期期限的收益率协整。②

预期假说表明(10.2.13)式右边的第二项是常数，这对收益率之差和未来利率间关系有重要的含义。它意味着收益率之差(接近于一个常数)是短期债券生命周期内长期债券到期收益率变动的最优预测，且是长期债券生命周期内短期利率变动的最优预测。在省略常数项，关系式为：

① 参阅第2章和第7章关于单位根的讨论。短期利率过程的持续性在第11章中进一步讨论。
② 参阅坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller,1987)关于利率期限结构协整的讨论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\left(\frac{1}{n-1}\right)s_{nt}=\mathrm{E}_t[y_{n-1,t+1}-y_{nt}] \tag{10.2.14}$$

且，

$$s_{nt}=\mathrm{E}_t\left[\sum_{i=1}^{n-1}(1-i/n)\Delta y_{1,t+i}\right] \tag{10.2.15}$$

将 $r_{n,t+1}$ 的定义(10.1.5)式代入(10.2.9)式，整理可得到(10.2.14)式，它表示当收益率之差高时，预期长期利率上升。这是因为，高的收益率之差赋予长期债券一个收益率优势，但为预期的资本损失所抵消。这种资本损失在长期债券收益率上升时才会出现。如果预期超额报酬是常数，(10.2.15)式可直接从(10.2.13)式得到。它表示，当收益率之差高时，预期短期利率上升，从而长期债券生命周期内的平均短期利率等于最初的长期债券收益率。对近期短期利率的提高所赋的权重比前期利率的提高的权重大，因为它们在长期债券生命周期的大部分时间内影响短期利率水平。

表 10.3　　回归系数 $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\gamma}$

被解释变量	长期债券到期期限(n)						
	2	3	6	12	24	48	120
长期收益率变化	0.003	−0.145	−0.835	−1.435	−1.448	−2.262	−4.226
(10.2.16)	(0.191)	(0.282)	(0.442)	(0.599)	(1.004)	(1.458)	(2.076)
短期利率变化	0.502	0.467	0.320	0.272	0.363	0.442	1.402
(10.2.18)	(0.096)	(0.148)	(0.146)	(0.208)	(0.223)	(0.384)	(0.147)

注：长期债券到期期限以月度量。第一行为从(10.2.16)式估计得到的回归系数 $\hat{\beta}$，以及附录中描述的方式计算的允许异方差的渐近标准误差(括号中)。第二行为从(10.2.18)式估计的回归系数 $\hat{\gamma}$，以及以同样方式计算的允许残差自相关的渐近标准误差。期限结构的预期假说意味着 $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\gamma}$ 都等于 1。基本数据是来自麦卡拉西和昆(McCulloch and Kown, 1993)，跨越 1952 年 1 月～1991 年 2 月间的零息债券月收益率。

收益率之差和未来长期利率

(10.2.14)式指收益率之差高，预期长期利率上升，但数据拟合的效果不好。麦考雷(Macaulay, 1938)第一个指出，实际上，高的收益率之差往往反映了长期利率下降。他指出："最高等级债券的收益率在短期利率高于债券收益率期间下降，在短期利率低于债券收益率期间上升。没有相反的例子"[麦考雷(Macaulay, 1938, p. 33)]。

表 10.3 给出回归系数 β_n 及标准误差的估计值：

$$y_{n-1,t+1}-y_{nt}=\alpha_n+\beta_n\left(\frac{s_{nt}}{n-1}\right)+\varepsilon_{n,t} \tag{10.2.16}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

到期期限 n 的变化范围为 3～120 个月(10 年)。[①] 根据预期假说,我们应该有 $\beta_n=1$。事实上,表 10.3 中所有的估计值都是负的,均显著地小于 1,并且有些显著地小于 0。当长期、短期债券收益率之差高时,长期债券收益率往往下降,扩大了长期、短期债券收益率之差,而不是如预期假说所说的那样,长期债券收益率上升冲抵收益率之差。

当 1 期债券对 n 期债券的超额报酬对到期收益率之差 s_{nt} 回归时,回归方程(10.2.16)包含了同样的信息。方程(10.2.5)将超额报酬与收益率联系起来,隐含着超额报酬回归有一个系数为 $(1-\beta_n)$。因而,表 10.3 中 β_n 的负估计值对应于长期债券收益率和超额报酬间强的正相关关系。这类似于第 7 章中讨论的股利率和股票报酬间的正相关关系。[②]

回归方程(10.2.16)的一个困难是对长期利率度量误差特别敏感[参见斯坦博(Stambaugh,1988)]。由于长期利率既以正号的回归项出现,又以负号的被解释变量出现,度量误差往往产生出表 10.3 中的负号。坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller,1991)指出,这可以通过工具变量法处理,选择工具变量时,要求与收益率之差相关,而与债券收益率度量误差无关。他们尝试了多种工具变量,发现负的回归系数十分稳健。

收益率之差和未来短期利率

(10.2.15)式中有更多的可信度,即高收益率之差预测短期利率的长期上升。这可以直接或间接检验。直接的方法是构建(10.2.15)式右边短期利率变化的事后值,并对收益率之差回归。定义:

$$s_{nt}^{*}\equiv\sum_{i=1}^{n-1}(1-i/n)\Delta y_{1,t+i} \tag{10.2.17}$$

并运行回归:

$$s_{nt}^{*}=\mu_n+\gamma_n s_{nt}+\varepsilon_{nt} \tag{10.2.18}$$

预期假说隐含着,对于所有的 n,$\gamma_n=1$。[③]

表 10.3 给出了估计系数 $\hat{\gamma}_n$ 和标准误差,以附录中讨论的方法修正方程误差中的异方差和重叠。估计系数呈 U 形:对于小的 n,估计系数小于 1,并显著为正;n 大约为 1 年时,估计系数随 n 而下降,与 0 无显著差异;当 n 大于 1 年时,估计系数上升,n 为 10 年,

---

① 对于到期期限高于 1 年的,表中利用近似关系式 $y_{n-1,t+1}\approx y_{n,t+1}$,注意这与以 $p_{n,t+1}$ 近似 $p_{n-1,t+1}$ 不同,给出的数据与坎贝尔(Campbell,1995)中的略有不同。因为那篇论文的样本区间从 1951 年 1 月～1990 年 2 月,并被错误报告为从 1952 年 1 月～1990 年 2 月。

② 坎贝尔和安默(Campbell and Ammer,1993),法马和弗兰切(Fama and French,1989),以及坎姆和斯坦博(Keim and Stambaugh,1986)认为,收益率之差有助于预测债券以及其他长期资产的超额报酬。坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller,1991)及希勒、坎贝尔和斯科尔斯(Shiller,Campbell and Schoenhotz,1993)认为,收益率之差往往预测长期债券收益率下降。

③ 法马(Fama,1984)及希勒、坎贝尔和斯科尔斯(Shiller,Campbell and Schoenhotz,1983)在期限结构短的一端利用这一方法。而法马和布里斯(Fama and Bliss,1987)将它扩展到长的一端。坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller,1991)给出了全面的回顾。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

估计系数显著地大于 1。因而，表 10.3 表明，收益率之差对持有期为 2 或 3 个月的短期利率变动有预测力，持有期为几年的情况也有同样的结果。而在 $n=1$，收益率之差变动似乎与随后的短期利率变动无关。

$(1/n)$乘以 n 期债券超额 n 期报酬对收益率之差 s_{nt} 回归，回归方程(10.2.18)包含相同的信息。超额报酬和收益率间的关系意味着超额报酬回归有一个系数$(1-\gamma_n)$。表 10.3 表明，收益率之差能预测持有期为几年的超额报酬，但当持有期趋向于 10 年时，预测力减弱。

刚才描述的直接方法有几个计量经济学上的困难。首先，在样本期末丢失 n 期数据。这可能相当严重：例如，表 10.3 中的 10 年回归结束于 1981 年，而 3 个月期的回归结束于 1991 年。正如坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1991)所讨论的，这样导致结果有实质性的差异。第二，误差项 ε_{nt} 是一个$(n-1)$阶移动平均，因而标准误差必须用附录中描述的方法修正。当$(n-1)$并不比样本容量小时，这可能引起有限样本问题。第三，回归项序列相关，并与滞后的被解释变量相关，也可能导致有限样本问题[参见曼昆和夏皮罗(Mankiw and Shapiro，1986)，理查德森和斯托克(Richardson and Stock，1990)以及斯坦博(Stambaugh，1986)]。

尽管这些计量经济问题很重要，但似乎并不能说明估计系数的 U 形状。坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1991)运用第 7 章第 7.2.3 节描述的向量自回归(VAR)方法发现了相同的结果。他们发现，长期收益率之差与无约束向量自回归预测的未来短期利率变动高度相关，而中期收益率之差与向量自回归预测的相关性更弱。

为解释表 10.3，回到(10.2.13)式是有用的，并重新表述为：

$$s_{nt}=sy_{nt}+sr_{nt} \tag{10.2.19}$$

其中，

$$sy_{nt}\equiv \mathrm{E}_t[s_{nt}^*]=\left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{E}_t\left[\sum_{i=1}^{n}(n-i)\Delta y_{1,t+i}\right]$$

且，

$$sr_{nt}\equiv\left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{E}_t\left[\sum_{i=1}^{n}(r_{n+1-i,t+i}-y_{1,t+i})\right]$$

一般，收益率之差是由两部分构成，一是预期利率变动 (sy_{nt})，另一为预测长期债券的超额报酬(sr_{nt})。这意味着，(10.2.18)式中的回归系数 γ_n 为：

$$\begin{aligned}\gamma_n&=\frac{\mathrm{Cov}[s_{nt}^*,s_{nt}]}{\mathrm{Var}[s_{nt}]}\\&=\frac{\mathrm{Var}[sy_{nt}]+\mathrm{Cov}[sy_{nt},sr_{nt}]}{\mathrm{Var}[sy_{nt}]+\mathrm{Var}[sr_{nt}]+2\mathrm{Cov}[sy_{nt},sr_{nt}]}\end{aligned} \tag{10.2.20}$$

对于任何给定的超额报酬预测 sr_{nt} 的方差，随着利率预测 sy_{nt} 的方差趋于 0，系数 γ_n 也趋于 0，但随着 sy_{nt} 方差的增加，系数 γ_n 趋于 1。表 10.3 中回归系数的 U 形状，或许由

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

于持有期为1年左右，利率变动的预测力减弱解释，或许会由于联邦储备操作程序产生的一些短期预测力，以及产生于商业周期对利率影响的长期预测力。而持有期为1年时，联邦储备委员会可能会平滑利率，从而 sy_{nt} 的变动变小。鲍尔杜齐、伯特勒和佛里西(Balduzzi, Bertola and Foresi, 1993)，鲁德布希(Rudebusch, 1995)及罗伯兹、朗克尔和惠特曼(Roberds, Runkle and Whiteman, 1996)提出解释这一现象的证据。与这一解释相一致，曼昆和米洛恩(Mankiw and Miron, 1986)指出预期假说对利率变动高度可预测期间的数据拟合得更好，例如联邦储备体系建立之前的一段时间。

10.3 结 论

表10.3中结果表明，一个根据到期收益率评价债券和收益率相对高时买入长期债券的自然投资者，在战后的美国往往获得超额报酬。这一发现让人想起在第7章中的讨论，持有期开始时的股利率较高，股票报酬往往较高。如同股票市场的情况，这是否反映了投资者一方理性的失败或存在时变的风险报酬，目前还不清楚。福特(Froot, 1989)利用调查数据，发现债券市场投资者的非理性预期，但也有下一章中讨论的许多理论工作，即探讨时变风险对利率期限结构的影响。

本章着重讨论收益率之差对名义利率未来变动的预测力。收益率之差在预测其他变量中也是有用的。例如，人们可以将名义利率分解为通货膨胀率和实际利率；研究表明，大多数期限结构的长期预测力是针对通货膨胀而不是针对实际利率的[见法马(Fama, 1975, 1990)和米什金(Mishkin, 1990a, 1990b)]。我们在第8章提到的期限结构的斜率对股票和债券有一定的预测超额报酬的能力。其他如希恩(Chen, 1991b)及埃什特拉和哈道维利斯(Estrella and Hardouvelis, 1991)最近的研究表明，期限结构预测实际的经济活动，因为反转的收益率曲线往往先于经济衰退出现，而陡峭向上倾斜的收益率曲线往往先于经济扩张情况。

习 题

10.1 您被告知一个8年期名义零息债券的对数到期收益率为9.1%，9年期名义零息债券对数到期收益率为8%。

10.1.1 期限结构的纯预期理论能描述这些数据吗？

10.1.2 1年过后，(a)部分的债券仍然有相同的到期收益率，期限结构的纯预期理论能描述这些新数据吗？

10.1.3 如果您被告知，债券有每年8%的息票利率，而不是零息票，您的答案有何变化？

10.2 假定货币当局是这样控制短期利率：

$$y_{1t}=y_{1,t-1}+\lambda(y_{2t}-y_{1t})+\varepsilon_t$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中，$\lambda>0$。直观上，货币当局试图平滑利率，而当收益率曲线陡峭时，提高利率。假定两期债券收益率满足：

$$y_{2t}=(y_{1t}+\mathrm{E}_t[y_{1,t+1}])/2+x_t$$

其中，x_t 是期限溢酬，表示两期收益率对(10.2.10)式的对数纯预期假说的偏离。变量 x_t 服从AR(1)过程：

$$x_t=\phi x_{t-1}+\eta_t$$

误差项 ε_t 和 η_t 序列不相关，并互不相关。

10.2.1　证明该模型可由下面的利率过程求出：

$$y_{1t}=y_{1,t-1}+\gamma x_t+\varepsilon_t$$

将系数 γ 表示为模型中其他参数的函数。

10.2.2　期限结构的预期假说常以方程(10.2.17)的方式检验，即标准化的短期利率变动对收益率之差的回归：

$$(y_{1,t+1}-y_{1t})/2=\alpha+\beta(y_{2t}-y_{1t})+u_{t+1}$$

和检验系数 $\beta=1$ 的假设。如果上面描述的模型成立，回归系数 β 的总体值是多少？

10.2.3　现在考虑涉及 n 期债券问题的情况。货币当局将短期利率设定为：

$$y_{1t}=y_{1,t-1}+\lambda(y_{nt}-y_{1t})+\varepsilon_t$$

和 n 期债券收益率由：

$$y_{nt}-y_{1t}=(n-1)\mathrm{E}_t[y_{n,t+1}-y_{nt}]+x_t$$

决定。其中，x_t 现在表示对(10.2.14)式的对数纯预期假说的 n 期收益率的偏离(这一形式没有考虑 y_{nt} 和 $y_{n-1,t}$ 间的区别)。同前一样，x_t 服从 AR(1)过程，那么，系数 γ 是多少？(10.2.16)式

$$(y_{n,t+1}-y_{nt})=\alpha+\beta(y_{nt}-y_{1t})/(n-1)+u_{t+1}$$

的回归系数 β 是多少？

10.2.4　您研究这样问题所用的模型是对期限结构实证结果的合理解释吗？为什么是或为什么不是？

注：这一问题基于麦考伦(McCallum，1994)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

11. 期限结构模型

本章着重探讨现代金融计量经济学的重要内容——充分设定的利率期限结构的一般均衡模型。这一领域的许多研究集中在连续时间模型上。这一假设简化了一些理论分析，但却使经验应用复杂化。由于我们偏重于模型的计量检验及其经验应用，我们采用了离散时间方法。但是，我们也注意了将所有结果与连续时间状态相连接。我们还遵循了由实际利率债券起始的第一代模型的发展历程，但同时我们也在一定程度上详细论述了这些模型如何运用于名义利率债券的定价等。

本章所有模型的出发点，都是第 8 章(8.1.3)式介绍的一般资产定价条件：$1=\mathrm{E}_t[(1+R_{i,t+1})M_{t+1}]$，其中，$R_{i,t+1}$是资产 i 的实际收益，M_{t+1}是一个随机贴现变量。

正如我们在第 8 章第 8.1 节中解释的，这一条件意味着全体资产的预期收益都与随机贴现变量的协方差负相关。在投资者效用最大化模型中，随机贴现变量衡量了投资者的边际效用。资产收益与随机贴现变量的函数呈凹性，预示着边际效用高时获得收益，即投资者在资产价值高时出售资产。对这样的资产，投资者愿意付出高价，并接受低的回报。

固定收益的证券运用这一框架，尤其容易定价。当现金流量呈随机状态时，它的随机性有助于确定资产收益和随机贴现变量之间的协方差。但是，固定收益证券有明确的现金流量，因此它与随机贴现变量之间的协方差仅仅因为贴现率的时间差而产生，而这一贴现率变量是由随机贴现因子的时间序列行为所驱动的。因此，对于随机贴现因子而言，期限结构模型等同于时间序列模型。

从第 10 章(10.1.4)式，我们知道 n 期实际零息债券的收益与实际债券价格存在一个特定的简单关系：

$$(1+R_{n,t+1})=P_{n-1,t+1}/P_{nt}$$

将这一关系替代进(8.1.3)式，我们发现 n 期实际债券的实际价格 P_{nt}满足：

$$P_{nt}=\mathrm{E}_t[P_{n-1,t+1}M_{t+1}] \tag{11.0.1}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这个等式本身即是一个逆归方法。我们将 P_{nt} 模拟成那些可以预测 M_{t+1} 过程的状态变量。在这一过程中，将 $P_{n-1,t}$ 作为状态变量，我们可以计算 P_{nt} 的方程。设 $P_{0t}=1$，我们开始计算。

等式(11.0.1)同样可以前向性地表达为 n 期债券价格是 n 个随机贴现变量的均值：

$$P_{nt}=\mathrm{E}_t[M_{t-1}\cdots M_{t+n}] \tag{11.0.2}$$

虽然我们着重于递归方法，在一些模型中直接运用(11.0.2)式更为方便。

第 11.1 节探讨了一组简单模型，在这些模型中，所有相关变量是有条件的对数正态分布的，债券收益的对数值与状态变量是线性相关的。这些关联收益模型包括所有最为广泛运用的期限结构模型。第 11.2 节表述了这些模型如何适用于名义利率数据，同时考察了它们的优点和弱点。期限结构模型的主要用途之一还在于为利率衍生工具定价；在第 11.3 节中我们讨论了这一应用。我们表述了标准的期限结构模型如何进行修改，以便能够适用于当前期限结构。接着我们运用这些模型定价固定收益证券的远期，期货和期权品种。

11.1　关联收益模型

为简单化起见，整节中我们假设随机贴现变量 M_{t+1} 的分布是有条件对数正态的。我们还特别设定债券价格和 M_{t+1} 呈联合对数正态分布。这样，取对数，我们可以得到：

$$p_{nt}=\mathrm{E}_t[m_{t+1}+p_{n-1,t+1}]+(1/2)\mathrm{Var}_t[m_{t+1}+p_{n-1,t+1}] \tag{11.1.1}$$

如同往常，这里小写字母代表对应大写字母的对数值，如 $m_{t+1}\equiv\log(M_{t+1})$，这是我们将运用的最基本式。

我们从两个模型开始。在这两个模型中，一个状态变量预测随机贴现因子。第 11.1.1节讨论第一个模型，这一模型中 m_{t+1} 是同方差的；第 11.1.2 节则讨论第二个模型，在这一模型中 m_{t+1} 的条件方差随时间变化。这些分别是著名的瓦西塞克(Vasicek，1977)以及考克斯、因格索尔和罗斯(Cox，Ingersoll and Ross，1985a)模型的离散时间形式。第 11.1.3 节则论述了一个更为一般的模型，即伦斯达夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz，1992)模型在两个状态变量下的离散时间形式。所有这些模型都有一个共同性质，即债券价格的对数值，债券收益的对数值在这些状态变量中是线性的，或是仿射相交的。这保证了债券价格和随机贴现因子之间所需的联合对数正态分布。第11.1.4节则描述了这些关联收益模型的一般性质，同时讨论了一些替代模型方法。[①]

---

① 我们有关离散时间状态的表述沿袭了辛格尔顿(Singleton，1990)，桑(Sun，1992)，尤其是巴克斯(Backus，1993)的模型。桑(Sun，1992)模型更为详细地探讨了离散时间和连续时间模型之间的关系。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

11.1.1 同方差单变量模型

运用随机贴现因子对数值的负数，即负的 m_{t+1} 来讨论将更为方便。不失一般性，这可以表述为它前一时间的条件期望值 x_t 和一个新生变量 ε_{t+1}：

$$-m_{t+1}=x_t+\varepsilon_{t+1} \tag{11.1.2}$$

我们假设 ε_{t+1} 是同方差正态分布的。

接下来我们假设 x_{t+1} 遵循最为简单、有趣的时间序列过程，即一阶自回归模型 AR(1)，这里，均值为 μ，ϕ 为常数。x_{t+1} 的冲击设为 ξ_{t+1}：

$$x_{t+1}=(1-\phi)\mu+\phi x_t+\xi_{t+1} \tag{11.1.3}$$

m_{t+1} 和 x_{t+1} 的新生过程可能是相关的。为获得这一关系，我们把 ε_{t+1} 写作：

$$\varepsilon_{t+1}=\beta\,\xi_{t+1}+\eta_{t+1} \tag{11.1.4}$$

这里，ξ_{t+1} 和 η_{t+1} 是常方差正态分布的，相互之间无相关性。

冲击 η_{t+1} 的非相关性仅仅影响期限结构的平均水平，而不影响向其平均规模或时间序列行为。简单表示，我们将其省略，假设 $\varepsilon_{t+1}=\beta\xi_{t+1}$，等式(11.1.2)可以重新写作：

$$-m_{t+1}=x_t+\beta\,\xi_{t+1} \tag{11.1.5}$$

新生 ξ_{t+1} 现在是系统内惟一的振波；同理我们将它的方差简写为 σ^2，以免混淆。

等式(11.1.5)和等式(11.1.3)意味着 $-m_{t+1}$ 可以被写为一个 ARMA(1,1)过程，因为它是一个 AR(1)过程和白噪声之和。事实上，$-m_{t+1}$ 和第 7 章第 7.1.4 节例子中的资产收益有相同的结构。正如在那个例子中，非常重要的是要认识到 $-m_{t+1}$ 不是一个单变量过程，即使其条件期望值 x_t 是单变量。因此，$-m_{t+1}$ 的单变量自相关过程并没有告诉我们了解资产价格所需的一切；系数值的不同设置，对于资产价格的不同应用，可以与同一设置状态下 $-m_{t+1}$ 的单变量自相关过程是一致的。举个例子，这些自相关都可以是零，因为 $\sigma^2=0$，如此可以使利率是常数。但是，如果 β 取一特定值，虽然 $\sigma^2\neq0$，他们仍可以是零。在这一状态下利率则是随时间变化的。

设 $n=1$，$p_{n-1,\,t+1}=p_{0,\,t+1}=0$，我们有了一期债券的价格，(11.1.1)式中 $p_{n-1,\,t+1}$ 的期限省略，将(11.1.5)式和(11.1.3)式代入(11.1.1)式，可得：

$$p_{1t}=\mathrm{E}_t[m_{t+1}]+(1/2)\mathrm{Var}_t[m_{t+1}]=-x_t+\beta^2\sigma^2/2 \tag{11.1.6}$$

一期债券收益 $y_{1t}=-p_{1t}$，于是：

$$y_{1t}=x_t-\beta^2\sigma^2/2 \tag{11.1.7}$$

短期利率等于一个状态变量减去一个常数，所以它本质上是一个状态变量的动态 AR(1)过程。事实上，我们可以将短期利率在这一模型中视作衡量国家经济的变量。注意在(11.1.7)式中并没有剔除负的短期利率。

现在我们猜测 n 期债券的定价方程形式为：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$-p_{nt}=A_n+B_nx_t \tag{11.1.8}$$

由于 n 期债券收益 $y_{nt}=-p_{nt}/n$，我们猜测任一期限的债券收益与状态变量 x_t 之间的关系是线性或附属关联的（布朗和谢弗[Brown and Schaefer，1991]）。我们已经知道 $n=0$ 和 $n=1$ 时的债券价格满足等式(11.1.8)，如果 $A_0=B_0=0$，$A_1=-\beta^2\sigma^2/2$ 和 $B_1=1$ 的话。我们接着通过证明它是与定价方程(11.1.1)相一致的来证明我们的猜测。同时我们可以推导系数 A_n 和 B_n 的递归方程。

我们对于定价方程(11.1.8)式的猜测意味着(11.1.1)式的右侧的两个关系式是：

$$\mathrm{E}_t[m_{t+1}+p_{n-1,t+1}]=-x_t-A_{n-1}-B_{n-1}(1-\phi)\mu-B_{n-1}\phi x_t$$
$$\mathrm{Var}_t[m_{t+1}+p_{n-1,t+1}]=(\beta+B_{n-1})^2\sigma^2 \tag{11.1.9}$$

将等式(11.1.8)和等式(11.1.9)代入等式(11.1.1)，我们得到：

$$A_n+B_nx_t-x_t-A_{n-1}-B_{n-1}(1-\phi)\mu-B_{n-1}\phi x_t$$
$$+(\beta+B_{n-1})^2\sigma^2/2=0 \tag{11.1.10}$$

这一等式对于任何 x_t 都必然成立。因此 x_t 的系数必然相加为零，其余系数的和也应为零。由此导出：

$$B_n=1+\phi B_{n-1}=(1-\phi^n)/(1-\phi)$$
$$A_n-A_{n-1}=(1-\phi)\mu B_{n-1}-(\beta+B_{n-1})^2\sigma^2/2 \tag{11.1.11}$$

这就证明了等式(11.1.8)成立，因为有了(11.1.11)式的系数关系，定价方程(11.1.8)式满足资产定价方程(11.1.1)和它的假设，即债券收益是有条件对数正态分布的。

同方差模型的含义

同方差债券模型有几个有趣的含义。首先，系数 B_n 可以衡量当状态变量 x_t 上升，或一期利率 y_{1t} 同等地上升时，n 期债券价格对数值下降。因此它也衡量了 n 期债券收益相对于一期利率变化的敏感性。等式(11.1.11)表明了系数 B_n 遵循了一个简单的 n 阶一元线性差分方程，其解为 $(1-\phi^n)/(1-\phi)$。当 n 上升时，B_n 趋近于极限 $B=1/(1-\phi)$。这样，债券价格随短期利率上升而下跌，债券收益相对于短期利率的敏感性也随到期日的来临而提高。

注意 B_n 不同于第 10 章第 10.1.2 节中期限的定义。期限衡量 n 期债券收益相对于 n 期债券总收益的敏感性，对于零息债券而言期限等同于到期日。B_n 衡量的是 n 期债券收益相对于一期利率的敏感性；由于 n 期债券总收益的波动总是小于每期利率的变动，因为 B_n 总是小于到期日敏感性。

第二个含义是 n 期债券收益的对数均值超过一期债券，$\mathrm{E}_t[r_{n,t+1}]-y_{1t}=\mathrm{E}_t[p_{n-1,t+1}]-p_{nt}+p_{1t}$，这是由下式得出的：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\begin{aligned}E_t[r_{n,t+1}]-y_{1t}&=-\mathrm{Cov}_t[r_{n,t+1},m_{t+1}]-\mathrm{Var}_t[r_{n,t+1}]/2\\&=B_{n-1}\mathrm{Cov}_t[x_{t+1},m_{t+1}]-B_{n-1}^2\mathrm{Var}_t[x_{t+1}]/2\\&=-B_{n-1}\beta\sigma^2-B_{n-1}^2\sigma^2/2\end{aligned}\qquad(11.1.12)$$

(11.1.12)式中的第一个等式是一个一般结果，就如在第 8 章中讨论过的，该式对于任何资产的收益相对于无风险利率的对数溢值始终成立。该式也可以通过对 n 期债券和短期利率的基本关系式 $1=E_t[(1+R_{i,t+1})M_{t+1}]$ 两边取对数而得到，然后在两个等式之间取差数。这就表明收益的对数值溢值是期限的风险值之和，由于我们运用对数推导，杰森不等式在此有所运用。

(11.1.12)式第二个等式运用了这么一个事实，即 n 期债券收益对数值的非预期因素，恰好等于 $-B_{n-1}$ 乘以状态变量的变化。(11.1.12)式第三个等式则运用了另外一个事实，即 x_{t+1} 的条件方差和它与 m_{t+1} 的条件协方差是常数，表示任一证券的预期超正常收益对数值是相对于时间的常数，这样，对数预期假设，但不是对数纯预期假设就可以成立。

$(-B_{n-1})$ 是 n 期债券收益对数值相对于状态变量变化的回归系数，因此，我们可以把 $(-B_{n-1})$ 解释为债券的单一风险系数，而 $\beta\sigma^2$ 则是一个单位风险对债券的影响，换个说法，根据瓦西塞克(Vasicek，1977)模型和其他一些模型，我们能够计算风险的价格，它是债券的预期超正常收益对数值比率，再加上它根据杰森不等式作调整，相对于债券收益超出部分对数值的标准差的方差的一半。如此定义，风险的价格在这一模型中即为 $-\beta\sigma^2$。

同方差债券定价模型与远期利率横式有关，因此，它们的收益曲线形状具有类似的含义。为推导这些定义，我们可以认识到，在任何期限结构模型中，第 n 期远期利率，记作 f_{nt}，满足：

$$\begin{aligned}f_{nt}&=p_{nt}-p_{n+1,t}\\&=-p_{1t}+(E_t[p_{n,t+1}]-p_{t+1,t}+p_{1t})-(E_t[p_{n,t+1}]-p_{nt})\\&=y_{1t}+(E_t[r_{n+1,t+1}]-y_{1t})-(E_t[p_{n,t+1}]-p_{nt})\end{aligned}\qquad(11.1.13)$$

在这一模型中，$E_t[p_{n,t+1}]-p_{nt}=B_nE_t[\Delta x_{t+1}]$，$E_t[r_{n+1,t+1}]-y_{1t}$ 由(11.1.12)式得到。将其代入(11.1.13)式，同时运用 $B_n=(1-\phi^n)/(1-\phi)$，我们得到：

$$\begin{aligned}f_{nt}&=\mu-\left[\beta+\left(\frac{1-\phi^n}{1-\phi}\right)\right]^2\frac{\sigma^2}{2}+\phi^n(x_t-\mu)\\&=\left[\mu-\left(\beta+\frac{1}{1-\phi}\right)^2\frac{\sigma^2}{2}\right]+\left[(x_t-\mu)+\left(\frac{1+\beta(1-\phi)}{(1-\phi)^2}\right)\sigma^2\right]\phi^n\\&\quad-\left[\left(\frac{1}{1-\phi}\right)^2\frac{\sigma^2}{2}\right]\phi^{2n}\end{aligned}\qquad(11.1.14)$$

(11.1.14)式中第一个等式表明 n 期远期利率的变化，等于 ϕ^n 乘以 x_t 的变化值。因此，远期利率的曲线运动，最后将随 ϕ 的指数值消失。这可以被理解为，对数预期假设在这个模型中成立，远期利率变化其实是由 ϕ^n 决定的预期未来短期利率的变化，乘以即期短期利率变化。

随着到期日的来临，n 期的增加，远期利率趋向于：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\mu-(\beta+1/(1-\phi))^2\sigma^2/2$$

这是一个独立于状态变量 x_t 即期值的常量。(11.1.7)式意味着短期利率的平均值是$\mu-\beta^2\sigma^2/2$。因此,有期限的远期利率和短期利率平均值之间的差为:

$$-(1/(1-\phi))^2\sigma^2/2(\beta/(1-\phi))\sigma^2$$

该值与有期限长期债券的超正常收益对数值相等。由于杰森不等式的有效性,远期利率对数曲线只有在$\beta<0,\beta<-1/2(1-\phi)$这个充分条件下,才向下倾斜,趋向于其极限值。

当 x_t 变化时,远期利率曲线会呈现不同的形状。(11.1.14)式第二个等式表明,远期利率曲线可以被写作一个不随 n 变化的因子,一个随 ϕ 的 n 次方逐渐消失的因子和一个随ϕ^2 的 n 次方逐渐消失的因子的和。第三个因子有一个负的常系数;因此,远期利率曲线中总有一个陡峭的上升因子。第二个因子有一个随 x_t 变化的系数,因此该因子可能缓慢上升,缓慢下降或比较平坦。因此,远期利率曲线可能单一上升,单一下降(逆转),或者开始上升,随后下降(呈山峰状)。呈山峰状的情形,第三因子一开始处于主导地位,接着又由第二因子主导曲线的状态下出现。这些是名义远期利率曲线最通常的形状。因此,如果谁希望应用名义利率模型,而忽略利率可以是负的因素,那么他总能找到最合适的名义利率期限结构。然而,模型不可能产生这样一条远期利率曲线,即开始是下降的,然后是上升的(倒置的山峰型),就如有时我们在数据中能够看到的。

值得一提的是,当 $\phi=1$,一期利率遵循随机游走,这时系数 A_n 和 B_n 不会随 n 的增加而收敛。我们可以得到 $B_n=n$,且 $A_n-A_{n-1}=-(\beta+n-1)^2\sigma^2/2$。远期利率变成$f_{nt}=x_t-(\beta+n^2)\sigma^2/2$,如果$\beta<0$,该值开始可以随到期日逐渐提高,但最后会永远随到期日下降。因此,同方差债券定价模型并不允许有期限的远期利率既是有限的,又随时间变化的;或者 $\phi<1$,此时有期限的远期利率随时间变化为常数;或者 $\phi=1$,此时没有期限的远期利率。这一限制看起来有违常理,但本质上它遵循了最被公认的结果——根据戴伯维格、因格索尔和罗斯(Dybvig, Ingersoll and Ross,1996)的推导——有期限的远期利率,如果它存在的话,不可能下跌。在同方差模型 $\phi<1$ 时,有期限远期利率不会下降是因为它是常数;$\phi=1$ 时,该远期利率不存在。

在本节中研究的离散时间模型,与瓦西塞克(Vasicek,1977)连续时间模型紧密相关。瓦西塞克特别研究了一个对短期利率 r 的连续时间 AR(1)或称奥斯坦因—乌伦贝克过程,该过程由下述随机差分等式给出:

$$dr=\kappa(\theta-r)dt+\sigma dB \tag{11.1.15}$$

这里,κ,θ 和σ 是常数。[①] 同样,瓦西塞克假设利率风险的价格——债券超正常收益

① 如同第 9 章一样,(11.1.15)式中的 dB 表示布朗运动的一个增量,不要把它与本节中的债券价格系数 B_n 混淆起来。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

均值相对于债券超正常收益标准差的比率——是一个不依赖于短期利率的常数。本节的模型推导了短期利率的 AR(1)过程和基于随机贴现因子最初假设的风险的常数价格。

模型的均衡分析

我们的分析已经表明，系数 β 的正负决定了所有债券风险溢值的正负。理解这一点，可以考虑一个正的"冲击"ε_{t+1}，它带来了状态变量 x_{t+1} 的增加和所有债券价格的下跌。当 $\beta>0$时，这个"冲击"同样带来了 m_{t+1} 的下降，所以债券收益和随机贴现因子正相关。这个相关具有对冲价值，所以债券的风险溢酬为负。当 $\beta<0$ 时，换一个角度，债券收益和随机折现因子负相关，债券的风险溢酬为正。

考虑第 8 章中随机折现因子代表代理机构的效用函数的情形，我们可以得到更多直感。在这一案例中，$M_{t+1}=\delta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}$，这里 δ 是随机折现因子，γ 是代理机构的风险规避系数。两边取对数，我们得到：

$$m_{t+1}=\log(\delta)-\gamma\Delta c_{t+1} \tag{11.1.16}$$

它遵循 $x_t\equiv \mathrm{E}_t[-m_{t+1}]=-\log(\delta)+\gamma \mathrm{E}_t[\Delta c_{t+1}]$，另外，$\varepsilon_{t+1}\equiv -m_{t+1}-\mathrm{E}_t[-m_{t+1}]=\gamma(\Delta c_{t+1}-\mathrm{E}_t[\Delta c_{t+1}])$。$x_t$ 是预期消费增长的线性函数，而 ε_{t+1} 与消费增长变动成比例。如此，本节中的期限结构函数意味着预期消费增长是一个 AR(1)过程，实现的消费增长是一个 ARMA(1,1)过程。系数 β 决定了消费变化和未来消费增长预期变化的协方差。如果 $\beta>0$，那么今天正的消费振波会导致未来消费增长预期增长，抬高利率；由此带来的债券价格下跌会使债券和消费负相关，带来债券的负风险溢值。如果 $\beta<0$，"一个正"的消费振波会使名义利率下跌，债券会有正的风险溢酬。

坎贝尔(Campbell，1986)在一个相关模型中探讨了债券"风险溢酬"和消费的时间序列性质之间的相互关系。坎贝尔模型非常类似于这里的模型，在这一模型中，消费和资产收益是有条件地服从同方差的对数正态分布。它比这里的模型更严格的是，它使消费增长(而不是预期消费增长)成为一个一元随机过程，但它更为一般或通用的是，它没有要求预期消费增长遵循 AR(1)过程。坎贝尔证明了 n 期债券风险溢酬的符号，依赖于消费的新生变化在$(n-1)$期内是提高还是降低了消费增长预期。巴克斯和津(Backus and Zin，1994)探讨了这一模型更为详细的情况。巴克斯、格雷戈里和津(Backus，Gregory and Zin，1989)还研究了债券风险溢酬和消费增长的时间序列性质和利率的联系。

考克斯、因格索尔和罗斯(Cox，Ingersoll and Ross，1985a)证明了如何把本节中的模型基于一个基础产品模型推导连续时间期限结构模型。桑(Sun，1992)和巴克斯(Backus，1993)重申了他们在离散时间模型中的结果。假设有一个代理机构，其贴现因子为 δ，并且存在可分割时间内的对数效用。同样假设该代理机构受下面形式的预算约束：

$$K_{t+1}=(K_t-C_t)X_tV_{t+1} \tag{11.1.17}$$

这里，K_t 是基期资本，(K_t-C_t)是投资资本，X_tV_{t+1} 是资本收益。这个预算约束具

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

有常规收益效应，因为其资本收益不依赖于资产水平。X_t 是收益的可预计部分，V_{t+1} 是一个不可预计的技术振动。运用对数效应，众所周知机构会选择 $C_t/K_t=(1-\delta)$。将其代入(11.1.17)式，两边取对数，我们发现：

$$\Delta c_{t+1}=\log(\delta)+x_t+v_{t+1} \tag{11.1.18}$$

这里，$v_{t+1}\equiv\log(V_{t+1})$，$-m_{t+1}=-\log(\delta)+\Delta c_{t+1}=x_t+\varepsilon_{t+1}$，这个推导过程允许 x_t 遵循任何过程，包括期限结构模型中假设的 AR(1)过程。

11.1.2 平方根单因素模型

上一节的同方差模型由于其简单性，易于被人接受，但它有一些不太吸引人的特征。首先，它假设利率变化有常方差。第二，模型允许利率小于零。这允许了它在实际利率中的应用，但不适用于名义利率。第三，它隐含了风险溢酬随时间变化为常数，与第 10 章第 10.2.1 节中的证据正好相反。保留基本结构中的大部分简单性，但允许状态变量 x_t 遵循条件正态分布，但是异方差平方根过程，人们可以将该模型稍加改变，以便处理这些问题。这一变化完全与前一节中模型的均衡基本相一致。

平方根模型，是著名的考克斯、因格索尔和罗斯(Cox, Ingersoll and Ross，1985a)连续时间模型的离散时间转型式，将下式替代(11.1.5)式和(11.1.3)式：

$$-m_{t+1}=x_t+x_t^{1/2}\varepsilon_{t+1}=x_t+x_t^{1/2}\beta\,\xi_{t+1} \tag{11.1.19}$$

$$x_{t+1}=(1-\phi)\mu+\phi x_t+x_t^{1/2}\xi_{t+1} \tag{11.1.20}$$

这里的新因子是振动 ξ_{t+1} 乘以 $x_t^{1/2}$，理解其重要性，回忆一下，同方差模型中 x_{t+i} 和 m_{t+i} 对于所有 $i\geq1$ 都是对应于 x_t 条件正态分布的。这意味着，人们可以成为通过对(11.0.1)式取对数得到(11.1.1)式这个递归等式，或者可以对(11.0.2)式取对数得到 n 期对数线性等式来分析同方差模型：

$$p_{nt}=\mathrm{E}_t[m_{t+1}+\cdots+m_{t+n}]+(1/2)\mathrm{Var}_t[m_{t+1}+\cdots+m_{t+n}] \tag{11.1.21}$$

基于(11.1.21)式的计算相比于上一节的分析更为复杂，但其结论是相同的。在平方根模型中，相比较而言，x_{t+1} 和 m_{t+1} 对应于 x_t 条件正态分布，但 x_{t+i} 和 m_{t+i} 对于所有 $i>1$，都不对应于 x_t 条件正态分布。这意味着，人们只能运用(11.1.1)式递归等式分析平方根模型；n 期对数线性关系式(11.1.21)在平方根模型中并不成立。

如前进行递归分析，我们将(11.1.19)式代入(11.1.1)式，获得一期债券价格：

$$p_{1t}=\mathrm{E}_t[m_{t+1}]+(1/2)\mathrm{Var}_t[m_{t+1}]=-x_t(1-\beta^2\sigma^2/2) \tag{11.1.22}$$

一期债券收益 $y_{1t}=-p_{1t}$，是状态变量 x_t 的同比数。同样，短期利率在此模型中衡量了经济状态。

由于短期利率同比于状态变量，它蕴含着条件方差同比于利率水平的性质。许多作者已经注意到利率变动在利率高时趋于提高；第 11.2.2 节我们将讨论关于此点的经验证

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

明。这一性质同样使得利率难以变负，因为状态变量的向上漂移趋向于控制住当 x_t 趋于零的下降趋势的随机振波。考克斯，因格索尔和罗斯(Cox，Ingersoll and Ross，1985a)证明了这一模型的连续时间变换式中负的利率可以被排除，这一变换中，即期利率遵循 $dr=\kappa(\theta-r)dt+\sigma r^{1/2}dB$。[①]

现在我们猜测 n 期债券的价格方程如前一样，有这样的线性形式：$-p_{nt}=A_n+B_nx_t$，即(11.1.8)式。在这一模型中，$A_0=B_0=0$，$A_1=0$，$B_1=1-\beta^2\sigma^2/2$。证明这个猜测比较直接，可以证明 A_n 和 B_n 遵守：

$$B_n=1+\phi B_{n-1}-(\beta+\beta_{n-1})^2\sigma^2/2$$
$$A_n-A_{n-1}=(1-\phi)\mu B_{n-1} \tag{11.1.23}$$

将(11.1.23)式与(11.1.11)式作比较，我们发现 σ^2 从原来描述 A_n 转为描述 B_n。这是因为，方差现在等比于状态变量，因此它影响债券价格的斜率系数，而不影响债券价格的截距系数。B_n 的极限值，我们写作 B，是二次等式的解，但从前一模型可以得知，该解的实际值接近于极限值 $1/(1-\phi)$。因此，$B_n>0$，并随 n 递增。

超正常债券收益的对数期望值，在平方根模型中为：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t[r_{n,t+1}]-y_{1t}&=-\mathrm{Cov}_t[r_{n,t+1},m_{t+1}]-\mathrm{Var}_t[r_{n,t+1}]/2\\&=B_{n-1}\mathrm{Cov}_t[x_{t+1},m_{t+1}]-B_{n-1}^2\mathrm{Var}_t[x_{t+1}]/2\\&=(-B_{n-1}\beta\sigma^2-B_{n-1}^2\sigma^2/2)x_t\end{aligned} \tag{11.1.24}$$

这里，前两个等式与前一模型相同。第三个等式是前一模型(11.1.12)式乘以状态变量 x_t。因此，超正常对数期望值同比于状态变量 x_t，或者换句话说，同比于短期利率 y_{1t}。这是因为，预期利率的条件方差同比于 x_t。同样，β 的符号决定了(11.1.24)式中风险溢酬的符号。由于超正常债券收益的标准差同比于 x_t 的平方根，利率风险的价格——债券超正常收益对数均值的比率，加上它相对于杰森(Jensen)不等式调整，相对于债券超正常收益对数均值的标准差的方差的一半——同样同比于 x_t 的平方根。

平方根模型的远期利率，由下式给出：

$$\begin{aligned}f_{nt}&=y_{1t}+B_n(\mathrm{E}_t[\Delta x_{t+1}]-\mathrm{Cov}_t[x_{t+1},m_{t+1}])-B_n^2\mathrm{Var}_t[x_{t+1}]/2\\&=(1-\beta^2\sigma^2/2)x_t-B_n[(1-\phi)(x_t-\mu)+x_t\beta\sigma^2]\\&\quad-B_n^2x_t\sigma^2/2\end{aligned} \tag{11.1.25}$$

(11.1.25)式中的第一个等式与同方差模型相同，而第二个等式将方差部分乘以 x_t。可以证明平方根模型允许了收益曲线的相同形状——向上倾斜、可逆转和山峰状——如同方差模型一样。

佩尔森和桑(Pearson and Sun，1994)证明了平方根模型可以一般化为状态变量的方差与状态变量水平之间的关系是线性的，而不一定要同比。简单替代 $x_t^{1/2}$，乘以(11.1.19)式

---

① 依赖于系数值，在连续时间模型中利率有可能为零。伦斯达夫(Longstaff，1992)讨论了模型中这一可能性的替代方法过程。易变性随时间变化导致了溢价因时间而变化。因此在这一模型中对数预期假设不再成立。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

和(11.1.20)式中的振动，替代为$(\alpha_0+\alpha_1 x_t)^{1/2}$形式。其结果是模型依然可解，因为它依然是关联收益模型，并且兼具同方差模型(在$\alpha_0=1,\alpha_1=0$状态下)和基本平方根模型(在$\alpha_0=0,\alpha_1=1$状态下)的性质。

11.1.3 二元模型

到目前我们仅仅考虑了一元模型。这种模型意味着所有债券收益都是完全相关的。当债券收益趋向于高度相关的时候，他们的相关关系不是惟一的，所以非常自然地有必要问一下，这一含义如何避免。

现在我们演示一个简单模型，该模型有两个变量，而不是一个，因此债券价格不再完全相关。[①] 该模型是伦斯达夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz，1992)模型的离散时间变换式。它将下式代入(11.1.19)式：

$$-m_{t+1}=x_{1t}+x_{2t}+x_{1t}^{1/2}\varepsilon_{t+1} \qquad (11.1.26)$$

同时，用下面两个状态变量等式代入(11.1.20)式：

$$x_{1,t+1}=(1-\phi_1)\mu_1+\phi_1 x_{1t}+x_{1t}^{1/2}\xi_{1,t+1} \qquad (11.1.27)$$

$$x_{2,t+1}=(1-\phi_2)\mu_2+\phi_2 x_{2t}+x_{2t}^{1/2}\xi_{2,t-1} \qquad (11.1.28)$$

最后，两个振动之间的关系式为：

$$\varepsilon_{t+1}=\beta\xi_{1,t+1} \qquad (11.1.29)$$

此外，振动$\xi_{1,t+1}$和$\xi_{2,t+1}$相互独立，互不相关。我们将$\xi_{1,t+1}$的方差记作σ_1^2，将$\xi_{2,t+1}$的方差记作σ_2^2。

在这一模型中，负的随机折现因子的对数值由两个状态变量x_{1t}和x_{2t}预测。随机折现因子对数值的新生过程方差如同在平方根模型中一样，同比于x_{1t}的水平；两个状态变量各自遵循平方根中自回归过程。最后，随机折现因子的对数值，条件相关于x_1，但不是x_2。最后的假设是为了保证关联收益集合模型的可解性。注意，两因素模型如果设$x_{2t}=0$，则成为一元平方根模型，但不可转化为一元同方差模型。

用通常办法处理，我们发现一期债券价格为：

$$\begin{aligned} p_{1t} &= \mathrm{E}_t[m_{t+1}]+(1/2)\mathrm{Var}_t[m_{t+1}] \\ &= -x_{1t}-x_{2t}+x_{1t}\beta^2\sigma_1^2/2 \end{aligned} \qquad (11.1.30)$$

一期债券收益$y_{1t}=-p_{1t}$，不再同比于状态变量x_{1t}，因为它还依赖于x_{2t}，在这个模型中，短期利率不再充分衡量经济状况。伦斯达夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz，1992)指出，短期利率的条件方差是两个状态变量的差分线性方程。

$$\mathrm{Var}_t[y_{1,t+1}]=(1-\beta^2\sigma_1^2/2)^2\sigma_1^2 x_{1t}+\sigma_2^2 x_{2t} \qquad (11.1.31)$$

① 虽然在这个模型中，债券收益不再完全相关，其方差矩阵有二秩，因此不管何时我们观察到两种以上债券，它总是奇异的。关于这点我们将在第11.1.4节中进一步讨论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

因此短期利率和它的条件波动综合了经济状态，人们也总是能够用这两个变量描述模型。

我们猜测 n 期债券的价格方程是两个状态变量的线性方程：$-p_{nt}=A_n+b_{1n}x_{1t}+B_{2n}x_{2t}$。我们已经知道 $A_0=B_{10}=B_{20}=0,A_1=0,B_{11}=1-\sigma_\epsilon^2/2$，以及 $B_{21}=1$。可以直接证明：A_n，B_{1n} 和 B_{2n} 遵从：

$$B_{1n}=1+\phi_1 B_{1,n-1}-(\beta+B_{1,n-1})^2\sigma_1^2/2$$
$$B_{2n}=1+\phi_2 B_{2,n-1}-B_{2,n-1}^2\sigma_2^2/2$$
$$A_n-A_{n-1}=(1-\phi_1)\mu_1 B_{1,n-1}+(1-\phi_2)\mu_2 B_{2,n-1} \quad (11.1.32)$$

B_{1n} 的差分方程和(11.1.23)式中一元平方根模型相同，但是 B_{2n} 的差分方程仅仅包括 x_2 自己的方差，其原因是 x_2 与 m 不相关，不影响 m 的方差。A_n 的差分方程则恰好是两者的和，两部分都是一元平方根模型中的熟悉形式。

在二元模型中超正常债券收益对数均值由下式给出：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t[r_{n,t+1}]-y_{1t}&=-\mathrm{Cov}_t[r_{n,t+1},m_{t+1}]-\mathrm{Var}_t[r_{n,t+1}]/2\\&=B_{1,n-1}\mathrm{Cov}_t[x_{1,t+1},m_{t+1}]-B_{1,n-1}^2\mathrm{Var}_t[x_{1,t+1}]/2\\&\quad-B_{2,n-1}^2\mathrm{Var}_t[x_{2,t+1}]/2\\&=[-B_{1,n-1}\beta\sigma_1^2-B_{1,n-1}^2\sigma_1^2/2]x_{1t}\\&\quad-[B_{2,n-1}^2\sigma_2^2/2]x_{2t}\end{aligned} \quad (11.1.33)$$

这和平方根模型相同，只是源于杰森不等式，有一个附加的 $x_{2,t+1}$ 的方差形式。

二元模型的远期利率由下式给出：

$$\begin{aligned}f_{nt}&=y_{1t}+B_{1n}(\mathrm{E}_t[\Delta x_{1,t+1}]-\mathrm{Cov}_t[x_{1,t+1},m_{t+1}])+B_{2n}\mathrm{E}_t[\Delta x_{2,t+1}]\\&\quad-B_{1n}^2\mathrm{Var}_t[x_{1,t-1}]/2-B_{2n}^2\mathrm{Var}_t[x_{2,t+1}]/2\\&=(1-\beta^2\sigma_1^2/2)x_{1t}+x_{2t}-B_{1n}(1-\phi_1)(x_{1t}-\mu_1)\\&\quad-B_{2n}(1-\phi_2)(x_{2t}-\mu_2)-B_{1n}x_{1t}\beta\sigma_1^2\\&\quad-B_{1n}^2x_{1t}\sigma_1^2/2-B_{2n}^2x_{2t}\sigma_2^2/2\end{aligned} \quad (11.1.34)$$

显然，这是平方根模型的一般式。重要的是，对于收益曲线，它能产生更复杂的形状，包括倒山峰形状，原因在于，不管是 x_{1t} 还是 x_{2t} 的独立运动都会影响期限结构。

对这一模型的分析演示了一个重要性质。正如考克斯、因格索尔和罗斯(Cox，Ingersoll and Ross，1985a)以及戴伯维格(Dybvig，1989)已经强调过的，在某些特定情况下，人们可以简单地把一元模型加总，就得到多元期限结构模型。不管什么时候，随机折现因子 m_{t+1} 总可以被写作两个独立过程的和，然后其期限结构结果同样为在每一个过程下存在的期限结构的和。在伦斯达夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz，1992)模型中，随机贴现因子是$(-x_{1t}-x_{1t}^{1/2}\beta\varepsilon_{1,t+1})$和$(-x_{2t})$的和，这两个因子相互独立。反观(11.1.34)式，可以发现，作为结果的期限结构，恰恰是一个由 x_{1t} 驱动的一般平方根期限结构和一个由 x_{2t} 过程驱动的 $\beta=0$ 时的特殊平方根期限结构的和。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

11.1.4 超关联收益模型

我们已经认识了一系列的模型:每一个模型都具备这样的性质,即债券收益的对数值是对应状态变量的线性函数或相关联。布朗和谢弗(Brown and Schaefer,1991)以及达菲和凯恩(Duffie and Kan,1993)区分了为了得到关联收益模型的必要基本假设。在这里运用的离散时间模型中,这些条件仅仅只需定义一个向量 x_t,它包含随机折现因子的对数值 m_t 和与预测未来 m_{t+i} 值,$i=1,\cdots,n$ 有关的时间 t 的价值就可以论述。如果有条件预测 x 为提前一期,$\mathrm{E}_t[\mathbf{x}_{t+1}]$与状态变量相关联,如果提前一期的向量 $\mathbf{x}$ 的条件分布是正态分布,其方差—协方差矩阵 $\mathrm{Var}_t[\mathbf{x}_{t+1}]$与状态变量相关,那么作为其结果的期限结构模型是一个关联收益模型。

理解这点,可以回想一下我们推导每一个连续期限结构模型含义的步骤。我们首先计算了短期利率的对数;如果 m_{t-1} 是条件正态分布的,$\mathrm{E}_t[m_{t+1}]$和 $\mathrm{Var}_t[m_{t+1}]$与状态变量相关联,则短期利率对数值与其对应的基础状态变量相关联。下一步我们猜测债券收益的对数值是关联的,并进一步证明了这一猜测。如果收益是关联的,那么如果 $\mathbf{x}$ 条件正态分布,有方差—协方差矩阵,那么任一债券的风险溢酬是关联的。最后我们推导了远期利率对数值;如果短期利率、风险溢酬和状态变量的期望变化均是关联的,那么远期利率对数值也是关联的。关联远期利率意味着关联的收益,证明了这一模型同属关联收益模型。

布朗和谢弗(Brown and Schaefer,1991)以及达菲和凯恩(Duffie and Kan,1993)阐述了将关联模型设置于连续时间状态对短期利率的条件。他们证明了短期利率的风险调整漂移——短期利率的期望值变化减去随机贴现因子和短期利率的协方差——以及短期利率自己的方差都必须是关联的,才能得到关联收益模型。瓦西塞克(Vasicek,1977),考克斯、因格索尔和罗斯(Cox, Ingersoll and Ross,1985a),以及佩尔森和桑(Pearson and Sun,1994)模型都满足了这些条件,但是一些例如布里恩南和施瓦茨(Brennan and Schwartz,1979)等其他连续时间模型都未能满足这些条件。

关联收益模型具有一些有助于解释其吸引力的特征。首先,债券收益对数值天然地具备了相对于对应状态变量的条件正态分布假设。第二,由于债券收益对数值是状态变量的线性方程,我们可以使模型再次正态化,以使收益本身即为状态变量。很明显,在一元模型中短期利率即为状态变量,但是对于多元模型它同样地成立。伦斯达夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz,1992)演示了他们的二元模型,一个变量为短期利率的变动,另一个变量为短期利率水平;该模型可以同样被写成固定期限的任何两种债券收益。第三,有 K 个状态变量的收益关联模型,意味着利率的期限结构可以由每个时间点的 K 种债券收益,以及与 K 种基本收益具有不变相关系数关系的其他债券收益概括。在这个意义上,收益关联模型是线性的;它们的非线性,被决定 K 种基本收益的阶段性演变过程以及与截面相关系数和模型的基本参数之间的关系所限制。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

收益相关模型同样存在一些不足之处。债券收益之间的线性关系，意味着债券收益的协方差矩阵的秩为 K——同样地，对其他 K 种债券收益进行回归，我们同样可以获得完全吻合的结果。其含义在于，大于 K 种债券的数据总会被拒绝，除非我们在模型中加入额外的试错条件。收益关联模型还存在着缺陷，就是利率的波动还可以随利率水平的变化而变化这一因素被限制了。举个例子说，利率波动程度与利率的平方成比例的模型，将被认为是不关联的。最后，正如康斯坦丁尼德斯(Constantinides，1992)强调过的，一元收益关联模型意味着长期债券的风险溢酬将始终具有相同的符号(单一为正或单一为负)。

如果我们跳出收益关联模型，我们将不再运用(11.1.1)式，而将转而使用基本对应非线性差方式，即(11.0.1)式，或它的 n 期代表式(11.0.2)。一般而言，这些等式只能由计算数学方法解出。一个常用的方法是建立一个短期利率的二元树结构。如布莱克、德曼和托伊(Black，Derman and Toy，1990)，以及布莱克和凯洛辛斯基(Black and Karasinski，1991)，就假设简单的一期收益 Y_{1t} 是条件正态分布的(对应地，在收益关联模型的假设中，$(1+Y_{1t})$ 是条件正态分布的)，他们运用二元树结构解出了他们的利率期限结构模型。康斯坦丁尼德斯(Constantinides，1992)则向人们推介了封闭结构模型。在他的模型中，随机贴现因子对数的模型是一个不对称的随机 x^2 分布变量，而不是一个正态分布的随机游走变量，康斯坦丁尼德斯进而运用分析法计算了(11.0.2)式中的均值。

11.2 期限结构模型与数据集的拟合

11.2.1 真实利率债券、名义利率债券和通货膨胀

到目前为止，我们讨论的期限结构模型，还仅仅适用于债券收益是无风险的实际利率债券收益。然而，几乎所有现实中存在的债券，其收益仅仅是相对于名义利率无风险的。[①] 现在我们讨论如何将模型进行修改，以适应于这一现实。

研究名义利率债券，我们有必要引入一些新的符号。我们首先将 t 时的名义价格指数记作 Q_t，将从 t 时到 $t+1$ 时的总通货膨胀率记作 $\Pi_{t+1}=Q_{t+1}/Q_t$。同以前一样，我们将

① 一些政府，尤其是加拿大、以色列和英国，已经发行了名义收益与名义价格指数相关的债券。1996 年美国财政部考虑发行类似的证券。这些指数关联型债券类似于实际收益债券，但又不完全相同于实际利率债券。布朗和谢弗(Brown and Schaefer，1994)讨论了英国指数系统的不完美性，并将考克斯、因格索尔和罗斯(Cox，Ingersoll and Ross，1985a)的模型运用于英国的指数相关债券。同样还可以参见巴尔和坎贝尔(Barr and Campbell，1995)，以及坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1996)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

n 期实际利率债券的名义价格记作 P_{nt}，它在 $t+n$ 时会支付一个单位价格。现在我们将 n 期名义利率债券的名义价格记作 $P_{nt}^{\$}$，它在 $t+n$ 时将支付 1 美元。从这些定义中，可以看出 n 期实际利率债券的名义价格是 $P_{nt}Q_t$，而 n 期名义利率债券的实际价格则为 $P_{nt}^{\$}/Q_t$。对最后两个概念，我们不再引入特别的符号。

如果我们将一般定价条件：

$$1=\mathrm{E}_t[(1+R_{i,t+1})M_{t+1}]$$

运用于 n 期名义利率债券的实际收益，我们可以得到：

$$\frac{P_{nt}^{\$}}{Q_t}=\mathrm{E}_t\left[\frac{P_{n-1,t+1}^{\$}}{Q_{t+1}}M_{t-1}\right] \tag{11.2.1}$$

两边同乘 Q_t，得到：

$$\begin{aligned} P_{nt}^{\$} &= \mathrm{E}_t\left[P_{n-1,t+1}^{\$}M_{t+1}\frac{Q_t}{Q_{t+1}}\right] \\ &= \mathrm{E}_t\left[P_{n-1,t+1}^{\$}\frac{M_{t+1}}{\Pi_{t+1}}\right] \\ &= \mathrm{E}_t[P_{n-1,n+1}^{\$}M_{t+1}^{\$}] \end{aligned} \tag{11.2.2}$$

这里，$M_{t+1}^{\$}=M_{t+1}/\Pi_{t+1}$ 可以被理解成对名义收益进行定价的名义利率随机贴现因子。

关于名义利率债券，经典文献中总使用两种方法之一运用这一结果。第一种方法是采用我们在第 11.1 节中关于 M_{t+1} 的初始假设，但将其用于 $M_{t+1}^{\$}$。上一节中的实际利率期限结构模型随之可以被理解为名义利率期限结构模型。举个例子。布朗和戴伯维格(Brown and Dybvig，1986)等将考克斯、因格索尔和罗斯(Cox，Ingersoll and Ross，1985a)的平方根模型直接应用于美国名义利率债券价格数据集时，采纳了这一方法。平方根模型限定了利率必须为正，因此相对于实际利率，更适合于名义利率。

第二种方法，是假设了两个名义利率随机折现因子：M_{t+1} 和 $1/\Pi_{t+1}$，它们相互独立。这个假设用于经典模型，对名义利率折现因子取对数，可得：

$$m_{t+1}^{\$}=m_{t+1}-\pi_{t+1} \tag{11.2.3}$$

当 m_{t+1} 和 π_{t+1} 相互独立时，我们可以运用考克斯、因格索尔和罗斯(Cox，Ingersoll and Ross，1985a)模型，以及戴伯维格(Dybvig，1989)的方法定价名义利率债券。回忆一下第 11.1.3 节的结果，在有两个相互独立的随机贴现因子的债券价格对数模型中，债券价格对数值是每个折现因子对应的债券价格对数值之和。因此，我们可以举个例子，将伦斯达夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz，1992)模型应用于名义利率债券，但需要将 m_{t+1} 定义为一元平方根模型，即 $-m_{t+1}=x_{1t}+x_{1t}^{1/2}\beta\varepsilon_{1,t+1}$，且 π_{t+1} 在 t 时已知，并等于状态变量 x_{2t}，如此，我们得到：$-m_{t+1}^{\$}=m_{t+1}+\pi_{t+1}=x_{1t}+x_{1t}^{1/2}\beta\varepsilon_{1,t+1}+x_{2t}$，伦斯达夫—施瓦茨模型就可用于名义利率债券的定价了。

更为一般地，m_{t+1} 和 $1/\pi_{t+1}$ 之间相互独立的假设隐含着名义利率债券的价格，恰好是实际

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

利率债券价格乘以未来货币实际价值的期望值。名义利率债券的实际收益期望值和实际利率债券的实际收益期望值相等。关于这点，可以思考一下设到期日 $n=1$ 时的等式(11.2.2)，同时注意 m_{t+1} 和 $1/\pi_{t+1}$ 的相互独立性允许我们将其乘积的期望值替代为期望值的乘积：

$$P_{1t}^{\$}=\mathrm{E}_t[M_{t+1}^{\$}]=\mathrm{E}_t[M_{t+1}]\mathrm{E}_t\left[\frac{1}{\Pi_{t+1}}\right]=P_{1t}Q_t\mathrm{E}_t\left[\frac{1}{Q_{t+1}}\right] \tag{11.2.4}$$

因此，$P_{1t}=\mathrm{E}_t[M_{t+1}]$，$1/\Pi_{t+1}=Q_t/Q_{t+1}$。最后，明天支付 1 美元的债券的名义利率价格，等于明天支付一单位商品的债券的名义价格，乘以明天值 1 美元的实际价值的期望值。

现在我们设想，对于所有到期日为 n 的债券都存在类似的关系，试作下面证明。如果该关系对于$(n-1)$期债券成立，即 $P_{n-1,t}^{\$}=P_{n-1,t}Q_t\mathrm{E}_t[1/Q_{t+n-1}]$，那么：

$$\begin{aligned}P_{nt}^{\$}&=\mathrm{E}_t\left[P_{n-1,t+1}^{\$}M_{t+1}\frac{Q_t}{Q_{t+1}}\right]\\&=\mathrm{E}_t\left[P_{n-1,t+1}Q_{t-1}\mathrm{E}_{t+1}\left[\frac{1}{Q_{t+n}}\right]M_{t+1}\frac{Q_t}{Q_{t+1}}\right]\\&=Q_t\mathrm{E}_t\left[P_{n-1,t+1}M_{t+1}\mathrm{E}_{t+1}\left[\frac{1}{Q_{t+n}}\right]\right]\\P_{nt}&=Q_t\mathrm{E}_t\left[\frac{1}{Q_{t+n}}\right]\end{aligned} \tag{11.2.5}$$

这里，最后一个等式既运用了来自价格水平的实际变量的独立性(这使得我们可以用期望值的积代替积的期望值)，也运用了 $P_{nt}=\mathrm{E}_t[P_{n-1,t+1}M_{t+1}]$这一事实。等式(11.2.5)是一个预想中的结果，即在 $t+n$ 支付 1 美元的债券的名义价格，是在 $t+n$ 时支付一个单位物品的名义价格，乘以$(t+n)$时 1 美元的实际价值的期望值。将(11.2.5)式两边除以 Q_t，我们可以看到，在名义利率债券的实际价格和实际利率债券的实际价格之间，存在着相同的关系，进一步，(11.2.5)式还含有这样的意义，即名义利率债券的实际收益期望值，等于实际利率债券的实际收益期望值：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t\left[\frac{P_{n-1,t+1}^{\$}}{P_{nt}^{\$}}\frac{Q_t}{Q_{t+1}}\right]&=\mathrm{E}_t\left[\frac{\mathrm{E}_{t+1}[1/Q_{t+n}]P_{n-1,t+1}Q_{t+1}}{\mathrm{E}_t[1/Q_{t+1}]P_{nt}Q_t}\frac{Q_t}{Q_{t+1}}\right]\\&=\mathrm{E}_t\left[\frac{P_{n-1,t+1}}{P_{nt}}\right]\end{aligned} \tag{11.2.6}$$

吉邦斯和拉马斯沃米(Gibbons and Ramaswamy，1993)运用这些结果检验实际利率期限结构模型对于预测名义利率债券的实际收益的意义。

尽管假设通货膨胀独立于实际利率随机贴现因子非常方便，但这一假设可能是不现实的。巴尔和坎贝尔(Barr and Campbell，1995)，坎贝尔和安默(Campbell and Ammer，1993)，以及佩内切(Pennacchi，1991)，都分别运用了英国指数债券和名义利率债券的数据，证明预期通货膨胀的新生过程与未来实际利率期望的短期新生过程负相关。更为直接的是，坎贝尔和希勒(Campbell and Shiller，1996)的研究发现，通货膨胀的新生过程和股票收益及实际消费水平负相关，因此和在第 5 章中传统的 CAPM 理论和第 8 章中的 CAPM 消费理论为代表的建议的随机折现因子相一致。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

11.2.2 关联收益模型的经验证明

到目前为止，所有我们讨论过的模型，一旦运用于数据拟合，都需要附加试错条件。其原因是，首先考虑到，一个实际利率随机折现因子是由一元状态变量驱动的模型。在这一模型中，所有实际利率债券的收益完全相关，因为该模型只有一个冲击。类似地，所有名义利率债券的收益，在单一的状态变量驱动名义利率随机折现因子的模型中，也完全相关。在现实中，各种不同债券之间并不一定存在确定的线性关系，因此这些含义往往会被实际数据拒绝。增添附加的状态变量，将使债券收益的方差—协方差矩阵的秩由 1 增加到 K，这里 K 是状态变量的数量。但是，无论何时有多少 K 种债券，矩阵总是线性的——同样地，债券收益之间存在确定的线性关系。因此，这些模型同样会被实际数据所拒绝。

要解决这一问题，经典的研究者们允许附加错误条件，这些条件能够影响债券价格。这些错误可以被认为是债券价格的对策处理性错误，计算中的错误隐含着从一个可观察的含息债券的期限结构而来的零息债券价格，或者模拟由税收效应或交易成本而来的特定错误。换句话说，如果采用一个实际利率随机折现因子模型，与吉邦斯和拉马斯沃米(Gibbons and Ramaswamy，1993)模型一样，用其检验名义利率债券，那么可能由非预期的通货膨胀引起错误。

不管附加的错误源自何处，关于他们行为的辅助假设必须保持模型的可检验性。一个通常的假设是，债券价格错误是时间序列不相关的，虽然不同债券的价格之间可能是相关的。这一假设使得检验期限结构模型的时间序列含义比较简单。其他作者则假设，债券价格错误在不同债券之间是不相关的，虽然它们随时间的不同，可能相关。

作为隐藏变量模型的收益关联模型

斯坦博(Stambangh，1988)和海斯顿(Heston，1992)模型证明，在关于附加债券价格错误的相对弱假设下，关联收益模型隐含着债券收益的隐藏变量结构。预测债券的变量只有在模型中作为对应基础状态变量的代理变量时，才能预测。如果状态变量少于预测变量，将限制预测债券收益等式的可检验性。

一般而言，有 K 个状态变量的关联收益模型，通常有这样的形式：

$$-p_{nt}=A_n+B_{1n}x_{1t}+\cdots+B_{Kn}x_{Kt} \tag{11.2.7}$$

这里，x_{kt}，$k=1,\cdots,K$ 是状态变量，A_n，B_{kn}，$k=1,\cdots,K$ 是常数。这些模型意味着长期债券超过短期利率收益的期望值可以被写作：

$$\mathrm{E}_t[r_{n,t+1}-y_{1t}]=A_n^*+B_{1n}^*x_{1t}+\cdots+B_{Kn}^*x_{Kt} \tag{11.2.8}$$

这里，A_n^* 和 B_{kn}^*，$k=1,\cdots,K$ 是常数。这个模型给这些常数设置了跨部门限制，即它们与驱动状态变量的时间序列过程相关，但在这里我们忽略该因素。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

现在假设我们并不观察长期债券的实际收益，相反我们观察一个噪声变量：

$$e_{n,t+1}=r_{n,t+1}-y_{1t}+\eta_{n,t+1} \tag{11.2.9}$$

这里，$\eta_{n,t+1}$ 是一个错误变量。我们假设 $\eta_{n,t+1}$ 垂直于向量 $\mathbf{h}_t$，该向量有 J 行 h_{jt}，$j=1,\cdots,J$：

$$\mathrm{E}[\eta_{n,t+1}\mid\mathbf{h}_t]=0 \tag{11.2.10}$$

向量 $\mathbf{h}_t$ 可能包含滞后变量，如，收益错误 $\eta_{n,t+1}$ 序列不相关。我们进一步假设，每一个状态变量 x_{kt}，$k=1,\cdots,K$，状态变量关于向量工具变量的条件期望值与这些向量工具变量是线性相关的：

$$\mathrm{E}[x_{kt}\mid\mathbf{h}_t]=\sum_{j=1}^{J}\theta_{kj}h_{jt} \tag{11.2.11}$$

这里，θ_{kj} 是一些常系数。

这些假设，意味着 $e_{n,t+1}$ 关于向量工具变量的条件期望值，从(11.2.10)式可以看出，它等于实际超额收益($r_{n,t+1}-y_{1t}$)关于向量元素的条件期望值，并且线性于这些元素：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[e_{n,t+1}\mid\mathbf{h}_t]&=\mathrm{E}[r_{n,t+1}-y_{1t}\mid\mathbf{h}_t]\\&=A_n^*+\sum_{k=1}^{K}B_{kn}^*\mathrm{E}[x_{kt}\mid\mathbf{h}_t]=A_n^*+\sum_{k=1}^{K}B_{kn}^*\sum_{j=1}^{J}\theta_{kj}h_{jt}\end{aligned} \tag{11.2.12}$$

如果我们将 $\mathbf{e}_{t+1}$ 定义为向量$[e_{1,t+1},\cdots,e_{N,t+1}]$，$n=1,\cdots,N$，那么(11.2.12)式可以写成向量形式：

$$\mathbf{e}_{t+1}=\mathbf{A}^*+\mathbf{C}\mathbf{h}_t+\boldsymbol{\eta}_{t+1} \tag{11.2.13}$$

这里 $\mathbf{A}^*$ 是 n 个元素 A_n^* 的向量，$\mathbf{C}$ 是一个有(n,j)元素的系数矩阵：

$$C_{nl}=\sum_{k=1}^{K}B_{kn}^*\theta_{kj} \tag{11.2.14}$$

等式(11.2.13)和等式(11.2.14)定义了一个有 K 个隐藏变量的超常债券收益期望值的隐藏变量模型。等式(11.2.14)表达的是 N 种资产关于 J 个元素的系数矩阵($N\times J$)最多有 K 阶段，K 为基础对应期限结构模型中状态变量的数量。预测超常债券收益的工具变量，仅仅通过状态变量代表其作用(由 θ_{kj} 这个系数衡量)，状态变量的作用在于确定超常债券收益(由系数 B_{kn}^* 衡量)。这一体系在一元状态中尤其容易理解。这里 $K=1$，我们可以省略 K 的下坠，(11.2.14) 式随之变为：

$$C_{nj}=B_n^*\theta_j \tag{11.2.15}$$

等式(11.2.15)表明的是，矩阵 $\mathbf{C}$ 的每一行与其他行同比，其比例系数是 B_n^*。注意，矩阵 $\mathbf{C}$ 的秩可能少于 K；举个例子，在有 K 个状态变量的同方差模型中，秩为 0，因为在这一模型中，对于所有 k 和 n，系数 $B_{kn}^*=0$。

隐藏变量(11.2.14)式或(11.2.15)式形式，已经被坎贝尔(Campbell，1987)，吉邦斯和费森(Gibbons and Ferson，1985)以及汉森和霍德里克(Hansen and Hodrick，1983)运用于金融数据集。他们可以被矩的一般检验法所检验，该检验法被用于一系列的回归等

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

式(11.2.13)。海斯顿(Heston,1992)模型还指出，人们还能够等同地估计工具变量对应于 K 个超常收益的回归系统，这里，$\mathbf{h}_t$ 中的元素为工具变量。

一个关键的问题，如何选择工具变量 $\mathbf{h}_t$，使其满足(11.2.10)式(工具变量垂直于债券价格误差)和(11.2.11)式(状态变量线性工具变量)。在没有债券价格误差的关联收益模型中，债券收益和远期利率与状态变量呈线性关系；因此，状态变量线性于收益和远期利率。这一性质使得债券价格误差呈正态分布的附加假设得以成立。因此，非常自然地，选择收益或远期利率作为工具变量满足(11.2.11)式。

要满足(11.2.10)式，人们必须着重关于债券价格误差的性质。债券价格误差衡量了 t 时影响 t 时债券收益和从 t 时到 $t+1$ 时债券的超常收益。因此，t 时衡量出的收益和远期利率并不一定垂直从 t 到 $t+1$ 时债券超常收益的误差。如果债券价格误差并不与时间变化相关，那么，收益和远期利率在$(t+1)$时将垂直于从 t 到 $t+1$ 时的超常收益误差。如果债券价格误差在不同债券间并不相关，那么人们可以选择不同到期日的债券收益或远期利率，而不选择那些超常收益。斯坦博(Stambaugh,1988)模型引用了这两个策略于美国到期日为 2～6 个月的 1959 年 3 月到 1985 年 11 月的财政部债券月度数。他发现一些反对该模型的强有力证明，但一个状态变量相对于两个状态变量模型，反对性很弱。海斯顿(Heston,1992)模型则研究了更近时期，1970 年 2 月～1988 年 5 月的数据库，包括更长的到期日(6 个月，12 个月，36 个月和 60 个月)，发现鲜有反对一个状态变量的证据。

关于短期利率变化过程的证明

如果有人愿意假设在短期名义利率中可以忽略测量误差的话，那么短期利率行为的时间序列分析，第一步为建立名义利率期限结构也许是很有效的。查恩、凯洛利、伦斯达夫和桑德(Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders, 1992)模型估计了下面形式的短期利率离散时间模型：

$$y_{1,t+1}-y_{1t}=\alpha+\beta y_{1t}+\varepsilon_{t+1} \tag{11.2.16}$$

这里，

$$\mathrm{E}_t[\varepsilon_{t+1}]=0,\qquad \mathrm{E}_t[\varepsilon_{t+1}^2]=\sigma^2 y_{1t}^{2\gamma} \tag{11.2.17}$$

这一特性实际上回到了我们在第 11.1 节中讨论的一元模型，在同方差模型中 $\gamma=0$，在平方根模型中 $\gamma=0.5$，该模型也非常接近即时利率 $r(t)$ 按 $dr=(\beta_0+\beta_1 r)dt+\sigma r^{\gamma}$ 形式的连续时间演化过程。这一演化过程归结为短期利率的主要一元连续时间模型。例如，瓦西塞克(Vasicek,1977)模型中，$\gamma=0$；考克斯、因格索尔和罗斯(Cox, Ingersoll and Ross, 1985a)模型中 $\gamma=0.5$；布里恩南和施瓦茨(Brennan and Schwartz,1979)模型则有 $\gamma=1$。[①]

查恩等人(Chan et al.,1992)模型用广义矩方法检验了(11.2.16)式和(11.2.17)式。

① 同样要注意(11.2.16)式和(11.2.17)式没有嵌套在皮尔逊—森(Pearson-Sun)模型中。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

他们定义了一个两因子误差向量，第一个是$(y_{1,t+1}-(1+\beta)y_{1t}-\alpha)$，第二个是$(y_{1,t+1}-(1+\beta)y_{1t}-\alpha)^2-\sigma^2y_{1t}^{2\gamma})$。这些误差正交于$t$时可知的任何工具变量；工具变量则为一个常数和短期利率y_{1t}的水平。基于1964年6月～1989年2月期间一个月美国财政债券利率的月度数据，查恩等人发现，α和β很小，而且经常是统计意义上不重要。短期利率高度明确，很难拒绝它遵循随机游走模型的假设。他们同样发现γ很大，而且可以精确估计。他们可以拒绝$\gamma<1$的模型，他们对γ的非限制估计值大约为1.5，几乎是1以上的两个标准差。

要理解这些结果，需要思考这样一个案例：$\alpha=\beta=0$，这样短期利率是没有漂移的随机游走过程。错误条件ϵ_{t+1}（(11.2.16)式中）就恰好是短期利率变化$y_{1,t+1}-y_{1t}$，而(11.2.17)式表明了短期利率变化的平方值的期望值，$E_t[(y_{1,t+1}-y_{1t})^2]=\sigma^2y_{1t}^{2\gamma}$。等同地：

$$E_t\left[\left(\frac{y_{1,t+1}-y_{1t}}{y_{1t}^{\gamma}}\right)^2\right]=\sigma^2 \tag{11.2.18}$$

所以，当短期利率的变化被定为短期利率的适当指数时，它就成了同方差。图11.1a～d演示了查恩等人的结论，将短期利率的变化依利率的不同指数进行图示。该图表明，$\gamma=0$，0.5，1和1.5时，$(y_{1,t+1}-y_{1t})/(y_{1t}^{\gamma})$可以运用1952年1月～1991年2月期间麦卡拉西和昆(McCulloch and Kwon，1993)模型中的数据图演。根据查恩等人研究的1964年以来的数据，当γ从0提高到1.5时，序列方差显示非常强的稳定性。

这些结果给名义利率期限结构一元收益关联模型带来了两个问题。第一，当短期利率不存在均值回归时，远期利率和债券收益开始时随到期日提高，但是他们最后会随到期日期满而下降，并永远维持这一趋势。第二，一元收益关联债券要求$\gamma=0$或0.5(指在(11.2.17)式中)。γ的估计值如为1.5，则收益关联模型不可应用，人们只能运用计算数学方法解决期限结构模型。

如何解决这些问题，目前没有一个统一说法。艾特萨哈里尔(Aït-Sahalia，1996b)提出现行的系数模型限制性太强；他建议对短期利率漂移率和波动率的估计采用非系数方法。他同时提出一个有争议的论点，即短期利率在其历史长度的中期(大概地说，在4%～17%之间)，其过程非常接近于随机游走，但当其逐渐脱离该区域时，其均值回归趋势非常明显。查恩等人忽略了这点，是因为他们的线性模型并不允许均值回归依赖于利率水平。艾特萨哈里尔还讨论了利率的波动与利率水平的相关性，比任何一个标准模型允许更为复杂。在他的最为一般系数模型，以及他的惟一没有被统计拒绝的模型中，短期利率的演化过程为：$dr=(\beta_0+\beta_1r+\beta_2r^2+\beta_3/r)dt+(\sigma_0+\sigma_1r+\sigma_2r^{\gamma})dB$，他估计$\gamma=2$，但是波动方程的其他系数对于决定波动率也有重要作用。

根据汉密尔顿(Hamilton，1989)理论，一个可以替代的观点是，短期利率在不同时期随机游走地转换，每一个时期内都有其不同的均值和波动系数。这样的模型，在每个阶段

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

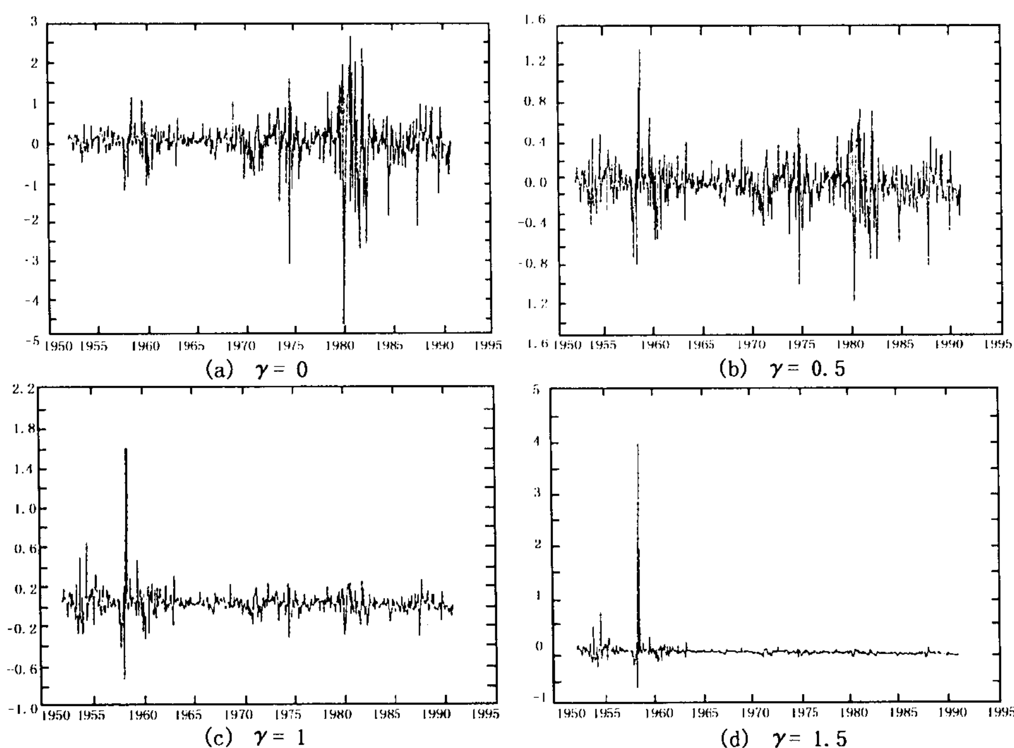


图 11.1 短期利率除以短期利率的 γ 次幂的变化图

可能会有均值回归，但是当人们取不同阶段数据的平均值时，短期利率会显得高度上扬。如果有高均值系数的阶段区间同样是有高波动系数的阶段区间，那么这一模型同样可以解释，没有一个很高的 γ 值，利率的波动和利率水平明显敏感。图 11.1a～d 表明自 1952 年以来的整个时期，没有一个 γ 值使利率呈同方差变化；若取 $\gamma=1.5$，则在 1964～1991 年间拟合得很好，但在 20 世纪 50 年代和 60 年代却破坏了异方差性。① 因此，至少一些时间阶段的变化需要与数据拟合，有可能 $\gamma=0$ 或 $\gamma=0.5$ 的模型对于单一期限变化的利率是充分允许的。戈雷(Gray, 1996)探讨了这一可能性，并估计出比查恩等人模型还略小的 γ 值，而内克和李(Naik and Lee, 1994)在运用单一期限转换模型计算债券和债券期权价格时，定 $\gamma=0$。

布伦纳、哈杰斯和克洛纳(Brenner, Harjes and Kronner, 1996)用了不同的解决方法。他们允许 GARCH 模型适用于利率波动，就如第 12 章第 12.2 节中描述的那样，同时还运用(11.2.17)式所描述的利率水平对利率波动的影响。他们用 $E_t[\varepsilon_{t+1}^2]=\sigma_t^2 y_{1t}^{2\gamma}$，且

① 虽然图中没有显示，但 $\gamma=1.5$ 模型在 20 世纪 90 年代也不成立。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$\sigma_t^2=\omega+\theta\varepsilon_t^2+\phi\sigma_{t-1}^2$代入(11.2.17)式，构成一个标准的GARCH(1,1)模型。他们发现，一旦模型中包含了GARCH效应，$\gamma=0.5$时的模型非常吻合于短期利率时间序列；然而他们没有探讨这一性质对于债券或债券期权定价的意义。

关于期限结构的跨部门限制

到目前为止我们着重研究了收益关联模型的时间序列意义，同时忽略了其跨部门意义。布朗和戴伯维格(Brown and Dybvig,1986)，以及布朗和谢弗(Brown and Schaefer,1994)模型采用了相反的方法，忽略了模型的时间序列意义，通过对某个时间点的观察，估计了利率期限结构的所有系数。如果这一过程在许多时间段进行重复，它将产生一系列的估计系数。理论上，该系列估计数和整个时间段结果应是一致的，但是实践中它随时间而变化。这一过程和运用可交易的期权价格转化布莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)公式计算隐含的波动率这一通常做法相类似。同样地，模型要求波动率必须是常数，但是隐含波动可以随时间移动。

当然，债券定价误差会导致被估计的系数即使在实际真实的对应基础系数是常数的状态下依然可能随时间变化。但是在简单的期限结构模型中，必需拟合的跨部门期限结构数据的系数值和利率的时间序列行为隐含的系数值之间，总会存在一些系统差别。这些系统差别表明了模型中的错失。要理解这个问题，我们可以选择一元同方差模型和平方模型中的系数来拟合数据的不同单一秩，以证明最终的模型和数据的一些其他特征是不匹配的。

在一元同方差模型中，模型的重要系数可以通过计算数据的下列四个特征数确定：

$$\mathrm{Corr}[y_{1t},y_{1,t-1}]=\phi$$

$$\mathrm{Var}[y_{1t}]=\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[r_{n,t+1}-y_{1t}]=\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[f_{nt}-y_{1t}]$$

$$=-\left(\frac{1}{1-\phi}\right)^2\sigma^2/2-\left(\frac{\beta}{1-\phi}\right)\sigma^2$$

$$\mathrm{E}[y_{1t}]=\mu-\beta^2\sigma^2/2 \tag{11.2.19}$$

短期利率的一次自相关决定了自回归系数ϕ。给定了ϕ，短期利率的方差就能决定新生过程方差σ^2。有了ϕ和σ^2，对于非常长时期的债券，其超市场收益，或换句话说，长期债券的远期利率和短期利率之间的平均差，就能决定系数β。最后，基于给定的ϕ、σ^2和β，短期利率的均值μ即可得。

麦卡拉西和昆(McCulloch and Kwon,1993)模型中的零息票据收益数据覆盖了1952年到1991年，短期利率月度数的一次自相关系数为0.98，这就意味着$\phi=0.98$。短期利率的标准差是3.064%（以年利计）或0.002 55(以自然单位计)，这就意味着$\sigma_u=$ 0.000 51(以自然单位计)或0.610%(以年利率计)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在数据中，出现了长期债券平均超正常收益和远期利率收益曲线平均坡度的差异。从表 10.2 可以看出，$n=120$ 时，长期债券年利率相较于一年期债券为 −0.048%，而远期利率收益曲线中年利率却为 1.507%，这一差异是在用 60～120 月远期利率和 1 个月短期利率作比较时得出的。该差异一直存在，是因为年利率在 1952～1991 年间持续上升；静态的期限结构模型迫使利率的实际均值变化为“0”，但是某一特定样本内利率的增长可以使该样本的长期债券超正常收益值为负，即使在远期利率收益曲线的样本均值为正时也会出现这种情况。拟合远期利率收益曲线平均坡度所需的 β 值为 −122。所隐含的 $(\mu-\sigma_v^2/2)$，用年利率表示为 7.632%。

同方差一元模型的困难还在于，在这些系数下，平均的远期利率期限结构收益线从其起始值到其最大似然值，变化非常平缓，就如图 11.2 中的虚线一样。从 1952 年到 1991 年期间的平均远期利率收益平均值样本，即图 11.2 中的实线，在开始时陡峭上升，在大约 5 年期时逐渐转为平缓。

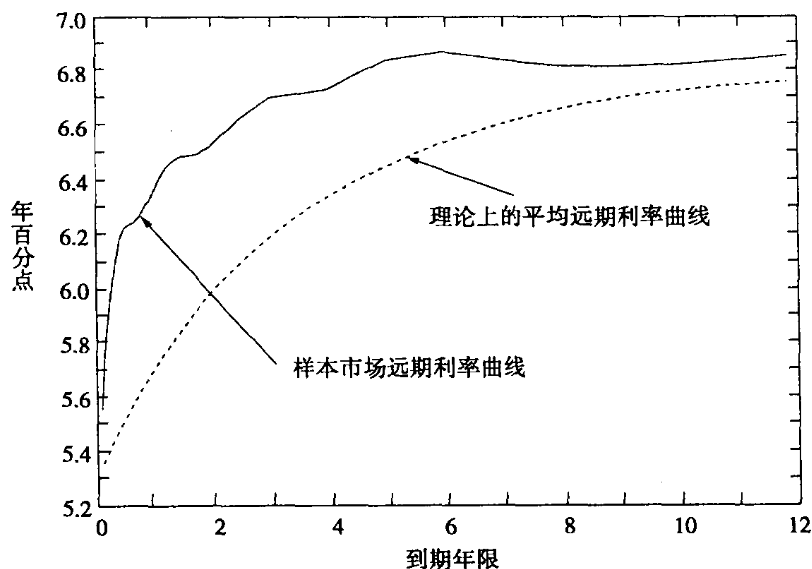


图 11.2 利率年限

这一问题的引起在于理论上远期利率收益均值以大约为 ϕ 的几何速度逐渐接近其最大值。如果选择一个较小的 ϕ 值的话，人们更容易拟合样本平均远期利率收益线。不幸的是，这不仅和观察到的短期利率不相符合，和远期利率波动的观察值也不相符合。(11.1.14)式表明了远期利率的标准差以 ϕ 速率下降。1952～1991 年间 n 期远期利率的标准差几乎不随利率到期日 n 下降，数据的这一特征只能被极端稳定的短期利率过程所拟合。巴克斯和津(Backus and Zin，1994)详细讨论了这一问题，并提出建议，认为高级数

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

模型可以允许短期利率既转换又稳定地运动，从而能够更好地拟合期限结构。

平方根模型中一定程度上系数的确定更为困难。这里(11.2.19)式中定义的秩成立：

$$\mathrm{Corr}[y_{1t}, y_{1,t-1}] = \phi$$

$$\mathrm{Var}[y_{1t}] = (1-\beta^2\sigma^2/2)^2 \frac{\sigma^2\mu}{1-\phi^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[r_{n,t+1} - y_{1t}] = \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[f_{nt} - y_{1t}] = [-\beta B\sigma^2 - B^2\sigma^2/2]\mu$$

$$\mathrm{E}[y_{1t}] = \mu(1-\beta^2\sigma^2/2) \tag{11.2.20}$$

这里 B 是(11.1.23)式中 B_n 的极限值。如前一样，从对短期利率一次自相关的估计值我们可以确定 $\phi=0.98$，但现在模型中的其他系数可以同时确定。人们当然可以用 GMM 法来估计他们。平方根模型和同方差模型一样，当短期利率高而稳定时，其远期利率平均收益曲线会非常缓慢地趋近于其极限值。因此该模型和同方差模型一样有许多经验限制。

简单地说，本章中我们描述的一元收益关联模型要拟合名义利率行为存在太多限制。数据的隐藏变量结构、短期利率过程的本质，以及平均期限结构的形态，都很难与这些模型拟合。作为对这些缺陷的反应，研究者们正在探求更为一般的模型，包括一元状态变量遵循高次数 ARMA 过程[巴克斯和津(Backus and Zin，1992)]的收益关联模型，多元状态变量的收益关联模型[伦斯达夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz，1992)]，期限转换模型[戈雷(Gray，1996)，内克和李(Naik and Lee，1994)]，和利率波动的 GARCH 模型[布伦纳、哈杰斯和克洛纳(Brenner， Harjes and Kroner，1996)]。没有一个模型至今被认为是模拟名义利率期限结构的通用选择。然而我们注意到，布朗和谢弗(Brown and Schaefer，1994)模型、吉邦斯和拉马斯沃米(Gibbons and Ramaswamy，1993) 模型在用简单模型拟合英国指数关联债券价格和运用数量方法预测美国名义利率债券的实际收益时取得了一些成就。总之，一元收益关联模型相对于名义利率债券，更适合于模拟实际利率债券。

11.3 固定收入衍生证券定价

投身于期限结构模型研究的主要理由之一，在于定价和对冲固定收入衍生证券的实际需要。本节中我们将证明期限结构模型如何运用于这一领域。第 11.3.1 节开始讨论扩展标准期限结构模型的方法，以使其现时收益曲线能够完美拟合。衍生金融工具的交易人通常将这一收益曲线作为给定的，因此他们希望运用一个完全与所有现有债券价格相一致的定价模型。我们解释一些通行的方法，如霍和李(Ho and Lee，1986)模型，布莱克、德曼和托伊(Black，Derman and Toy，1990)模型，以及希瑟、杰罗和默顿(Heath，Jarrow and Morton，1992)模型。第 11.3.2 节证明期限结构模型如何用于固定收入证券的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

远期合约和期货合约定价，而第 11.3.3 节则探讨期限结构模型的期权定价。

11.3.1 准确拟合当前期限结构

一般地，给定的数据点越多，系数越多，模型的拟合度越高。如第 11.1 节中列举的同方差一元模型有 4 个参数，ϕ,β,σ^2 和 μ。不可避免地，这一模型不可能完全地拟合整个期限结构。允许前几节中的经验模型中增加误差项，反映了债券定价中模型的特定误差和检验误差。

在定价固定收入衍生金融工具时，非常必要地需要一个完全拟合现行期限结构的模型(即该模型需要完全拟合基础金融工具价格)。要达到这个目的，我们可以采用考克斯、因格索尔和罗斯(Cox, Ingersoll and Ross, 1985a)模型，以及戴伯维格(Dybvig, 1989)模型的结果，即可以将相互独立的期限结构模型加总。一个简单的方法，源于霍和李(Ho and Lee, 1986)模型，是将可观察的远期利率 f_{nt} 分拆为两部分：

$$f_{nt}=f^a_{nt}+f^b_{nt} \tag{11.3.1}$$

这里，f^a_{nt} 是远期汇率，它隐含在一个标准化的、易处理的模型中。f^b_{nt} 是一个残值。残值部分可由确定的期限结构模型获得。由于决定性过程独立于任何随机过程，分解式(11.3.1)总是合理的。关于随机折现因子，也存在着一个类似的分解式：

$$m_{t+1}=m^a_{t+1}+m^b_{t+1} \tag{11.3.2}$$

在决定性模型中，不存在套利条件要求：

$$f^b_{nt}=y^b_{1,t+n}=m^b_{t+n} \tag{11.3.3}$$

因而，我们得出，未来随机折现因子包含两个部分，一个是反映未来短期利率的决定性因子，另一个是目前的远期汇率。

虽然这一过程在任一阶段内很有效，但谁都没法保证在不同期间内它会保持一致性。一个典型的做法是，设定 $y^b_{1t}=0$，使目前的短期利率作为一个不经决定性因子调整而代入随机期限结构模型。如此，未来短期利率的决定性部分，$y^b_{1,t+n}$ 成为非零价值，以拟合时间 t 时的期限结构。当 $t+n$ 时到达时，这一过程进行重复；现在 $y^b_{1,t+b}=0$，更远时期的未来短期利率决定性因子部分设为非零值以拟合$(t+n)$时的期限结构。正如戴伯维格(Dybvig, 1989)模型所强调的，这个时间非一致性即使每个过程都拟合完好，总是比较麻烦。

另外一点非常重要，且必须理解的是，一个模型很好地拟合了一类资产价格，并不保证该模型可以完美地拟合其他资产价格。巴克斯、佛里西和津(Backus, Foresi and Zin, 1996)模型用如下方法演示了这一特点。他们假设第 11.1.1 节中的一元同方差模型成立，并存在一个均值回归的短期利率，因此 $\phi<1$。他们证明了运用同方差随机游走模型，即霍和李(Ho and Lee, 1986)模型的对数正态形态，你可以完美地拟合目前期限结构。该模型运用了(11.1.5)式，但用下式替代了(11.1.3)式：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$x_{t+i}=x_{t+i-1}+g_{t+i}+\xi_{t+i} \tag{11.3.4}$$

这里，g_{t+i}是一个为了拟合t时刻利率的期限结构而特设的从t时刻到所有未来$(t+i)$时刻的确定的漂移因子。如前一样，ξ_{t+i}是一个在方差为常数σ^2情况下的正态分布冲击。巴克斯，佛里西和津(Backus, Foresi and Zin, 1996)模型证明了这一模型不能适合未来利率的条件均值或条件方差状况，因为它会对债券期权错误定价。后面的习题11.1要求详细说明此点。

一定意义上，拟合利率的期限结构的较复杂的过程以说明未来短期利率变化的确定性波动就如同说明未来确定性漂移一样。布莱克、德曼和托伊(Black, Derman and Toy, 1990)模型用短期利率的对数正态分布模型解决这一问题。在其模型中，你可以用一个确定的、提前一期的时间变动条件方差σ_{t+i}^2代替ξ_{t+i}的常数方差σ^2。巴克斯、佛里西和津(Backus, Foresi and Zin, 1996)模型证明了，如果实际模型是均值回归的同方差模型，有确定性波动和漂移的错漏随机游走模型可以拟合目前期限结构的任何两个变量、未来短期利率的条件均值，以及未来短期利率的条件方差。然而它还是不能同时拟合3个变量，所以它不能正确地为一个完整的债券期权集合定价。这个例子的意义在于，固定收益衍生证券的价格依赖于利率的动态行为，所以即使人们仅仅对衍生证券定价感兴趣，也必须尽可能精确地模拟利率的动态性，这一点非常重要。

一个已经非常通用的相关方法是希瑟、杰罗和莫顿(Heath, Jarrow and Morton, 1992)模型。他们从第10章中讨论的当前远期利率收益曲线出发，建议人们设定远期利率波动的期限结构，从而确定未来风险调节的远期利率的运动。为了尽可能简单地理解这一方法，假设利率风险是不可定价的，所以不存在债券市场上的风险溢值，远期利率的特征过程和风险调节过程相一致。在这种情况下，所有到期日的债券在连续时间状态下必然有相同的即期收益期望值，以及在离散时间状态下有相同的一期收益期望值。也就是说，纯粹的期限结构期望假设(PEH)的一期型式成立，因此由第10章的(10.2.6)式我们可得：

$$\mathrm{E}_t[r_{n,t+1}-y_{1t}]=-(1/2)\mathrm{Var}_t[r_{n,t+1}-y_{1t}] \tag{11.3.5}$$

任何到期日债券在利率的一个期限内超常收益对数值的期望值，是负的超常收益对数值方差的一半。

现在回忆一下提前n期的一期远期利率对数值f_{nt}和债券价格对数值的关系，即第10章中给出的(10.1.8)式：$f_{nt}=p_{nt}-p_{n+1,t}$。该式意味着，对于要作出$(t+n)$时的投资决策时，远期利率从时间t到时间$(t+1)$的变化为：

$$\begin{aligned} f_{n-1,t+1}-f_{nt} &= (p_{n-1,t+1}-p_{n,t+1})-(p_{nt}-p_{n+1,t}) \\ &= r_{n,t+1}-r_{n+1,t+1} \\ &= (r_{n,t+1}-y_{1t})-(r_{n+1,t+1}-y_{1t}) \end{aligned} \tag{11.3.6}$$

对(11.3.6)式取期望值，同时运用(11.3.5)式，我们得到：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$E_t[f_{n-1,t+1}-f_{nt}]=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{Var}_t[r_{n+1,t+1}-y_{1t}]-\mathrm{Var}_t[r_{n,t+1}-y_{1t}]\right) \quad (11.3.7)$$

未来超常债券收益的条件方差，决定了远期利率的期望值变化，这些期望值变化加上当前远期利率收益曲线，决定了远期利率收益曲线以及未来任何一天的收益期望。对于风险调整的远期利率过程，即使在利率风险价格确定的情况下，类似的性质同样成立。

希瑟、杰罗和莫顿（Heath，Jarrow and Morton，1992）模型探讨了连续时间状况下的这一意义，并且证明了如何将其运用于固定收入衍生证券工具的定义。在这一框架下，准确地模拟利率的动态性依然十分重要，但现在模型的系数被表述为波动。固定收入证券的许多市场参与者相比较于处理传统模型中那些决定短期利率动态性和利率风险价格的系数，要处理这些系数简单得多。然而，这一方法的缺点是，短期利率的隐含过程一般都特别复杂。

11.3.2 远期和期货

衍生金融工具最简单的例子是远期合约，一个 n 期远期合约，是指在 t 时谈判确认基础上对应证券 $(t+n)$ 时的价格为 S_{t+n}，指定在 $(t+n)$ 时以该特定的价格购买该证券。因此，远期价格，我们记作 G_{nt}，是在 t 时确定，但直到 $(t+n)$ 时才进行现金交割。①

考克斯、因格索尔和罗斯（Cox，Ingersoll and Ross，1981b）模型证明了远期价格 G_{nt}，是对 $(t+n)$ 时收益 S_{t+n}/P_{nt} 在 t 时的价格的承诺。同样地，$G_{nt}P_{nt}$ 是对 S_{t+n} 收益的价格承诺声明。凭直觉我们认为，出现 P_{nt} 是因为在 $(t+n)$ 之前不需要付出任何资金。因此，一份远期合约的购买人可以在 t 时到 $(t+n)$ 时之间运用这笔资金。考克斯，因格索尔和罗斯（Cox，Ingersoll and Ross）运用一个简单的套利争论建立了这一性质。他们考虑运用这一投资战略，在 t 时做 $1/P_{nt}$ 远期合约多头，同时抛出 G_{nt} 的 n 期债券。这样，你可以购买 G_{nt}/P_{nt} 债券。到 $(t+n)$ 时这一战略的收益为：

$$\frac{1}{P_{nt}}[S_{t+n}-G_{nt}]+\frac{G_{nt}}{P_{nt}}=\frac{S_{t+n}}{P_{nt}} \quad (11.3.8)$$

这里，第一部分是远期合约的损益，第二部分是债券的收益。由于这一投资战略在 t 时的成本为 G_{nt}，在 $t+n$ 时付出 S_{t+n}/P_{nt}，假设性质可以成立。运用随机折现因子符号，我们可以将此表述为：

$$G_{nt}=E_t[M_{n,t+n}S_{t+n}/P_{nt}] \quad (11.3.9)$$

这里，n 期随机折现因子 $M_{n,t+n}$ 是 n 个连续的一期随机折现因子的积，$M_{n,t+n}\equiv M_{t+1}\cdots M_{t+n}$。一份期货合约和远期合约的重要区别之一在于：期货合约在其有效期内每一阶段

① 第 10 章第 10.1.1 节中定义的 n 期远期利率，是指 $(t+n)$ 时购买的到期日为 $(t+n+1)$ 的零息债券的远期合约收益。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

都"钉住市场"，因此期货合约的购买人在每一阶段，都是价格上涨带来收入，价格下降则付出。由于这些边际支出，期货价格——不像远期合约价格——一般涉及多于从 t 时到 $(t+n)$ 时的两个阶段 。[①] 如果我们将 n 期期货合约的价格记作 H_{nt}，我们有：

$$H_{nt}=\mathrm{E}_t[M_{t+1}H_{n-1,t+1}/P_{1t}] \tag{11.3.10}$$

运用类似考克斯、因格索尔和罗斯(Cox, Ingersoll and Ross)的论点，就可以建立此式。考虑这个投资策略，在 t 时，做 $1/P_{1t}$期货合约的多头，做空 H_{nt} 价值的一期债券。这样，你可以购买 H_{nt}/P_{1t}债券。在$(t+1)$时期货合约生效。$(t+1)$时该策略的收益为：

$$\frac{1}{P_{1t}}[H_{n-1,t+1}-H_{nt}]+\frac{H_{nt}}{P_{1t}}=\frac{H_{n-1,t+1}}{P_{1t}} \tag{11.3.11}$$

这里，第一部分是在 t 时购买的期货合约的"盯市"支付，第二部分是债券收益。因为期货合约是钉住市场的，整个合约的部位(多头或空头)不需要在$(t+n)$时产生任何进一步现金流，即可在$(t+1)$时实现流动性。由于该策略在 t 时支付 H_{nt}，在$(t+1)$时支付 $H_{n-1,t+1}/P_{1t}$，我们已经证明了(11.3.10)式成立。更进一步地，我们将时间推进到$(t+n)$，运用 $H_{0,t+n}=S_{t+n}$的事实，我们可以解出(11.3.10)式，获得：

$$H_{nt}=\mathrm{E}_t\left[M_{n,t+n}S_{t+n}\Big/\prod_{i=0}^{n-1}P_{1,t+i}\right] \tag{11.3.12}$$

比较等式(11.3.9)和等式(11.3.12)，我们可以看出在某些情形下，同样基础对应资产，同样到期日的远期合约和期货合约会有相同的执行价。首先，如果债券价格不是随机游走，那么不存在套利的条件要求：$P_{nt}=\prod_{i=0}^{n-1}P_{1,t+i}$，所以 $G_{nt}=H_{nt}$。这意味着，在利率为常数的任一模型中，远期价格和期货价格相同。第二，如果离到期日还有一个时间单位，那么 $P_{nt}=P_{1t}$，因此 $G_{nt}=H_{nt}$。既然远期合约是被注明为每日的交易，这里的期限只能是一天，于是这一结果是对有限制的利率的。第三，如果基础对应资产的价格不是随机游走的，那么远期和期货的价格均等于基础对应资产价格。要理解这点，需注意如果 $S_{t+n}=V$，这是一个常数，那么(11.3.9)式变成：

$$G_{nt}=\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}V/P_{nt}]=(V/P_{nt})\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}]=V \tag{11.3.13}$$

由于 $P_{nt}=\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}]$，在同样条件下，$H_{1t}=V$。由于(11.3.10)式变成了：

$$H_{nt}=\mathrm{E}_t[M_{t+1}V/P_{1t}]=(V/P_{1t})\mathrm{E}_t[M_{t+1}]=V \tag{11.3.14}$$

我们可以证明，如果 $H_{n-1,t+1}=V$，那么 $H_{nt}=V$。因此，对于所有的 n，$H_{nt}=V$，所以远期合约和期货合约价格相等。

更为一般地是，远期价格和期货价格可以相异。在这样的情形下，基础对应资产是 t 时的$(n+\tau)$期零息债券，在$(t+n)$时该零息债券将是一个 τ 期债券。我们将远期价格记

① 在芝加哥交易所交易的财政债券和财政票据期货有许多影响其价格的特殊的期权性质。空头交易者可以选择清算月的任何一天执行，并可选择执行许多种替代性债券。空头交易者还可以在价格确定后的 6 小时内的任何时间宣布执行该特定天的清算价格的"百搭期权"(Wild Card Option)。这里的讨论排除了这些期权性质。参见赫尔(Hull，1993 第 4 章)的有关介绍。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

作 $G_{\tau nt}$，期货价格记作 $H_{\tau nt}$。远期价格在这时比较容易计算：

$$G_{\tau nt}=(1/P_{nt})\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}P_{\tau,t+n}]=P_{\tau+n,t}/P_{nt} \tag{11.3.15}$$

当 $\tau=1$ 时，远期合约的收益等于第 10 章第 10.1.1 节中定义的远期汇率：$F_{nt}=1/G_{1nt}$。

期货的价格，必须用(11.3.10)式进行递归计算。在特定的期限结构模型中，人们可以直接计算，并可解出远期价格和期货价格之间的关系。习题 11.2 是在第 11.1.1 节中推导的同方差一元模型中进行计算。该问题的要求是证明在这一模型下，远期价格和期货价格的比率是一个常数，而且这一常数大于 1，所以远期的价格总是高于期货的价格。

11.3.3 期限结构模型的期权定价

假设有人对于基础对应证券价格为 S_t 的欧式多头期权进行定价。[①] 如果该期权离有效期到期日还有 n 期，执行价为 X，那么它最终的效益(盈利)为 $\mathrm{Max}(S_{t+n}-X,0)$。同其他任何 n 期资产一样，它可以用 n 期随机折现因子定价：$M_{n,t+n}\equiv M_{t+1},\cdots,M_{t+n}$。将期权价格记作 $C_{nt}(X)$，我们有：

$$\begin{aligned}C_{nt}(X)&=\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}\mathrm{Max}(S_{t+n}-X,0)]\\&=\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}S_{t+n}\mid S_{t+n}\geqslant X]\\&\quad-X\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}\mid S_{t+n}\geqslant X]\end{aligned} \tag{11.3.16}$$

一般而言，等式(11.3.16) 必须运用计算数学方法进行推导、演算，但是在一个特定条件下，该计算可以极大简化。假设，$M_{n,t+n}$ 和 S_{t+n} 条件联合对数正态分于 t 时信息，其条件期望值是他们的对数值 μ_m 和 μ_s，对数值的条件方差分别是 σ_{mm}，σ_{ss} 和 σ_{ms}，所以这些秩值依赖于 t 和 n，为简单起见，我们简化符号。如此，我们有：

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}S_{t+n}\mid S_{t+n}\geqslant X]\\&=\exp\left(\mu_m+\mu_s+\frac{\sigma_{mm}+\sigma_{ss}+2\sigma_{ms}}{2}\right)\times\Phi\left(\frac{\mu_s+\sigma_{ms}-x}{\sigma_s}+\sigma_s\right)\end{aligned} \tag{11.3.17}$$

同时，

$$\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}\mid S_{t+n}\geqslant X]=\exp\left(\mu_m+\frac{\sigma_{mm}}{2}\right)\Phi\left(\frac{\mu_s+\sigma_{ms}-x}{\sigma_s}\right) \tag{11.3.18}$$

这里，$\phi(\cdot)$是标准正态分布随机变量的累积分布方程，$x\equiv\log(X)$。[②]

(11.3.17)式和(11.3.18)式对于任何对数正态随机变量 M 和 S 都成立，并且独立于

---

① 这里的概念不同于第 9 章所使用的概念，那里 P_t 被用作基本证券价格，但这里我们把 P_t 当作零息债券价格，把 S_t 当作一般证券价格。

② 这里结果由鲁宾斯坦(Rubinstein,1976)模型导出，同样还可参见华恩和利曾伯格(Huang and Litzenberger,1988)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这些变量的其他任何性质。但是，从资产定价理论我们知道，基础对应证券价格 S_t 必须满足：

$$S_t=\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}S_{t+n}]=\exp\left(\mu_m+\mu_s+\frac{\sigma_{mm}+\sigma_{ss}+2\sigma_{ms}}{2}\right) \tag{11.3.19}$$

我们同样知道，n 期零息债券的价格，P_{nt} 必须满足：

$$P_{nt}=\mathrm{E}_t[M_{n,t+n}]=\exp\left(\mu_m+\frac{\sigma_{mm}}{2}\right) \tag{11.3.20}$$

运用(11. 3. 19)式和(11. 3. 20)式简化(11. 3. 17)式和(11. 3. 18)式，同时代入(11. 3. 16)式，我们得到了当基础对应证券是有多期随机折现因子的联合对数正态分布函数时多头看涨期权的价格表达式：

$$\begin{aligned}C_{nt}(X)&=S_t\Phi\left(\frac{\mu_s+\sigma_{ms}-x+\sigma_{ss}}{\sigma_{ss}}\right)-XP_{nt}\Phi\left(\frac{\mu_s+\sigma_{ms}-x}{\sigma_{ss}}\right)\\&=S_t\Phi\left(\frac{s_t-x-p_{nt}+\sigma_{ss}/2}{\sigma_{ss}}\right)-XP_{nt}\Phi\left(\frac{s_t-x-p_{nt}-\sigma_{ss}/2}{\sigma_{ss}}\right)\end{aligned} \tag{11.3.21}$$

要得到布莱克和斯科尔斯(Black and Scholes，1973)的标准期权定价公式，我们还需要两个进一步假设。第一，假设基础对应证券价格提前 n 期的价格的条件方差 σ_{ss}，成比例于 n：$\sigma_{ss}=n\sigma^2$，这里 σ^2 是一些常数。第二，假设期限结构很平缓，从而对于一些常数利率 r，$P_{nt}=e^{-rn}$。基于这些附加假设，(11. 3. 21)式可以得到布莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)公式：

$$C_{nt}(X)=S_t\Phi\left(\frac{s_t-x+(r+\sigma^2/2)n}{\sqrt{n}\sigma}\right)-Xe^{-rn}\Phi\left(\frac{s_t-x+(r-\sigma^2/2)n}{\sqrt{n}\sigma}\right) \tag{11.3.22}$$

然而，对于固定收入衍生金融工具，得到布莱克—斯科尔斯公式(11. 3. 22)所需的附加假设是不合理的。假设看涨期权的基础对应证券是离到期日还有$(n+\tau)$期的零息债券，如果该期权的执行价为 X，期权离有效期为 n 期，那么到有效期到期日，期权的收益损益为 $\mathrm{Max}(P_{\tau,t+n}-X,0)$。由于债券的到期日随时间变化日趋接近缩短，相关的到期日债券价格为 τ 期债券价格。在期限结构模型中，提前 n 期 τ 期债券价格的条件波动并不一定是 n 乘以$(n+\tau-1)$期债券的提前一期的价格的条件波动。同样，期限结构在期限结构模型中也并不通常是平坦的。

要获得利率衍生金融工具价格的封闭形式解释，我们需要一个债券价格和随机折现因子在所有水平上条件对数正态分布的期限结构模型；也就是说，我们需要一个第11. 1. 1节中的同方差一元模型，或者该模型的一些多因子形式。在一元模型中，我们可以运用(11. 3. 21)式的期权定价公式，同时有下列代入因子：$S_t=P_{n+\tau,t}=\exp(-A_{n+\tau}-B_{n+\tau}x_t)$，$P_{nt}=\exp(-A_n-B_nx_t)$，以及：

$$\begin{aligned}\sigma_{ss}&=\mathrm{Var}_t[p_{\tau,t+n}]=\mathrm{Var}_t[-A_\tau-B_\tau x_{t+n}]\\&=B_\tau^2\mathrm{Var}_t[x_{t+n}]=\frac{(1-\phi^\tau)^2\sigma^2(1-\phi^{2n})}{(1-\phi)^2(1-\phi^2)}\end{aligned} \tag{11.3.23}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这里，σ_s 的表达式并不和 n 线性增长。因此，如果有人运用布莱克—斯科尔斯公式(11.3.22)计算隐含波动，该隐含波动会依赖于期权到期日；这就可能存在一个依赖于基础对应期限结构模型的隐含波动期限结构。詹姆西迪恩(Jamshidian，1989)演示了这一结果的连续时间转型式，而特恩布尔和米伦(Turnbull and Milne，1991)推导了对于其他形式的衍生金融工具的离散时间状态的计算数学结果。平方根模型中期权价格的计算更为复杂和困难，但是考克斯，因格索尔和罗斯(Cox，Ingersoll and Ross，1985a)列出了一些有用的结果。

专业投资者们经常希望运用与当前利率的期限结构完全一致的方法来定价期权。要做到这一点，我们可以将 n 期随机折现因子分拆为两部分：

$$M_{n,t+n}=M^{a}_{n,t+n}M^{b}_{n,t+n} \tag{11.3.24}$$

这里，如同第 11.3.1 节，因子 a 是随机的，因子 b 是确定的。对于任何期限 j 的债券价格，也存在一个类似的分解式：$P_{jt}=P^{a}_{jt}P^{b}_{jt}$。如此，可以容易地证明：

$$\begin{aligned} C_{nt}(X) &= \mathrm{E}_t[M^{a}_{n,t+n}M^{b}_{n,t+n}\mathrm{Max}(P^{a}_{\tau,t+n}P^{b}_{\tau,t+n}-X,0)] \\ &= M^{b}_{n,t+n}P^{b}_{\tau,t+n}\mathrm{E}_t[M^{a}_{n,t+m}\mathrm{Max}(P^{a}_{\tau,t+n}-X/P^{b}_{\tau,t+n},0)] \\ &= P^{b}_{nt}P^{b}_{\tau,t+n}C^{a}_{nt}(X/P^{b}_{\tau,t+n}) \\ &= P^{b}_{n+\tau,t}C^{a}_{nt}(X/P^{b}_{\tau,t+n}) \end{aligned} \tag{11.3.25}$$

这里，C^a 是一个如果随机折现因子为 M^a 情况下可能主导的看涨期权价格。换句话说，期权可以运用随机期限结构模型定价，可以运用只调整了执行价和最终解决方案的决定性模型定价。这一方法最早由霍和李(Ho and Lee，1986)运用；然而戴伯维格(Dybvig，1989)模型指出，霍和李(Ho and Lee)选择了他们的 $\phi=1$ 的一元同方差模型下的 a 模型，该模型存在许多合理的性质。布莱克，德曼和托伊(Black，Derman and Toy，1990)，希瑟、杰罗和默顿(Heath，Jarrow and Morton，1992)，以及赫尔和怀特(Hull and White)运用类似方法，但选择不同的 a 模型探讨了该问题。

11.4 结　论

本章我们完整地探讨了利率模型中易于处理的类型，即所谓的关联收益模型。在这些模型中，债券收益的对数值线性于状态变量，这简化了利率期限结构的分析和固定收入衍生金融工具的分析。我们同样看到了关联收益模型存在的一些限制，尤其是在描述短期名义利率动态性时存在的限制。因此，我们对探讨、发展更具弹性，如允许一些诸如多期间段，非线性均值回归，利率波动序列相关等现象的模型充满兴趣，并全面探讨了收益曲线信息。

随着期限结构理论的不断发展，非常重要的是将其纳入其他的资产定价领域。我们

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

已经发现，期限结构模型可以视作随机折现因子的时间序列模型。第 8 章中讨论的股票收益同样探讨了随机折现因子行为的特征。通过股票价格信息和固定收入证券信息的结合，对于决定金融资产的价格，有可能获得更好的经济因素的理解。

习 题

11.1 假设 $\phi<1$，给定(11.1.3)式和(11.1.5)式，同方差对数正态债券价格模型成立。

11.1.1 假设你运用有扩展的决定性漂移表达式的随机游走模型，等式(11.3.4)拟合当前利率的期限结构。推导一个将漂移式和状态变量 x_t 相关的表达式和实际债券定价模型的系数。

11.1.2 比较实际债券定价模型隐含的未来短期利率对数期望值和有决定漂移率的随机游走模型隐含的未来短期利率对数期望值。

11.1.3 比较实际债券定价模型和有决定漂移的随机游走模型所隐含的$(t+1)$时的债券价格对数值的 t 时条件方差。

11.1.4 比较实际债券定价模型和有确定性漂移的随机游走模型所隐含的债券期权的价格。

注意：该问题基于巴克斯和津(Backus and Zin，1994)模型。

11.2 定义 $G_{\tau nt}$ 是到期日为$(t+n+\tau)$的 n 期零息债券远期合约在 t 时刻的价格。定义 $H_{\tau nt}$ 为同一零息债券的 n 期期货合约在 t 时刻的价格。假设第 11.1.1 节中的同方差单因子期限结构模型成立。

11.2.1 证明远期价格对数值 $g_{\tau nt}$ 和期货价格对数值 $h_{\tau nt}$ 都与状态变量 x_t 相关联。解出决定这些价格的关联系数，将其表述为期限结构系数 A_n 和 B_n 的函数。

11.2.2 证明远期合约价格和期货合约价格的比率为大于 1 的常数，并对这一结果作一些经济学解释。

11.2.3 对于第 11.1.2 节中系数值，描绘远期价格对于期限价格比率的到期日 n 函数形式。

注意：这一问题基于巴克斯和津(Backus and Zin，1994)模型。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

12.

金融数据中的非线性

全书我们所讨论的计量经济方法几乎都是为探测金融数据中的线性结构而设计的。比如，在第 2 章，为预测资产回报率，在时间序列实验中，我们运用了收益自相关（return autocorrelations）的权重组合，其中线性预测起到关键的作用。第 4 章的研究，第 5、第 6 章中的 CAPM 和 APT，都是建立在预期回报的线性模型的基础上。甚至在以后的章节中当我们扩大了研究范围，包括像消费、股息、利息率这些经济变量时，模型依然是线性的。这种对线性的强调是不值得大惊小怪的，因为许多推动金融计量经济学的经济模型都是线性模型。

然而，经济行为中的许多方面不可能都是线性的。经验证据和随机抽样表明，投资者对风险和预期回报的态度是非线性的。许多金融合同中的术语像优先购买权和另外一些衍生证券也是非线性的。另外，市场参与者相互影响的策略，信息内生化形成证券价格的过程，经济领域波动的动力机制在本质上都是非线性的。因此，对金融计量经济学的一个尚待研究的领域就是非线性现象的模型。

这是一个挑战，因为非线性模型的集合要比线性模型的集合大得多。毕竟，那些不是线性的就是非线性的。而且，非线性模型通常比线性模型难以分析，很少出现易于使用和经济上可实施的具有密闭形式的结果。在有些情况下，只有通过计算才可以进行分析，这对于习惯于通过方式解析直观地和线性地思考问题的人们来说确实是个不熟悉的领域。

但是，新一代的经济学家正在建立新模型和工具来解决经济领域内的非线性现象，这些模型和工具中的一部分正是本章的中心内容。在动态系统理论、非线性时间序列分析、随机易变性模型（stochastic-volatility）、非参数统计学以及人工神经网络上取得的令人兴奋的进展，已经激发了人们对金融数据中非线性问题的兴趣，我们将在这一章节中探讨以上的每个问题。

在第 12.1 节再次谈到第 2 章中涉及的关于预测的一些问题，不过是从非线性的角度展开论述的。我们对模型作了分类，一类是均值非线性，其违背了鞅假设，另一类是方差

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

非线性，它违背了独立性假设但不违背鞅假设。

第 12.2 节深入探讨了方差非线性的模型，包括单变量和多变量的广义异方差条件自回归(GARCH)和随机易变性模型。

在第 12.3 节和第 12.4 节中，我们为了能处理变量间的非线性关系，不用参数时间序列模型，而是用非参数的，包括平滑处理技巧和人工神经网络。虽然这些技巧能揭示非线性的多样性，它们却过于依赖于数据和计算。为了说明这些技巧的威力，我们举了个衍生证券的定价和避险以及估计牌价强度的应用例子。

我们在第 12.5 节还讨论了这些技巧的一些局限。最重要的限制是两个紧密相连的问题：数据搜寻和过度拟合，它们都过分依赖于线性模型，只是程度不同而已。不幸的是，除了很特殊的一些例子外，关于如何处理这些问题我们论述得很少。因此，这是一个有许多问题尚待回答的领域。

12.1 单变量时间序列中的非线性结构

典型的时间序列模型把观察到的时间序列 x_t 与潜在的冲击变量(shocks)序列 ε_t 联系了起来。在线性时间序列分析中，冲击变量序列被假定为不相关的但未必独立同分布(IID)。沃尔德在其表述定理(wold representation theorem)中指出：任何时间序列都能写成无限阶的随机扰动的线性移动平均(linear moving arerage)，并且这个线性移动平均概括了序列的无条件方差和自协方差。

在非线性时间序列分析中，潜在的扰动变量通常被假定为 IID，不过我们找到了一个非线性函数，使时间序列变量 x_t 和随机冲击变量序列联系起来成为可能。一个通常的表述是：

$$x_t=f(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\cdots) \tag{12.1.1}$$

这里，冲击变量被假定为零均值和单位方差，并且函数 $f(\cdot)$是未知的。这个表述的一般性使它用起来很困难，绝大多数应用于实际的模型，还常被表述成更为严格的形式：

$$x_t=g(\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\cdots)+\varepsilon_t h(\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\cdots) \tag{12.1.2}$$

函数 $g(\cdot)$表示 x_t 的均值，因为 $\mathrm{E}_{t-1}[x_t]=g(\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\cdots)$。$x_t$ 的新生量和与随机冲击变量 ε_t 成比例，比例系数是函数 $h(\cdot)$。这个函数的平方是 x_t 的方差，因为 $\mathrm{E}_{t-1}[(x_t-\mathrm{E}_{t-1}[x_t])^2]=h(\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\cdots)^2$。带有非线性函数 $g(\cdot)$的模型称为均值非线性，而带有非线性的函数 $h(\cdot)^2$ 称为方差非线性。

要理解(12.1.2)式的限制，可考虑给定 $\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\cdots$下泰勒序列在 $\varepsilon_t=0$ 的展开式：

$$x_t=f(0,\varepsilon_{t-1},\cdots)+\varepsilon_1 f_1(0,\varepsilon_{t-1},\cdots)+(1/2)\varepsilon_t^2 f_{11}(0,\varepsilon_{t-1},\cdots)+\cdots \tag{12.1.3}$$

这里，f_1 是 f 关于 ε_t 的一阶导数(ε_t 是它的第一个变量)，f_{11}是 f 关于 ε_t 的二阶导数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

要获得(12.1.2)式，我们在泰勒展开式降低高次项次数，令 $g(\varepsilon_{t-1},\cdots)=f(0,\varepsilon_{t-1},\cdots)$，及 $h(\varepsilon_{t-1},\cdots)=f_1(0,\varepsilon_{t-1},\cdots)$。通过降低高次项次数，我们把高阶条件下时间变量 x_t 与次高阶条件下的时间变量 x_t 联系起来，因为所有的幂 $p\geqslant 2$，$\mathrm{E}_{t-1}[x_t-\mathrm{E}_{t-1}[x_t])^p]=h(\cdot)^p\mathrm{E}[\varepsilon_t^p]$。那些只对前两阶的 x_t 感兴趣的人们，把这个限制看作采用(12.1.2)式这样易处理的形式必须付出的代价。

方程式(12.1.2)很自然地把非线性时间序列模型分为两类：条件均值为 $g(\cdot)$ 的模型和条件方差为 $h(\cdot)^2$ 的模型。绝大多数时间序列模型不是这种就是另外一种。例如，下述形式的一个简单的非线性移动平均模型：

$$x_t=\varepsilon_t+\alpha\varepsilon_{t-1}^2 \tag{12.1.4}$$

这里，$g(\cdot)=\alpha\varepsilon_{t-1}^2$，$h(\cdot)=1$。这个模型均值是非线性的，但方差却不是。一阶恩格尔(Engle)条件异方差自回归模型(Engle，1982)是另外一种形式：

$$x_t=\varepsilon_t\sqrt{\alpha\varepsilon_{t-1}^2} \tag{12.1.5}$$

这里，$g(\cdot)=0$，且 $h(\cdot)=\sqrt{\alpha\varepsilon_{t-1}^2}$，这个模型是方差非线性的，而不是均值。

理解平均值非线性和方差非线性不同之处的一个方法是考虑 x_t 序列的矩。正如我们已强调的，只要二阶矩(自异方差) $\mathrm{E}[x_tx_{t-i}]$对于 $i>0$ 时都为零，非线性模型就可以建立。在上面的两个例子中，假如 ε_t 是对称分布，很容易看出正是上述情况。比如，它的三阶矩是零。对于非线性移动平均(12.1.4)式，例如，当 $\mathrm{E}[\varepsilon_{t-1}^3]=0$ 时，我们有：$\mathrm{E}[x_tx_{t-1}]=\mathrm{E}[(\varepsilon_t+\alpha\varepsilon_{t-1}^2)(\varepsilon_{t-1}+\alpha\varepsilon_{t-2}^2)]=\alpha\mathrm{E}[\varepsilon_{t-1}^3]=0$。

现在考虑高阶矩的形式：

$$\mathrm{E}[x_tx_{t-i}x_{t-j}x_{t-k}\cdots]$$

当 $i,j,k,\cdots>0$ 时，这些高阶矩不等于零而模型是均值非线性的。模型是方差非线性但遵从鞅的特性，故有 $\mathrm{E}[x_t|x_{t-1},\cdots]=0$，也就是当 $i,j,k,\cdots>0$ 时，它们的高阶矩是零。这些模型中只有当存在一个时间滞后指数 $i,j,k,\cdots$是零的时候，才可能有非零高阶矩。在非线性移动平均的例子(12.1.4)式中，在 $i=j=1$ 时，有三阶矩：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[x_tx_{t-1}^2]&=\mathrm{E}[(\varepsilon_t+\alpha\varepsilon_{t-1}^2)(\varepsilon_{t-1}+\alpha\varepsilon_{t-2}^2)^2]\\&=\alpha\mathrm{E}[\varepsilon_{t-1}^4]+2\alpha^2\mathrm{E}[\varepsilon_{t-2}^2]\mathrm{E}[\varepsilon_{t-1}^3]\neq 0\end{aligned}$$

在一阶 ARCH 例子中，如(12.1.5)式，同样的三阶矩 $\mathrm{E}[x_tx_{t-1}^2]=\mathrm{E}[(\varepsilon_t\sqrt{\alpha\varepsilon_{t-1}^2})\varepsilon_{t-1}^2\alpha\varepsilon_{t-2}^2]=0$。但是对于这个模型，当 $i=0,j=k=1$ 时，$\mathrm{E}[x_t^2x_{t-1}^2]=\mathrm{E}[\varepsilon_t^2\alpha^2\varepsilon_{t-1}^4\varepsilon_{t-2}^2]\neq 0$。

我们将在第 12.2 节讨论 ARCH 和另外一些关于变化的方差的模型、在这节的末尾我们集中讨论了条件均值的非线性模型。在第 12.1.1 节我们探究了几种非线性模型参数化的方法，在第 12.1.2 节我们应用这些参数模型去激发和解释一些在非线性多变量时间序列中常用的试验，包括布拉克、德谢特和沙因克曼(Brock，Dechert and Scheinkman，1987)试验。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

12.1.1 一些参数模型

无论我们研究参数模型的子集，还是模型的所有非线性形式，都不可能对此提供一个完美无缺的解释。普里斯特利(Priestley,1988)，特拉斯维塔、特乔斯蒂姆和格兰杰(Terasvirta,Tjøstheim and Granger,1994)，通(Tong,1990)都提供了许多诱人、流行的非线性时间序列模型，其中包括许多带有特殊且有趣名字的模型。比如，自激活门限自回归(self-exciting threshold autoregression,SETAR)模型，丰富关联指数自回归(amplitude-dependent exponential autoregression,EXPAR)，状态关联模型(state-dependent models,SDM)。为了使大家对这个领域有较广泛的了解，我们这节提供了四个例子：多项式模型，分段线性模型，马尔可夫转移模型和可定混沌模型。

多项式模型

一种表述函数 $g(\cdot)$的方法是泰勒展开序列在 $\varepsilon_{t-1}=\varepsilon_{t-2}=\cdots=0$ 附近，产生了不连续的沃尔特拉序列[见沃尔特拉(Volterra,1959)]：

$$g(\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\varepsilon_{t-i}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}b_{ij}\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-j}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}c_{ijk}\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t-k}+\cdots \tag{12.1.6}$$

在(12.1.6)式中的单个求和号是一个标准的线性移动平均，双个求和号是滞后的两变量的交叉乘积和，三个求和号是三个滞后变量的交叉乘积之和，等等。以 j 为下标的加法从 i 开始，以 k 为下标的加法从 j 开始，等等，以避免重复计算。这种方法表述了关于过去变量的真正的非线性函数，这种函数是变量多项式函数的加权和。方程式(12.1.4)就是这种形式的模型的一个简单例子。罗宾森(Robinson,1979)和普里斯特利(Priescley,1988)推广了这个式子的应用。

多项式模型也可以写成自回归的形式。函数 $g(\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\cdots)$把条件均值与过去的扰动项联系了起来，可以写成 $g^*(x_{t-1},x_{t-2},\cdots)$。其将条件均值与 x_t 的滞后项联系了起来。(12.1.6)式的自回归形式就是：

$$g^*(x_{t-1},x_{t-2},\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^*x_{t-i}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}b_{ij}^*x_{t-i}x_{t-j}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}c_{ijk}^*x_{t-i}x_{t-j}x_{t-k}+\cdots \tag{12.1.7}$$

要得到混合自回归/移动平均表示形式也是可能的，即非线性同效 ARMA 模型。比如，双线性模型，运用滞后变量 x_t、ε_t 和两者的叉积：

$$g^{**}(\varepsilon_{t-1},x_{t-1},\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\varepsilon_{t-i}+\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x_{t-i}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_{ij}x_{t-i}\varepsilon_{t-j} \tag{12.1.8}$$

这个模型能很简洁地体现非线性(用了一个有限的、短的滞后长度)，而纯粹的非线性移动平均或非线性自回归模型却不能。格兰杰和安德森(Granger and Andersen,1978)，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

以及萨巴拉奥和加布拉(Subba Rao and Gabr，1984)在细节上探究了双线性模型。

分段线性模型

另外一个适合于非线性结构常用方法是运用分段线性函数，就像一阶门限自回归(TAR)一样：

$$x_t=\begin{cases}\alpha_1+\beta_1 x_{t-1}+\varepsilon_t & 设\ x_{t-1}<k\\ \alpha_2+\beta_2 x_{t-1}+\varepsilon_t & 设\ x_{t-1}\geqslant k\end{cases} \tag{12.1.9}$$

这里，x_t 对 x_{t-1} 的一个回归的截距和斜率依赖于 x_{t-1} 和"门限"k 的关系。这个模型可一般化为更高阶和多个门限值，通(Tong，1983，1990)有详细的解释。

分段线性模型也包括变点模型，或者像经济文献中所说的那样，称为结构中断模型。在这些模型中，参数被假定为变化的，通常一次变化发生在一个固定的样本周期里，并且目标就是估计两个参数、变点或结构中断点。珀伦(Perron，1989)把这个技术用到了宏观经济的时间序列中，布洛德斯齐(Brodsky，1993)，卡尔斯坦、默勒和西格基德(Carlstein，Muller and Siegmund，1994)提出了更新的处理变点的方法，包括非参数估计和贝叶斯推断。

变点方法在统计学和计算研究文献中已是很完备了，但把它们运用到经济模型中去并不是没有争议的。对于工程应用来说，在一个给定的数据集中，我们可以认为结构断点确实存在。但是，我们从来不能确定地说结构断点存在于经济的时间序列中。并且如果我们因为一些重要的经济现象而认为结构中断已经开始，如股票市场崩溃，这种建立在数据上的搜寻规则会使我们的推断显著地偏离实际而变得无中生有。

马尔可夫转移模型

汉密尔顿(Hamilton，1989，1990，1993)和斯科劳夫(Sclove，1983a，1983b)的马尔可夫状态转换模型和 TAR 密切相关。主要的区别在于变化的方式不是取决于过程的水平，而是取决于一种不可观测的状态变量，这种变量通过一个马尔可夫链来建立模型。例如：

$$x_t=\begin{cases}\alpha_1+\beta_1 x_{t-1}+\varepsilon_{1t} & 设\ s_t=1\\ \alpha_2+\beta_2 x_{t-1}+\varepsilon_{2t} & 设\ s_t=0\end{cases} \tag{12.1.10}$$

这里，s_t 是一个不可观测的、转移概率矩阵为 **P** 的二阶马尔可夫链。注意到(12.1.10)式中在记录时间的习惯上的细微区别：s_t 在时刻 t 决定系统状态，而不是由 s_{t-1} 决定。在这两个系统状态下，x_t 是一个 AR(1)，但是参数(包括误差项的方差)不同于系统状态，系统状态的变化是随机的，并且可能是序列相关的。

这个模型从经济的角度看有明显的引人之处。系统状态的变化是由要素引起，而不是由我们当前建立的模型序列引起(系统状态不是由 x_t 决定，而是由 s_t 决定)的。我们很少知道自己处在哪种方式之下(s_t 是观测不到的)，但是在了解真相之后，我们可以带有几

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

分自信地知道自己处在哪种方式[s_t 通过汉密尔顿(Hamilton,1989)滤波过程能被估计]。而且，马尔可夫转移模型不受统计数字偏差的影响，但这种偏差却影响结构中断模型；系统状态变换通过数据和马尔可夫链的相互作用可以得到确认，而不是通过事先对数据的检验。汉密尔顿(Hamilton,1989)把这种技术应用于经济周期，很好地说明了这种技术的威力和应用范围。

可定非线性动态系统

在可定非线性动态系统的建模上有许多令人兴奋的进展，这些进展激发了许多估计非线性关系的技巧。比较简单的是不多于两个变量的微分和差分方程系统，该系统展示了极端复杂的动力学。这种复杂性的通常术语我们称为蝴蝶效果，该观点认为，“巴西的一个蝴蝶翅膀的振动会导致德克萨斯的一场龙卷风”。[①] 这种说法半开玩笑地指由勒伦佐(Lorenz,1963)提出、为建立气象模型所用的如下可定常微分方程：

$$\dot{x}=10(y-x) \tag{12.1.11}$$

$$\dot{y}=xz+28x-y \tag{12.1.12}$$

$$\dot{z}=xy+\frac{8}{3}z \tag{12.1.13}$$

勒伦佐(Lorenz,1963)观察到该系统中初始值的极小的变化。例如，在万分位上的变化会产生迥然不同的样本路径，甚至只是过了很少一点时间，这种对初始条件的敏感性是混沌理论表现出来的一个特征。

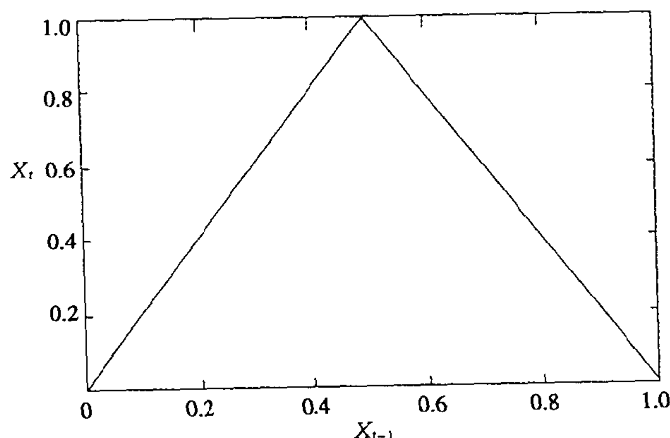


图 12.1 帐篷图

① 这与爱德华·勒伦佐 1979 年 12 月在华盛顿特区对美国科学促进会的演讲题目相对应。见格雷克(Gleick,1987)对非线性动态系统或混沌理论科学出现的一个可爱、活泼和娱乐性的一个外行的说明。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

混沌理论的一个更简单的例子是众所周知的帐篷图：

$$x_t=\begin{cases}2x_{t-1} & \text{设 } x_{t-1}<\frac{1}{2}\\ 2(1-x_{t-1}) & \text{设 } x_{t-1}\geqslant\frac{1}{2}\end{cases},\quad x_0\in(0,1) \tag{12.1.14}$$

该帐篷图能被视作为一阶门限自回归，没有扰动项 ε_t，参数 $\alpha_1=0,\beta_1=2,\alpha_2=2,\beta_2=-2$。如果 x_{t-1} 位于 0 到 1 之间，x_t 也位于这个区间。这样，此帐篷图就如图 12.1 所画的那样，使单位区间与它自身建立了对应关系。(12.1.14)式形式的数据随机地出现在单位区间内，服从均匀分布且序列不相关。而且，数据紧密地依赖初始条件，这将在习题 12.1 中得到证实。海塞(Hsieh，1991)提出另外几个主要的例子，而布拉克(Brock，1986)，霍尔登(Holden，1986)，汤普森和斯图瓦特(Thompson and Stewart，1986)提出了更多的关于混沌系统数学问题的正式讨论。

虽然在非线性动态系统中许多重要的突破能立刻运用于物理学、生物学和另外一些“硬”科学，但是对经济学和金融的影响却小得多。虽然一些经济应用已被考虑，[①]却没有特别引人注目的东西，尤其是从实证的角度。在可定非线性动态系统中对经济现象的建模存在两个严重的问题。第一，不像许多自然科学中的理论，经济理论通常没有具体的函数形式。这样，经济学家很难期望用理论上的依据去发现一种非线性的形式。第二，经济学家很难实施一种可控制的实验，这就使人们几乎不可能对支配经济现象的可定动态系统的参数进行推断，即使这样的系统确实存在并且是低次的。当可控制的试验可行时，比如，在粒子物理学中，通过在紧密的时间间隔里拍摄许多该系统的“快照”，很精确地找出原动力是可能的。这种被称为*频闪观测图*或庞加莱的技术，已经把实证的内容赋予非线性动态系统中最抽象的观点，但不幸的是它却不能用于非实验性数据。

一组相对简单的非线性确定性方程能产生我们在金融市场中所看到的那种复杂性，这种可能性是诱人的。但如果我们不能精确地恢复这些方程，它将没什么意义。而且对于敏感地依赖于初始条件的系统，统计的样本误差降低了动态系统理论的实用性。当然，考虑到这个领域的快速发展的速度，几年之后这些遗留问题的严重性可能会减轻许多。

12.1.2 非线性结构的单变量检验

尽管前一节中我们提到了一些告诫，但混沌理论中的数学已经激发了一些新的检验

---

① 见，例如，鲍德瑞和伍德福特(Boldlin and Woodford，1990)，布拉克和塞耶斯(Brock and Sayers，1998)，柯雷克、科勒思和帕佩尔(Graig，Kohlase and Papell，1991)，德伊(Day，1983)，戈兰德蒙特和麦尔格伦哲(Grandmont and Malgrange，1986)，海塞(Hsieh，1993)，肯那和奥伯林(Kennan and O'Brien，1993)，彼萨伦和波特尔(Pesaran and Potter，1992)，沙因克曼和莱伯罗恩(Scheinkman and LeBaron，1989)，沙因克曼和伍德福特(Scheinkman and Woodford，1994)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

独立性和非线性结构的统计试验，它们在各自的领域都是很有价值的，现在我们讨论这些检验。

基于高阶矩的检验

我们先前关于非线性模型的高阶矩的讨论可以作为非线性统计检验的基础。比如，海塞(Hsieh，1989)定义了一个尺度三阶矩：

$$\varphi(i,j)\equiv\frac{\mathrm{E}[x_t x_{t-i} x_{t-j}]}{\mathrm{E}[x_t^2]^{3/2}} \tag{12.1.15}$$

可以看到对 IID 数据中所有 $i, j>0$ 有 $\varphi(i,j)=0$，或鞅模型产生的数据只是方差非线性。海塞很自然地提出如下的方法估计 $\varphi(i,j)$：

$$\hat{\varphi}(i,j)\equiv\frac{\frac{1}{T}\sum_t x_t x_{t-i} x_{t-j}}{\left[\frac{1}{T}\sum_t x_t^2\right]^{3/2}} \tag{12.1.16}$$

在零假设 $\varphi(i,j)=0$ 和对 x_t 的充分正则性条件下，高阶矩阵在 $\sqrt{T}\hat{\varphi}(i,j)$ 是渐近正态的并且它的方差可以通过下式被一致地估计：

$$\hat{V}\equiv\frac{\frac{1}{T}\sum_t x_t^2 x_{t-i}^2 x_{t-j}^2}{\left[\frac{1}{T}\sum_t x_t^2\right]^3} \tag{12.1.17}$$

海塞的检验运用了数据的一个特殊三阶矩，但同时要看多个矩也是可能的。例如，自回归多项式模型表明了一个简单的非线性检验，其均值是关于 x_t 和它的滞后变量、它的叉积和叉积的滞后变量的回归，并且可能检验非线性项的联合显著性。特赛伊(Tsay，1986)提出了这种检验，运用二次项和 M 个滞后变量，共有 $M(M+1)/2$ 个非线性回归量。若你能计算异方差一致标准误差，则这种检验对于现存的方差非线性就是很有效的。

相关积分和相关维数

要想从一个真正的随机过程中辨认出一个可定的混沌过程，必须把数据看成具有足够高的维数形式。以帐篷图为例，如果 x_t 服从均匀分布，我们把 x_t 放在单位区间上，那么 x_t 的出现是随机的。如果把 x_t 和 x_{t-1} 放在单位平面图上，则数据将会落在图 12.1 所示的帐篷形状的曲线上。

这种直接的方法会产生意外的结果，就像我们在第 3 章中分析股票价格离散状况时所见到的那样。然而当包括更高次项或更复杂的非线性时，它将会变得难以实施。戈拉斯伯格和普罗卡西亚(Grassberger and Procaccia，1983)已提出一种正式的方法来解释这个基本观点。他们的方法首先需要组织数据(如果愿意可提前滤波以去除线性结构)，转变成 n 维项 x_t^n，定义为：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$x_t^n=\{x_{t-n+1},\cdots,x_t\} \tag{12.1.18}$$

参数 n 被称为嵌入维数。

下一步是计算相邻两个 n 维项接近的程度。要度量它的接近程度，我们选择了一个数 k，若相邻两项 x_s^n、x_t^n 差的绝对值的最大值小于 k，则我们称 x_s^n、x_t^n 是互相接近的，即：$\max_{i=0,\cdots,n-1}|x_{s-i}-x_{t-i}|<k$。我们定义了一个接近程度的指标量 K_{st}，如果两个 n 维项是互相接近，则 K_{st} 为 1，否则为 0：

$$K_{st}=\begin{cases}1 & 设\ \max_{i=0,\cdots,n-1}|x_{s-i}-x_{t-i}|<k,\\ 0 & \end{cases} \tag{12.1.19}$$

在这个意义上，我们对一个容量为 T 的 n 维项的样本定义接近率 $C_{n,T}(k)$：

$$C_{n,T}(k)\equiv\frac{\sum_{s=1}^{T}\sum_{t=s}^{T}K_{st}}{T(T-1)/2} \tag{12.1.20}$$

相关整合 $C_n(k)$ 即为样本容量增加时接近率的极限：

$$C_n(k)\equiv\lim_{T\to\infty}C_{n,T}(k) \tag{12.1.21}$$

上述极限实际上等价于随机选择一对 n 维项时，它们接近的概率。

显然，相关整合既要依赖嵌入维数 n 又要依赖参数 k。要明白 k 的重要性，只需令嵌入维数$n=1$，这样 n 维项只包含数据点，并且数据是 IID 且均匀分布在单位区间(k 和 $1-k$ 之间)的中间时，基准数据点长度为 $2k$，但当基准数据点接近单位区间的两端时，它会变小一些。在极端情况基准数据点是 0 或 1 时，只有数据点另一部分 k 在 k 的基准内。数据点接近基准点 b 的一个通用的公式是 $\min(k+b,2k,k+1-b)$。然而，当 k 变小时，这个“边缘理论”所产生的问题却是可以忽略的，并且相关积分接近 $2k$。

戈拉斯伯格和普罗卡西亚(Grassberger and Procaccia，1983)考察了当距离度量 k 衰减时相关积分的特征。对小的 k，他们计算了 $\log C_n(k)$对 $\log k$ 的比率：

$$v_n=\lim_{k\to 0}\frac{\log C_n(k)}{\log k} \tag{12.1.22}$$

当我们减小描述 $n=1$ 的均均分布的参数的接近程度 k 时，此式度量了互相接近的数据点关于接近参数降低的比例。对 $n=1$ 的均匀分布参数 IID 数据，当 k 减少时比率 $\log C_1(k)/\log k$ 接近 $\log 2k/\log k=(\log 2+\log k)/\log k=1$。这样对 IID 均匀分布的数据有 $v_1=1$；对很小的数 k，互相接近的点的接近速度和 k 的收缩率是一样的。

现在考虑带有更高嵌入维数 n 的相关积分。当 $n=2$ 时，我们把数据的二维项用二维平面图标出，就像在图 12.1 一样，并且要求二维项部分落在一个正方形里，它的中心是基准二维项，边长是 $2k$。对于均匀分布的 IID 数据，数据点的 $4k^2$ 部分落在这样的一个正方形里，它的基准二维项离单位正方形的边足够远。同样我们可以让 k 缩小来解决边缘问题，我们发现比率 $\log C_2(k)/\log k$ 接近 $\log 4k^2/\log k=(\log 4+2\log k)/\log k=2$。这样对 IID 均匀分布的数据 $v_2=2$；对一个很小的数 k，数据项接近的速率是 k 的 2 倍。通常均匀分

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

布的 IID 数据 $v_n=n$；对一个很小的 k，n 维项互相接近的速率是 k 的 n 倍。

当数据由非线性可定过程产生时，相关积分行为将会大不一样。要验证这一点，可考虑帐篷图产生的数据。在一维的情况下，数据均匀分布在单位线段上，这样我们得到 $v_1=1$。但是在二维情形，所有的数据点落在图 12.4 所示的帐篷形状的曲线上。对一个很小的 k，数据点的接近速率和 k 是一样的，这样 $v_2=1$。在高维的情形运用类似的讨论，对由帐篷图产生的数据对所有的 n 有 $v_n=1$。

相关维数被定义为当 n 增加时 v_n 的极限，当这个极限存在时有：

$$v=\lim_{n\to\infty} v_n \tag{12.1.23}$$

对非线性可定过程，v 是有限的。

非线性可定数据和 IID 均匀分布数据的差异可概括为：对具有其他分布的 IID 数据，不管它们服从何种分布，均有 $v_n=n$。这样，分布的影响就被平均化了，因为我们在计算相关积分时依次把 n 维项作为基准 n 维项。戈拉斯伯格和普罗卡西亚(Grassberger and Procaccia，1983)提出对不同的 n 计算 v_n，看它是随着 n 增长还是转变一个固定的极限，用此方法区分非线性可定数据和 IID 随机数据。这种方法需要大量的数据，因为你必须用非常小的 k 去计算 v_n，并且对于 v_n 没有分布理论可以运用。

布拉克—德谢特—沙因克曼检验

布拉克、德谢特和沙因克曼(Brock，Dechert and Scheinkman，1987)提出了一种方法，更适合运用于经济学和金融学中有限的数据。他们认为，当 k 为有限时候，如果数据是 IID，那么对任何 n 有：

$$C_n(k)=C_1(k)^n \tag{12.1.24}$$

要理解这个结论，我们注意到，比率 $C_{n+1}(k)/C_n(k)$ 可被解释为下述条件概率：

$$\begin{aligned}\frac{C_{n+1}(k)}{C_n(k)}&=\Pr\left(\max_{i=0,\cdots,n}|x_{s-i}-x_{t-i}|<k\;\middle|\;\max_{i=1,\cdots,n}|x_{s-i}-x_{t-i}|<k\right)\\&=\Pr\left(|x_s-x_t|<k\;\middle|\;\max_{i=1,\cdots,n}|x_{s-i}-x_{t-i}|<k\right)\end{aligned} \tag{12.1.25}$$

这就是说，$C_{n+1}(k)/C_n(k)$ 是在给定在前 n 个数据点是接近的条件下，两个数据点也接近的概率。如果数据是 IID，它一定等于两个数据点接近的条件概率 $C_1(k)$。对所有的正数 n，令 $C_{n+1}(k)/C_n(k)=C_1(k)$，我们得到(12.1.24)式。

布拉克、德谢特和沙因克曼(Brock，Dechert and Scheinkman，1987)提出 BDS 检验统计量：

$$J_{n,T}(k)=\sqrt{T}\frac{C_{n,T}(k)-C_{1,T}(k)^n}{\hat{\sigma}_{n,T}(k)} \tag{12.1.26}$$

这里，$C_{n,T}(k)$ 和 $C_{1,T}(k)$ 是(12.1.20)式所定义的样本相关积分，$\hat{\sigma}_{n,T}(k)$ 是渐近标准离差 $C_{n,T}(k)-C_{1,T}(k)^n$ 的一个估计量。BDS 统计量在 IID 零假设下是渐进标准正态的；

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

海塞(Hsieh,1989),沙因克曼和莱伯罗恩(Scheinkman and LeBaron,1989)解释并应用了它,他们提出了 $\hat{\sigma}_{n,T}(k)$ 的明确表达形式。海塞(Hsieh,1989)和海塞(Hsieh,1991)报告了有限样本的 BDS 统计量关于容量和势的蒙特卡洛结论。

因为在 IID 数据中对 $C_n(k)=C_1(k)^n$ 还有一些反常的非线性模型,BDS 统计量显得比常用的非线性模型有更强的势,理解它比那些方差非线性而不是均值非线性的模型有更强的势是很重要的,就和只是均值非线性的模型一样。因此,一个 BDS 拒绝并不意味着时间序列具有时变的条件均值;它只能被简单地认为具有时变的条件方差。例如海塞(Hsieh,1991),运用 BDS 检验强烈拒绝普通股票回报是 IID 的假说。他随后估计了回报的时变条件方差模型,得到了更弱的证据,拒绝这些模型中的残差是 IID 的假说。

12.2 变动易变性模型

在这一节里我们考虑用另外的方法建立变动非稳定时间序列 η_{t+1} 模型。第 12.2.1 节论述了自回归条件异方差和随机易变性模型,第 12.2.2 节展示了它们如何概括到多变量的情形。第 12.2.3 节连结了时变条件均值模型和时变条件方差模型;这些模型在均值和方差上都是非线性的。

为了集中论述易变性,我们假定 η_{t+1} 是新生量,即它关于时间 t 是零均值。在金融应用中,η_{t+1} 在资产回报中可能是新生量。我们定义 σ_t^2 是变量 η_{t+1} 条件 t 方差或相当于 η_{t+1}^2 的条件期望。我们假定 η_{t+1} 是正态分布:

$$\eta_{t+1} \sim \mathcal{N}(0,\sigma_t^2) \qquad (12.2.1)$$

非条件方差 σ^2 就是 σ_t^2 的非条件期望:[①]

$$\sigma^2 \equiv \mathrm{E}[\eta_{t+1}^2]=\mathrm{E}[\mathrm{E}_t[\eta_{t+1}^2]]=\mathrm{E}[\sigma_t^2]$$

这样围绕着其均值的变化并不改变无条件方差 σ^2。

然而,σ^2 的变化却影响 η_{t+1} 的无条件分布的高阶矩。尤其是,带有时变 σ_t^2 的 η_{t+1} 的无条件分布比正态分布更厚的尾部,为了说明这一点,我们有下式:

$$\eta_{t+1}=\sigma_t\varepsilon_{t+1} \qquad (12.2.2)$$

ε_{t+1} 是 IID 服从零均值和单位方差的随机变量(就像上一节一样),也就是正态分布(我们在上一节没有作此假定)。

就像我们在第 1 章所讨论的那样,判断随机变量 y 分布尾部厚度的有效度量为标准化的四阶矩,或称为峰度,其定义为 $K(y)\equiv\mathrm{E}[y^4]/\mathrm{E}[y^2]^2$。众所周知,一个正态随机变

---

① 仅当我们研究的是具有常数(零)条件均值的新生变量序列时,上式成立。对具有时变条件均值的序列,无条件方差不再与条件方差的无条件期望一致。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

量的峰度是 3；因此 $K(\varepsilon_{t+1})=3$。但是对新生量 η_{t+1}，我们有：

$$\begin{aligned} K(\eta_{t+1}) &= \frac{\mathrm{E}[\sigma_t^4]\mathrm{E}[\varepsilon_{t+1}^4]}{(\mathrm{E}[\sigma_t^2])^2} \\ &= \frac{3\mathrm{E}[\sigma_t^4]}{(\mathrm{E}[\sigma_t^2])^2} \\ &\geqslant \frac{3(\mathrm{E}[\sigma_t^2])^2}{(\mathrm{E}[\sigma_t^2])^2} = 3 \end{aligned} \tag{12.2.3}$$

这里，第一个等式是因为 σ_t 和 ε_{t+1} 的独立性，不等号是詹森不等式的应用。直观上看，非条件分布是正态分布的混合物，方差小的变量绝大多数在均值附近，方差大的变量大多集中在分布的尾部。这样混合的分布其尾部要比正态分布厚。

我们考虑另外的方法去建模和估计 σ_t^2。关于这方面的文献很多，故我们只能有选择性地回顾。鲍勒斯利夫、邹和克洛纳(Bollerslev, Chou and Kroner, 1992)，鲍勒斯利夫、恩格尔和纳尔逊(Bollerslev, Engle and Nelson)，汉密尔顿(Hamilton, 1994)都提出了更多综合性的方案。

12.2.1 单变量模型

早期关于时变易变性的研究是：先从资产回报数据中扣除易变性的估计，再对易变性设定参数化时间序列模型。比如，奥斐瑟(Officer, 1973)在沿着时间移动的子样上度量回报的标准离差，运用滚动标准离差的方法，在每个时点上估计易变性。另外一些研究者利用给定某天价格的高低差异估计该天的易变性[加曼和克拉斯(Garman and Klass, 1980)，帕金森(Parkinson, 1980)]。这些方法都隐含地假定一些时间间隔中的易变性是不变的。

如果我们的目标仅仅是简单地度量某一时点上的易变性，那么这些方法通常是很精确的；正像默顿(Merton, 1980)观测到的，如果资产的价格以常易变性扩散，比如几何布朗运动，只要你测定价格的次数足够多，那么在任意短的抽样时期内，你都能足够精确地估计出易变性。① 纳尔逊(Nelson, 1992)指出，只要回报的条件分布不是厚尾部的、且易变性的，变化足够平缓，那么即使易变性随时间而变，也能得到类似的结论。

然而，当所产生的序列沿着时间移动而假定有些时期的易变性是恒定的，我们认为，运用这样的易变性度量既没有逻辑的一致性，统计上也是效率不高的。为解决这个问题，需要先设定易变性的参数模型，然后运用模型从回报的数据中扣除易变性估计量。

① 见第 9.3.2 节，注意高频价格数据常常被第 3 章讨论的分类排序的微观结构问题所严重影响。加曼(Garman, 1980)，克拉斯和帕金森(Klass and Parkinson, 1980)的高低法的可用性是有限的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

自回归条件异方差模型

从资产回报的数据中通常可以看到大的回报后往往会跟随更大的回报。也就是说，资产回报的易变性呈序列相关。这可以从图 12.2 中明显地看到从 1926～1994 年期间 CRSP 加权股票指数的月度超额回报。单个月的回报变化很大，但在一段时间内它却变化很缓慢。回报的幅度在 20 世纪 30 年代很大，而五六十年代却小得多。

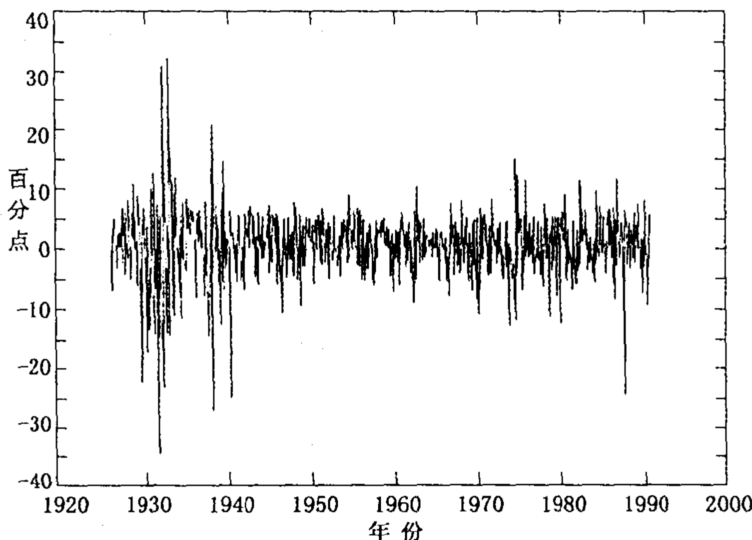


图 12.2 1926～1994 年月度美国股票超额对数收益

另外一种理解这种现象的方法是计算平方超额回报或绝对值超额回报的序列相关系数。在 0.23 和 0.21，这些序列的一阶序列相关系数分别是各自资产回报的一阶序列相关系数 0.11 的两倍，并且有很重要的统计意义，因为在序列不相关的原假设下标准误差是 $1/\sqrt{T}=0.036$。平均地看前 12 项自相关系数的差别更显著：平方超额回报为 0.20，绝对值超额回报为 0.21，超额自身的回报为 0.02，这反映了这样一个事实，即平方超额回报和绝对值超额回报的自相关的消失是很慢的。

为便于理解易变性的序列相关性，恩格尔（Engle，1982）提出了自回归条件异方差，或简称为 ARCH 模型类。这里条件方差可写为新生变量的滞后分布：

$$\sigma_t^2=\omega+\alpha(L)\eta_t^2 \tag{12.2.4}$$

这里，$\alpha(L)$是滞后量中的一个多项式，要使条件方差为正，ω 和 $\alpha(L)$的系数必须非负。

鲍勒斯利夫（Bollerslev，1986）提出了广义自回归条件异方差，或称之为 GARCH 模型，它能建立易变性一致移动平均模型，而不需要估计高阶多项式 $\alpha(L)$中大量的系数，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

即：

$$\sigma_t^2=\omega+\beta(L)\sigma_{t-1}^2+\alpha(L)\eta_t^2 \tag{12.2.5}$$

这里，$\beta(L)$也是滞后算子的一个多项式。与 ARMA 模型相类比，当多项式$\beta(L)$的阶是 p 并且$\alpha(L)$的阶是 q 时，它被称为 GARCH(p,q)模型。在 GARCH 类中最常用的模型是简单的 GARCH(1,1)，可以写为：

$$\begin{aligned}\sigma_t^2&=\omega+\beta\sigma_{t-1}^2+\alpha\eta_t^2\\&=\omega+(\alpha+\beta)\sigma_{t-1}^2+\alpha(\eta_t^2-\sigma_{t-1}^2)\\&=\omega+(\alpha+\beta)\sigma_{t-1}^2+\alpha\sigma_{t-1}^2(\varepsilon_t^2-1)\end{aligned} \tag{12.2.6}$$

在(12.2.6)式的第二个等式中，$(\eta_t{}^2-\sigma_{t-1}^2)$均值为 0，以时间 $t-1$ 为条件，可被作为易变性的扰动项。系数 α 测度了不稳定扰动从这一期到下一期的扰动程度。$\alpha+\beta$ 测度了这种效度消失的速率。(12.2.6)式的第三个等式把易变性扰动项改写为 $\sigma_{t-1}^2(\varepsilon_t^2-1)$，标准正态的平方减去它的均值，即 $\chi^2(1)$随机变量——乘以过去的易变性 σ_{t-1}^2。

GARCH(1,1)模型也可根据新生量平方 η_{t+1}^2的含义写成如下形式：

$$\eta_{t+1}^2=\omega+(\alpha+\beta)\eta_t{}^2+(\eta_{t+1}^2-\sigma_t^2)-\beta(\eta_t{}^2-\sigma_{t-1}^2) \tag{12.2.7}$$

这种表达方式使人很清楚地看到 GARCH(1,1)模型就是一个新生量平方的 ARMA(1,1)模型；不过一个标准的 ARMA(1,1)模型扰动项是同方差的，而这里扰动项 $\eta_{t+1}^2-\sigma_t^2$ 是异方差的。

一致性和稳定性

在 GARCH(1,1)模型中很容易构造对多期易变性的预测。当 $\alpha+\beta<1$ 时，η_{t+1}的非条件方差，或相当于 σ_t^2 的非条件期望是$\omega/(1-\alpha-\beta)$。在(12.2.6)式中进行递归替换，利用迭代期望原理，前 j 期的易变性的条件期望是：

$$\mathrm{E}_t[\sigma_{t+j}^2]=(\alpha+\beta)^j\left(\sigma_t^2-\frac{\omega}{1-\alpha-\beta}\right)+\frac{\omega}{1-\alpha-\beta} \tag{12.2.8}$$

多期易变性预测以速度$(\alpha+\beta)$回复到它的均值。单期和多期预测的关系在一个自回归系数是$(\alpha+\beta)$的线性 ARMA(1,1)模型中是一样的。对高阶 GARCH 模型多期预测可以用类似的方式而得到。

当 $\alpha+\beta=1$ 时，前 j 期易变性的条件期望是：

$$\mathrm{E}_t[\sigma_{t+j}^2]=\sigma_t^2+j\omega \tag{12.2.9}$$

$\alpha+\beta=1$ 的 GARCH(1,1)模型有一个自回归单位根以至于今天的易变性影响到对无限远将来的易变性的预测。它因此被称作为积分 GARCH 或 IGARCH(1,1)模型。

IGARCH(1,1)过程看上去很像一个具有漂移 ω 的线性随机游走。然而，纳尔逊(Nelson，1990)指明，进行这种类比必须当心。一个线性随机游走从两方面来说是不稳定的。第一，它没有稳定的分布，因此这个过程不是严格稳定的。第二，它没有无条件的一阶或二阶矩，因此它的协方差不稳定。另一方面，在 IGARCH(1,1)模型里，σ_t^2 是严格平

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

稳的，即使它的平稳分布缺乏无条件矩。这样 IGARCH(1,1)模型是严格平稳但协方差通常未必平稳。

当 $\omega=0$ 时，尤其容易看出 IGARCH(1,1)模型有一个平衡分布，此时(12.2.9)式简化为 $\mathrm{E}_t[\sigma_{t+j}^2]=\sigma_t^2$，故易变性是鞅。同时，易变性依然是有界的，因为它不能为负。但是鞅收敛定理表明，一个有界的鞅一定收敛；此时零是其惟一的收敛值。这样 σ_t^2 的稳态分布退化成为一个聚点为 0 的退化分布，这表明 η_{t+1} 的稳态分布也在 0 退化。此时 σ_t^2 和 η_{t+1} 的平稳分布均有矩，但均为零。

当 $\omega>0$ 时，纳尔逊(Nelson,1990)指出对 σ_t^2 的确存在一个非退化的稳定分布，但是这个分布没有一个有限的均值或高阶矩。这样新生量 η_{t+1} 有一个零均值的平稳分布，但尾部很厚以至于不存在二阶或高阶矩。[①]

另一种函数形式

在标准 GARCH 模型中，用当前和过去的方差的线性组合来对将来的方差进行预测，并用收益的平方进行修正。另外一种模型，有时被称为绝对值 GARCH 模型，其对将来的标准差预测，是当前和过去标准差的线性组合，而具有绝对值的收益在预测中起着修正作用。一个绝对值 GARCH(1,1)模型，将是：

$$\sigma_t=\omega+\beta\sigma_{t-1}+\alpha\sigma_{t-1}|\varepsilon_t| \qquad (12.2.10)$$

施瓦茨(Schwert,1989)和泰勒(Taylor,1986)估计了绝对值 ARCH 模型，而纳尔逊和佛斯特(Nelson and Foster,1994)讨论了绝对值 GARCH(1,1)模型。

到目前为止，我们所考虑的模型是对称的，即正、负扰动项 ε_{t+1} 对易变性有同样的作用。然而布莱克(Black,1976)和另外一些人已经指出，在股票市场数据中存在非对称性：对股票回报负新生量比正新生量增加了更大程度的易变性。在第 12.2.3 节有对这种不对称性的解释。要处理这个问题，可以把绝对值 GARCH 模型概括成：

$$\sigma_t=\omega+\beta\sigma_{t-1}+\alpha\sigma_{t-1}f(\varepsilon_t) \qquad (12.2.11)$$

这里，

$$f(\varepsilon_t)=|\varepsilon_t-b|-c(\varepsilon_t-b) \qquad (12.2.12)$$

这里，变换参数 b 和倾斜参数 c 量度了两种不同类型的非对称。b 不受约束，但是我们需要 $|c|\leqslant 1$ 以确保 $f(\varepsilon_t)\geqslant 0$。当 $c=0$ 而 $b\neq 0$ 时，扰动项对不稳定的影响依赖于它到 b 的距离，结果是没有扰动项比有扰动项 b 增加了更多的不稳定性。当 $b=0$ 而 $c\neq 0$ 时，零扰动项对不稳定的影响是最小的，但是正、负扰动所带来的影响是有区别的；一个给定大小的扰动项正的可能比负的有更大的影响，或者反之亦然。汉茨切尔(Hentschel,1995)

---

① 纳尔逊(Nelson)证明了对 $\alpha+\beta>1$，但 $\mathrm{E}[\log(\beta+\alpha\varepsilon_t^2)]<0$ 的 GARCH(1,1)模型具有的更一般的性质。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

提出了一个很好的方法以理解(12.2.12)式，即把 $f(\varepsilon_t)$ 对 ε_t 的函数绘出，就像在图 12.3[①]中一样。图 12.3(a)表示绝对值函数($b=0,c=0$)，这和其他的每个图一样都被绘成折线。图 12.3(b)为转移绝对值函数($b=0.5,c=0$)，图 12.3(c)为倾斜绝对值函数($b=0,c=0.25$)，图 12.3(d)为一个转移且倾斜绝对值函数($b=0.5,c=-0.25$)。

汉茨切尔(Hentschel,1995)推进了(12.2.11)式，允许 $f(\varepsilon_t)$ 的幂而不是 $f(\varepsilon_t)$ 自身影响易变性，允许 σ_t 的幂而不是 σ_t 自身，成为遵循线性差分方程的变量。相应的方程是：

$$\frac{\sigma_t^{\lambda}-1}{\lambda}=\omega+\beta\left(\frac{\sigma_{t-1}^{\lambda}-1}{\lambda}\right)+\alpha\sigma_{t-1}^{\lambda}[f(\varepsilon_t)]^{\nu} \tag{12.2.13}$$

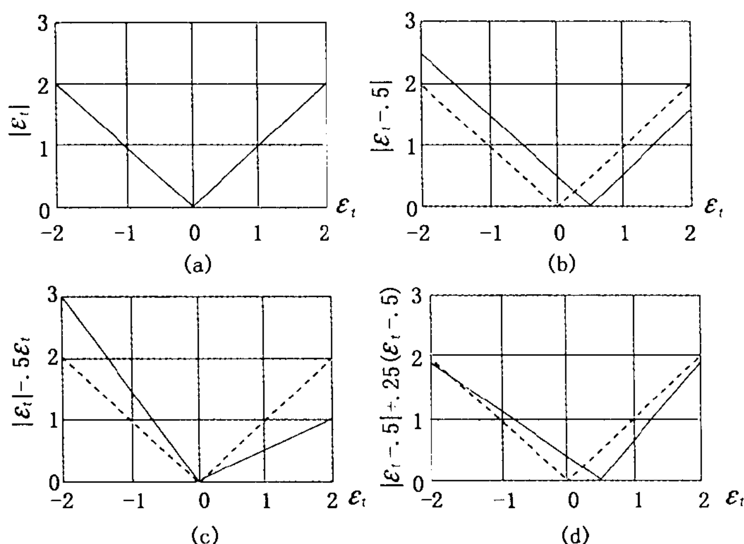


图 12.3 漂移的和有倾斜的绝对值函数

方程(12.2.13)定义了一个模型族，包括了在文献中常用的 GARCH 类型的模型。标准的 GARCH 模型令 $\lambda=\nu=2$ 且 $b=c=0$。格劳斯顿、雅格纳詹和朗克尔(Glosten, Jaganathan and Runkle,1993)已经把标准 GARCH 模型扩展到允许 c 不为零。恩格尔和纳格(Engle and Ng,1993)更是扩展到 b 也可不为零。绝对值 GARCH 模型令 $\lambda=1$，b、c 任意。(12.2.12)式家族中另一个特别重要的成员是指数 GARCH 或 EGARCH 模型，是纳尔逊(Nelson,1990)提出的，令 $\lambda=0,\nu=1,b=0$，得到：

$$\log(\sigma_t)=\omega+\beta\log(\sigma_{t-1})+\alpha[|\varepsilon_t|-c\varepsilon_t] \tag{12.2.14}$$

这个模型是吸引人的，因为它不要求任何限制参数确保回报的条件方差总是正的。而且当 $\alpha+\beta=1$ 时它变为严格非平稳和协方差非平稳，所以它不具备 IGARCH(1,1)模

① 这与帕根和施沃特(Pagan and Schwert,1990)以及恩格尔和纳格(Engle and Ng,1993)的“新闻冲击曲线”相似，其将 σ_t^2 与 η 作图，其他任何相关静态变量设定为各自的无条件均值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

型的特有的特征。另一方面，对将来方差的多期预测在 EGARCH 模型中更难计算；像(12.2.8)式那样封闭的表达形式是没有的。

估计

我们已经介绍了令人困惑的模型，要发现哪个模型更适合于金融数据，必须能估计出模型的参数，幸运的是，这对于按(12.2.13)式定义的 GARCH 和另外一些模型是很简单的。以模型参数和一个初始方差估计为条件，数据是正态分布，我们能建立一个递归似然函数。我们把模型参数向量写为 $\boldsymbol{\theta}$，定义 $\sigma_t(\boldsymbol{\theta})$ 为条件标准离差，$\varepsilon_{t+1}(\boldsymbol{\theta})\equiv\eta_{t+1}/\sigma_t(\boldsymbol{\theta})$。当 $\boldsymbol{\theta}$ 包含模型的真实参数时，$\varepsilon_{t+1}(\boldsymbol{\theta})$ 是 IID，密度函数为 $g(\varepsilon_{t+1}(\boldsymbol{\theta}))$，我们假定它为标准正态：

$$g(\varepsilon_{t+1}(\boldsymbol{\theta}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon_{t+1}(\boldsymbol{\theta})^2/2} \tag{12.2.15}$$

η_{t+1} 的条件似然对数相应是：

$$\begin{aligned}\ell_t(\eta_{t+1};\boldsymbol{\theta})&=\log(g(\eta_{t+1}/\sigma_t(\boldsymbol{\theta})))-\log(\sigma_t^2(\boldsymbol{\theta}))/2\\&=-\log(\sqrt{2\pi})-\eta_{t-1}^2/2\sigma_t^2(\boldsymbol{\theta})-\log(\sigma_t^2(\boldsymbol{\theta}))/2\end{aligned} \tag{12.2.16}$$

最后一项是雅可比(Jacobian)项，之所以出现是因为我们观察到的是 η_{t+1} 而不是 $\eta_{t+1}/\sigma_t(\theta)$。整个数据 η_1，…，η_T 的对数似然函数是：

$$\mathcal{L}(\eta_1,\cdots,\eta_T)=\sum_{t=1}^{T}\ell_t(\eta_{t+1};\boldsymbol{\theta}) \tag{12.2.17}$$

最大似然估计量就是使(12.2.17)式最大化时参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的值。①

虽然最大似然估计量的一致性很易说明，但要证明它是渐近正态却很难。难就难在这需要正则性条件，而对 GARCH 过程来讲，正则性条件难以验证。李和汉森(Lee and Hansen，1994)对 GARCH(1，1)模型给出一些结果，但是几乎再没有另外有效的结果。经验主义的研究者尤其忽略了这个问题，认为正则性条件总是起作用。一些模拟证据支持此说法。

汉茨切尔(Hentschel，1995)利用 1962～1990 年每天和每月的股票回报数据，给出了(12.2.13)式中的许多模型的最大似然估计量。要精确地估计出参数 λ 和 ν 的值，汉茨切尔发现他需要大量的日常数据。这些数据表明 λ 接近 1(就像在绝对值 GARCH 模型中一样)，但 ν 要大于 1，实际上接近 1.5。在每日和每月的数据中，汉茨切尔发现，非对称性在转移参数 b 模型中比在倾斜参数 c 模型中更好地得以体现。这样美国股票回报通过一个 GARCH 模型的条件标准离差能得到很好的描述，它是通过扰动项的绝对值变换升至二分之三次幂。不稳定过程在所有被估的模型中有高度的一致性，虽然在“二战”后一致

---

① 实际当中在(12.2.16)式中的条件仍然开始计算时需要初始的 σ_0^2。初始条件的影响随时间消失而变得可渐近忽略，从而初始条件的选择不会影响估计量的一致性。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

性的程度对模型的种类有一定的依赖性。

附加的解释变量

到目前为止我们只是运用回报的以往的数据来讨论易变性。加一些附加的解释变量将会直接明了。比如 GARCH(1,1)模型可以写为：

$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma X_t + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\eta_t^2 \qquad (12.2.18)$$

X_t 是在时刻 t 的任意变量。只要 $X_t \geqslant 0$ 和 $\gamma \geqslant 0$，这个模型仍然限制着易变性为正。相应地，你可以给 EGARCH 模型加上解释变量而没有任何符号限制。格劳斯顿、雅格纳詹和朗克尔(Glosten, Jagannathan and Runkle, 1993)对不同的 GARCH 模型加了一个短期名义利率，它对股票市场的易变性有重要的积极作用。

条件非正态性

我们所考虑的 GARCH 模型表明回报的分布，以过去的信息为条件，是正态的。相应地，这些模型的标准化残差 $\varepsilon_{t+1}(\boldsymbol{\theta}) = \eta_{t+1}/\sigma_t(\boldsymbol{\theta})$ 应该是正态的。不幸的是，在 GARCH 模型标准化的残差中，存在着趋额峰度，即使这样的 GARCH 模型的残差比实际回报表现出的峰度要小。

处理这个问题的一个方法是继续运用(12.2.16)式和(12.2.17)式所定义的条件正态似然函数，不过要将估计量解释为一个拟最大似然估计量[怀特(White, 1982)]。参数估计的标准误差可以用稳健的协方差阵估计量来计算。鲍勒斯利夫和伍尔德里奇(Bollerslev and Wooldridge, 1992)对此有所讨论。

不过，推动 GARCH 过程的扰动项的厚尾分布模型也是易于建立的。比如，鲍勒斯利夫(Bollerslev, 1987)提出一个自由度为 k 的 t 分布：

$$g(\varepsilon_{t+1}(\theta)) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)^{-1}(k-2)^{-1/2}\left(1+\frac{\varepsilon_{t+1}(\theta)}{k-2}\right)^{-(k+1)/2} \qquad (12.2.19)$$

这里 $\Gamma(\cdot)$是伽玛函数，当 k 变大时，t 分布收敛于正态分布，但有超额的峰度；事实上当 $k \leqslant 4$ 时，它的四阶矩是无限的。纳尔逊(Nelson, 1991)以类似的方式运用了一个广义误差分布，而恩格尔和戈恩扎莱兹—雷弗拉(Engle and Gonzalez-Rivera, 1991)估计了非参数误差密度。

GARCH 模型也可用广义距方法估计。当条件方差(波动)σ_t^2 可以写成过去的变量(过去收益的平方及像利息这样的附加变量)的简单的函数形式时，这是吸引人的。这个模型意味着回报的平方减去观测变量的函数与观测变量是正交的。GMM 估计优点在于，不需知道扰动项的密度。

随机波动模型

对过去信息条件下回报的非正态性，另外的一个方法就是假定有一个随机变量，回报

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在该随机变量条件下是正态的，但是这个变量——我们称之为随机波动——不是直接可观察到的。这种假定在连续时间理论模型中经常见到，资产价格服从一个带波动参数的扩散过程，而这个波动参数也服从一个扩散过程。梅利诺和特恩布尔(Melino and Turnbull，1990)以及威金(Wiggins，1987)讨论的不连续随机波动模型就是这种过程的自然近似。如果我们把不连续随机波动过程参数化，那么将有一个过滤问题：把观测到的数据加工成推动随机波动的估计参数，在每个时点上估计波动的水平。

一个简单的随机波动模型如下：

$$\eta_t=\varepsilon_t e^{\alpha_t/2},\alpha_t=\phi\alpha_{t-1}+\xi_t \tag{12.2.20}$$

这里，$\varepsilon_t\sim\mathcal{N}(0,\sigma_\varepsilon^2)$，$\xi_t\sim\mathcal{N}(0,\sigma_\xi^2)$，并且我们假定 ε_t 与 ξ_t 序列不相关和互相独立。这里，α_t 表示一定条件下收益标准差的对数和它的均值的差；它服从零均值的 AR(1)过程，我们可对回报平方，然后取对数，得到：

$$\log(\eta_t^2)=\alpha_t+\log(\varepsilon_t^2),\alpha_t=\phi\alpha_{t-1}+\xi_t \tag{12.2.21}$$

这在线性状态空间形式，只不过(12.2.21)式的第一个方程的误差项是 $\log\chi^2$ 分布而不是一个正态分布。要理解非正态性的重要性，只需考虑当 ε_t 非常接近于零时(一个正常值)，$\log(\varepsilon_t^2)$是个非常大的负异常值。

此方程有好几种估计方法。梅利诺和特恩布尔(Melino and Turnbull，1990)和威金(Wiggins，1987)使用的是 GMM 估计量。虽然这很直观，却不是很有效。哈维、鲁伊斯和谢波德(Harvey，Ruiz and Shephard，1994)提出了一个拟最大似然估计量。近来，杰奎尔、波尔松和罗西(Jacquier，Polson and Rossi，1994)提出了贝叶斯方法，谢波德和基姆(Shephard and Kim，1994)建议用基于模拟的精确最大似然估计量。

12.2.2 多变量模型

迄今我们只是考虑了单一资产回报的易变性。更一般地，我们可能会有一个资产回报的向量，其条件协方差阵随时间而变化。假设我们有 N 个资产，回报新生量 $\eta_{i,t+1}$，$i=1,\cdots,N$我们把这些新生量写成一个向量 $\boldsymbol{\eta}_{t+1}=[\eta_{1,t+1}\cdots\eta_{N,t+1}]'$，定义 $\sigma_{ii,t}=\mathrm{Var}_t(\eta_{i,t+1})$，$\sigma_{ij,t}=\mathrm{Cov}_t(\eta_{i,t+1},\eta_{j,t+1})$；因此 $\boldsymbol{\Sigma}_t=[\sigma_{ij,t}]$是所有回报的条件协方差阵。把 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ 的非冗余元素——那些在主对角线及其以下的元素写成向量常常会带来方便。这种把向量码起来的算子被称为向量化算子，记为 VECH：VECH($\boldsymbol{\Sigma}_t$)是一个有 $N(N+1)/2$ 个元素的向量。

多元 GARCH 模型

在单变量中我们的许多想法可以很自然地转用到多元的情形中去。最简单的推广就是把 GARCH(1,1)模型，与 vech($\boldsymbol{\Sigma}_t$)和 vech($\boldsymbol{\eta}_t\boldsymbol{\eta}'_t$)、vech($\boldsymbol{\Sigma}_{t-1}$)联系起来：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\text{vech}(\mathbf{\Sigma}_t)=\boldsymbol{\omega}+\overline{\mathbf{\Psi}}\text{vech}(\mathbf{\Sigma}_{t-1})+\mathbf{\Lambda}\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_t\boldsymbol{\eta}'_t) \tag{12.2.22}$$

这里，$\boldsymbol{\omega}$ 是个有 $N(N+1)/2$ 个元素的向量，$\mathbf{\Psi}$ 和 $\mathbf{\Lambda}$ 均是 $N(N+1)/2\times N(N+1)/2$ 的矩阵，因此在这个模型中参数的总数是 $N^2(N+1)^2/2+N(N+1)/2$，以 N 的 4 次幂增长。很显然这个模型很快将变得难以处理。因此许多关于多元 GARCH 模型的文献都去寻找对(12.2.22)式的合理的限制，来减少参数的个数。文献的另一个目标是寻找确保协方差阵正定的限制条件。这样的约束条件在单变量情形中相当直观——例如，在一个单变量 GARCH(1,1)模型中，所有的参数必须为正——但是在一个多变量的模型中却没如此直观。

克洛纳和纳格(Kroner and Ng，1993)对主要的多元 GARCH 模型进行了一次很好的考察。第一，鲍勒斯利夫、恩格尔和伍尔德里奇(Bollerslev，Engle and Wooldridge，1988)的 VECH 模型，把协差阵写为一套单变量 GARCH 模型。$\mathbf{\Sigma}_t$ 的每个元素都服从一个单变量 GARCH 模型，该模型被相应的叉乘矩阵的元素 $\eta_t\eta'_t$ 驱动。$\mathbf{\Sigma}_t$ 的(i,j)元素以下式给出：

$$\sigma_{ij,t}=\omega_{ij}+\beta_{ij}\sigma_{ij,t-1}+\alpha_{ij}\eta_{it}\eta_{jt} \tag{12.2.23}$$

这个模型可从(12.2.22)式得到，使矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 和 $\mathbf{\Psi}$ 对角化即可。如果参数矩阵$[\omega_{ij}]$，$[\beta_{ij}]$和$[\alpha_{ij}]$均为正定，那么条件协方差阵正定。对 $\mathbf{\Sigma}_t$ 的每个元素该模型有 3 个参数，这样总共有 $3N(N+1)/2$ 个参数。

第二，恩格尔和克洛纳(Engle and Kroner，1995)的 BEKK 模型(该模型是在鲍勒斯利夫、恩格尔、克拉夫特和克洛纳的工作论文稍前之后命名的)，利用二次型而不是 $\mathbf{\Sigma}_t$ 的单个元素来确保其正定性。该模型是：

$$\mathbf{\Sigma}_t=\mathbf{C}'\mathbf{C}+\mathbf{B}'\mathbf{\Sigma}_{t-1}\mathbf{B}+\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta}_t\boldsymbol{\eta}'_t\mathbf{A} \tag{12.2.24}$$

这里，$\mathbf{C}$ 是个下三角阵，有 $N(N+1)/2$ 个参数，$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 均为有 N^2 参数的方阵，总的参数个数是$(5N^2+N)/2$。对 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 的较弱约束就能保证 $\mathbf{\Sigma}_t$ 总为正定。

BEKK 模型的一个特殊的例子是恩格尔、纳格和罗思柴尔德(Engle，Ng and Rothschild，1990)的单因子 GARCH(1,1)模型。在这个模型里，我们定义 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\mathbf{w}$ 是向量，α 和 β 是标量，有：

$$\mathbf{\Sigma}_t=\mathbf{C}'\mathbf{C}+\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}'[\beta\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_{t-1}\mathbf{w}+\alpha(\mathbf{w}'\boldsymbol{\eta}_t)^2] \tag{12.2.25}$$

这里 $\mathbf{C}$ 的约束条件和前面的方程一样。我们可以对这个模型加个标准化约束；令 $\boldsymbol{\iota}'\mathbf{w}=1$，$\boldsymbol{\iota}$ 是个向量。这样向量 $\mathbf{w}$ 可以被看作投资组合权数向量。我们定义 $\eta_{pt}=\mathbf{w}'\boldsymbol{\eta}_t$，$\sigma_{pp,t}=\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}_t\mathbf{w}$，该模型可以写为：

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,t}&=\omega_{ij}+\lambda_i\lambda_j\sigma_{pp,t}\\ \sigma_{pp,t}&=\omega_{pp}+\beta\sigma_{pp,t-1}+\alpha\eta_{p,t}^2\end{aligned} \tag{12.2.26}$$

任意两个资产回报的协方差随时间移动时，与之伴随变动的只有投资组合回报的方差，而该方差也服从一个单变量 GARCH(1,1)模型。单因子 GARCH(1,1)模型是

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

BEKK 模型矩阵 **A**、**B** 秩为 1 时的特例：$\mathbf{A}=\sqrt{\alpha}\mathbf{w}\boldsymbol{\lambda}'$，$\mathbf{B}=\sqrt{\beta}\,\mathbf{w}\boldsymbol{\lambda}'$ 它有 $(N^2+5N+2)/2$ 个自由参数。这个模型可以直接扩展到多因子或高阶 GARCH 结构。

最后，鲍勒斯利夫(Bollerslev, 1990)提出了一个不变相关模型，每一个资产回报方差遵循一个单变量 GARCH(1,1)模型，任意两个资产的协方差等于不变相关系数乘以回报的条件标准差：

$$\sigma_{ii,t}=\omega_{ii}+\beta_{ii}\sigma_{ii,t-1}+\alpha_{ii}\eta_{it}^2$$

$$\sigma_{ij,t}=\rho_{ij}\sqrt{\sigma_{ii,t}\sigma_{jj,t}} \tag{12.2.27}$$

这个模型有 $N(N+5)/2$ 个参数，只要相关系数 ρ_{ij} 能够形成一个有定义相关距阵，并且参数 ω_{ii}，α_{ii} 和 β_{ii} 均为正，它的方差矩阵必正定。

要理解这些模型间的差别，考虑两个资产回报在两个相反的因素作用之后有较大的扰动时的条件方差的变化状况是很有意义的。在正数系数 α_{ij} 的 VECH 模型中，负的叉乘 $\eta_{it}\eta_{jt}$ 降低条件方差。另一方面，在不变相关模型中，$\eta_{it}\eta_{jt}$ 的符号是无关紧要的；任何能增加两个正相关资产方差的量也增大它们之间的协方差。在因子 ARCH 模型中 $\sigma_{ij,t}$ 只随着 $\sigma_{pp,t}$ 移动，所以一个负的叉乘 $\eta_{it}\eta_{jt}$ 的作用依赖于投资组合 p 的权数。

像在单变量情形中一样，回报的波动可能与多元 GARCH 模型一致。多元模型中允许一些资产的波动共享其中普遍一致的成分；例如，可能在一系列的波动中有一个一致的成分，这样一个波动的变化对另一个波动是传递性的。鲍勒斯利夫和恩格尔(Bollerslev and Engle, 1993)探讨了这个想法，这与文献中关于线性单位根过程的协整性概念是类似的。

多元随机波动模型

(12.2.19)式所给的单变量随机波动模型也很容易扩展到多元的情形，有：

$$\boldsymbol{\eta}_t=\boldsymbol{\varepsilon}_t e^{\boldsymbol{\alpha}_t/2}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_{t-1}+\boldsymbol{\xi}_t \tag{12.2.28}$$

这里，$\boldsymbol{\eta}_t$，$\boldsymbol{\varepsilon}_t$，$\boldsymbol{\alpha}_t$ 和 $\boldsymbol{\xi}_t$ 是 $N\times1$ 向量，$\boldsymbol{\Phi}$ 是个$(N\times N)$矩阵，这个模型在矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 中有 N^2 个参数，在协差阵 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 中有 $N(N+1)/2$ 个参数，在协差阵 $\boldsymbol{\eta}_t$ 中有 $N(N+1)/2$ 个参数，故总的参数共有 $N(2N+1)$。不需要约束 $\boldsymbol{\alpha}_t$ 为正，并可直接估计 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$，$\boldsymbol{\eta}_t$ 协方差参数，运用平方根形式是为了确保协方差阵为正定矩阵。哈维、鲁伊斯和谢波德(Harvey, Ruiz and Shephard, 1994)建议附加约束条件，使 $\boldsymbol{\Phi}$ 对角化(参数个数减少到 $N(N+2)$或干脆化为单位矩阵(进一步把参数个数减到 $N(N+1)$)。

即使没有这些额外的约束，理解(12.2.28)式施加了资产回报的不变条件相关也是很重要的。在这一方面它和鲍勒斯利夫(Bollerslev, 1990)的不变相关 GARCH 模型的约束是一样的，只是当 $N>3$ 时，它比那个模型有更多的参数。

一个条件市场模型

到目前为止我们所讨论的模型中，即使有最多约束的模型也难以应用到大的横截面

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

数据，因为它们的参数的数目随着资产数 N 的平方的增加而增加。问题在于，这些模型以整个的回报的条件协方差阵为研究对象。另外一种方法，与静态均值——方差分析的早期发展相平行，是利用条件市场模型。依然忽略回报的非零均值，写作为：

$$\eta_{i,t+1}=\beta_{it}\eta_{m,t+1}+\zeta_{i,t+1} \tag{12.2.29}$$

这里，$\beta_{it}\equiv\sigma_{im,t}/\sigma_{mm,t}$，是市场资产 i 的条件 β 值。$\zeta_{i,t+1}$ 是个被假定为资产间不相关的特殊冲击项，在这个框架内，我们可以像单变量 GARCH(1,1)过程那样建立市场收益的条件方差 $\sigma_{mm,t}$ 的模型；我们可以依靠 $\sigma_{mm,t}$，$\beta_{im,t-1}$ 来建立 $\beta_{im,t}$ 或 $\sigma_{im,t}$ 的模型，这里 η_{it} 和 η_{mt} 是收益；我们也可以把收益的特殊冲击项的条件方差建模成为另一个单变量 GARCH(1,1)过程。这种类型的模型的协方差阵是正定的，模型中的参数的数目的增长速度是 N 而不是 N^2，这一点使模型适用于更大数量的资产。布劳恩、纳尔逊和森尼尔(Braun, Nelson and Sunier, 1995)运用这种方法，对模型中的每个元素采用 EGARCH 函数形式。

12.2.3 一阶矩和二阶矩的联系

在时间序列中我们已经复习了一些极为复杂的时变二阶矩阵模型，它的一阶矩假定为常数和零。但是金融理论的精髓是使资产回报的一阶矩和二阶矩联系起来。相应地我们讨论一些模型，其回报的条件均值会随条件方差和协方差的变化而变化。

GARCH-M 模型

恩格尔、利莲恩和罗宾斯(Engle、Lilien and Robins, 1987)提出对基本单变量模型(12.2.2)式加上一个时变截距。r_{t+1} 写为一个连续的复合的资产回报，是利息的时间序列(因为我们已不用零均值新生量)，有：

$$r_{t+1}=\mu_t+\sigma_t\varepsilon_{t+1}, \qquad \mu_t=\gamma_0+\gamma_1\sigma_t^2 \tag{12.2.30}$$

ε_{t+1} 像以前一样是个 IID 随机变量，σ_t^2 能遵循任何 GARCH 过程。这种均值 GARCH 或 GARCH-M 模型使回报的条件均值在条件方差上是线性的。它能用最大似然法很直观地估计，虽然并不知道模型是否满足最大似然估计量的渐近正态性的正则性条件。

只要条件均值在条件标准差而不是条件方差上是线性的，GARCH-M 模型也是可以确定的。它已经被鲍勒斯利夫、恩格尔和伍尔德里奇(Bollerslev, Engle and Wooldridge, 1988)及另外的一些人一般化为多元的情形，但是参数的个数随着回报而快速地增长，并且模型通常只用于很少一些资产。

工具变量方法

针对 GARCH-M 模型，坎贝尔(Campbell, 1987)和哈维(Harvey, 1989, 1991)提出另外一种方法。他们指出，可利用 GMM 估计参数来连接一阶矩和二阶矩。这些作者以一

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

个“市场”回报模型作为研究的出发点，这种市场回报使预期市场回报关于其自身方差是线性的，方差是以某一向量 $\mathbf{H}_t$ 为条件，包含 L 个工具或预测变量：

$$\mathrm{E}[r_{m,t+1} \mid \mathbf{H}_t] = \gamma_0 + \gamma_1 \mathrm{Var}[r_{m,t+1} \mid \mathbf{H}_t] \tag{12.2.31}$$

坎贝尔和哈维假定回报的条件期望在工具变量和定义误差上是线性的：

$$u_{m,t+1} \equiv r_{m,t+1} - \mathbf{H}_t \mathbf{b}_m$$
$$e_{m,t+1} \equiv r_{m,t+1} - \gamma_0 - \gamma_1 (r_{m,t+1} - \mathbf{H}_t \mathbf{b}_m)^2 \tag{12.2.32}$$

这里，$\mathbf{b}_m$ 是市场回报对工具变量的回归向量。误差 $u_{m,t+1}$ 是市场回报和工具变量的线性组合的差，而误差 $e_{m,t+1}$ 是市场回报和 $u_{m,t+1}^2$ 的线性函数的差。模型(12.2.31)表明，误差 $u_{m,t+1}$ 和 $e_{m,t+1}$ 均和工具变量 $\mathbf{H}_t$ 正交。有 L 个工具变量，就有 $2L$ 个正交性条件可用来估计$(L+2)$个参数(γ_0，γ_1 和 $\mathbf{b}_m$ 中的 L 个系数)。这样 GMM 既给出参数估计，又进行了模型的过度识别约束检验。

这种方法很容易推广到包括另外一些资产的情况，它们的期望回报以下式给出：

$$\mathrm{E}[r_{i,t+1} \mid \mathbf{H}_t] = \gamma_0 + \gamma_1 \mathrm{Cov}[r_{i,t+1}, r_{m,t+1} \mid \mathbf{H}_t] \tag{12.2.33}$$

如果有 N 个这样的资产，我们定义一个向量 $\mathbf{r}_{t+1} \equiv [r_{1,t+1}, \cdots, r_{N,t+1}]'$。$\mathbf{r}_{t+1}$ 的条件期望 $\mathrm{E}[\mathbf{r}_{t+1} \mid \mathbf{H}_t] = \mathbf{H}_t \mathbf{B}$，$\mathbf{B}$ 是个有 NL 个系数的矩阵。我们定义误差：

$$\mathbf{u}_{t+1} \equiv \mathbf{r}_{t+1} - \mathbf{H}_t \mathbf{B}$$
$$\mathbf{e}_{t+1} \equiv \mathbf{r}_{t+1} - \gamma_0 - \gamma_1 (\mathbf{r}_{t+1} - \mathbf{H}_t \mathbf{B})(r_{m,t+1} - \mathbf{H}_t \mathbf{b}_m) \tag{12.2.34}$$

我们得到 $2NL$ 个额外的正交性条件去识别 $NL+1$ 个额外的参数。在(12.2.33)式和(12.2.34)式中正交性条件的总数是 $2(N+1)L$，参数的总数是 $N(L+1)+L+2$。这样不论什么时候只要有两个或更多的工具变量可利用，模型就是可以识别的。

哈维(Harvey，1989)考虑了风险的时变价格，推广了模型，他以下式替换(12.2.33)式：

$$\mathrm{E}[r_{i,t+1} \mid \mathbf{H}_t] = \gamma_0 + \gamma_{1t} \mathrm{Cov}[r_{i,t+1}, r_{m,t+1} \mid \mathbf{H}_t] \tag{12.2.35}$$

这里，γ_{1t} 随着时间而变化，但对所有的资产是普遍的。因为(12.2.35)式表示市场自身的投资组合，

$$\gamma_{1t} = \frac{\mathrm{E}[r_{m,t+1} \mid \mathbf{H}_t] - \gamma_0}{\mathrm{Var}[r_{m,t+1} \mid \mathbf{H}_t]} \tag{12.3.36}$$

哈维运用此式去估计模型，把(12.2.36)式代入(12.2.35)式，乘以 $\mathrm{Var}[r_{m,t+1} \mid \mathbf{H}_t]$，利用 $\mathrm{E}[r_{m,t+1} \mid \mathbf{H}_t] = \mathbf{H}_t \mathbf{b}_m$ 和 $\mathrm{E}[\mathbf{r}_{t+1} \mid \mathbf{H}_t] = \mathbf{H}_t \mathbf{B}$ 建立了一个新的误差向量：

$$\mathbf{v}_{t+1} = (r_{m,t+1} - \mathbf{H}_t \mathbf{B}_m)^2 (\mathbf{H}_t \mathbf{B} - \gamma_0 \boldsymbol{\iota}) - (\mathbf{r}_{t+1} - \mathbf{H}_t \mathbf{B})(r_{m,t+1} - \mathbf{H}_t \mathbf{b}_m)(\mathbf{H}_t \mathbf{b}_m - \gamma_0) \tag{12.2.37}$$

哈维用(12.2.37)式的 $\mathbf{v}_{t+1}$ 代替(12.2.34)式中的 $\mathbf{e}_{t+1}$，删去(12.2.32)式中的误差项 $e_{m,t+1}$。这样就减少了 L 个正交性条件，减少了一个待估参数(因为 γ_1 从模型中删去)过度识别约束数减少了 $L-1$。哈维(Harvey，1989)发现了一些迹象，即美国股票指数作为市场投资组合时，风险价格会改变；然而他也排斥了模型的过度识别约束。哈维(Harvey，1991)运用一个世界股票指数作为市场投资组合，得到了类似的结论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

条件 CAPM 和无条件 CAPM

方程(12.2.35)和方程(12.2.36)可以改写为：

$$E[r_{i,t+1}|\mathbf{H}_t]=\gamma_0+\beta_{it}\lambda_t \tag{12.2.38}$$

这里，$\beta_{it}\equiv \mathrm{Cov}[r_{i,t+1},r_{m,t+1}|\mathbf{H}_t]/\mathrm{Var}[r_{m,t+1}|\mathbf{H}_t]$，具有市场收益的资产 i 的条件 β 值，$\lambda_t\equiv E[r_{m,t+1}|\mathbf{H}_t]-\gamma_0$，关于市场无风险收益的期望超额收益。

杰根纳森和万(Jagannathan and Wang，1996)强调指出，CAPM 的这个条件形式不需包含第 5 章所讨论的非条件 CAPM。如果我们取(12.2.38)式的无条件期望，有：

$$E[r_{i,t+1}]=\gamma_0+(E[\beta_{it}])(E[\lambda_t])+\mathrm{Cov}(\beta_{it},\lambda_t) \tag{12.3.39}$$

这里，$E[\lambda_t]$是对市场的超额回报的无条件期望。$E[\beta_{it}]$是条件 β 的无条件期望，不一定和无条件 β 一样，虽然差别一般很小。最重要的是，条件 β 和市场超额回报期望的协方差出现在(12.2.39)式中。市场风险金高且 β 值也高的资产，其回报的条件期望将比用无条件 CAPM 预测的要高。雅格纳詹和万(Jagannathan and Wang，1996)认为，小额股票却有较高的平均回报，或许可以通过这种效用来解释，即股票市场预期的超额回报高时，小额股票的 β 值通常在上升。他们虽然没有直接建立小额股票 β 值的时变模型，却为这一说法提出了一些间接的证据。

波动新生量和回报新生量

以经验为根据的研究者找不到什么证据来证明在股票回报中，波动高的时期就是预期高的时期。一些论文为这种关系提供了微弱的证据[见鲍勒斯利夫、恩格尔和伍尔德里奇(Bollerslev，Engle and Wooldridge，1988)，弗兰切、施瓦茨和斯坦博(French，Schwert and Stambaugh，1987)以及哈维(Harvey，1989)]。但另外一些论文应用短期名义利率作为工具发现了回报的均值和不稳定负相关[见坎贝尔(Campbell，1987)，格劳斯顿、雅格纳詹和朗克尔(Glosten，Jaganathan and Runkle，1993)]。

弗兰切、施瓦茨和斯坦博(French，Schwert and Stambaugh，1987)强调，有强有力的证据表明，波动的正新生量和回报的负新生量是相关的。我们已经讨论了非对称 GARCH 模型怎样符合这种相关。在更深的水平上，它可以有两种解释，一种可能性是回报的负的扰动项增大了波动。杠杆假说最初是由布莱克(Black，1976)提出，他认为以杠杆为支柱的公司总值下跌时，以出售股票而得到资金值在总额中所占份额变小。因为出售股票所得的资金承担着公司的全部风险，这部分资金不稳定的比例应该上升，即使一个公司不是财务上以债务为支撑，也可能发生这个公司对工人或供给者有固定的债务。虽然这里面有一些合理的成分，却很难用真实杠杆估计解释收益不稳定相关的程度[见克里斯蒂(Christie，1982)和施瓦茨(Schwert，1989)]。

另外一种解释是因果律在起作用：对波动正的冲击会降低回报。坎贝尔和汉茨切尔

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

(Campbell and Hentschel,1992)称之为不稳定反馈假说。如果波动增加，回报的预期扰动也增加。并且如果预期股息不变，那么波动增加时，股票价格应当降低。坎贝尔和汉茨切尔利用(7.2.26)式回报的对数线性近似值建立一个正式的模型：

$$r_{t+1}=\mathrm{E}_t[r_{t+1}]+\eta_{d,t+1}-\eta_{r,t+1} \tag{12.2.40}$$

这里，

$$\eta_{d,t+1}\equiv \mathrm{E}_{t+1}[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\Delta d_{t+1+j}]-\mathrm{E}_t[\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\Delta d_{t+1+j}]$$

是在(7.2.25)式中未来股息期望的变化值，并且：

$$\eta_{r,t+1}\equiv \mathrm{E}_{t+1}[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}]-\mathrm{E}_t[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}]$$

是对未来收益期望的变化值。

坎贝尔和汉茨切尔把股息变量 $\eta_{d,t+1}$ 建模成为一个零均值的 GARCH(1,1)过程：$\eta_{d,t+1}\sim\mathcal{N}(0,\sigma_t^2)$，$\sigma_t^2=\omega+\beta\sigma_{t-1}^2+\alpha\eta_{dt}^2$。① 他们在建模中让回报的期望关于股息的方差是线性的：$\mathrm{E}_t[r_{t+1}]=\gamma_0+\gamma_1\sigma_t^2$。这些假定意味着对将来回报的期望的修正值是现在不稳定扰动项($\eta_{d,t+1}^2-\sigma_t^2$)的倍数：

$$\begin{aligned}\eta_{r,t+1}&=\mathrm{E}_{t+1}[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}]-\mathrm{E}_t[\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t+1+j}]\\&=\theta(\eta_{d,t+1}^2-\sigma_t^2)\end{aligned} \tag{12.2.41}$$

这里，$\theta=\gamma_1\rho\alpha/(1-\rho(\alpha+\beta))$。当 γ_1 大(回报的期望稳定地随波动变动)、α 大(扰动项满足未来波动)，并且当 $\alpha+\beta$ 大时(波动冲击与回报的期望一致时)，系数 θ 也大，替换到(12.2.40)式中，回报项包含的过程是：

$$r_{t+1}=\gamma_0+\gamma_1\sigma_t^2+\eta_{d,t+1}-\theta(\eta_{d,t+1}^2-\sigma_t^2) \tag{12.2.42}$$

这不是一个 GARCH 过程，而是一个 GARCH 过程的一个二次型函数。它意味着回报是负偏斜的，因为一个大的负实现 $\eta_{d,t+1}$ 将被二次项放大，而大的正实现将被二次项降低。直觉上，任何一种符号的冲击都会提高对未来波动的预期并因此提高回报要求，这会降低今天的股票回报。相反地，“没有消息就是好消息”；如果 $\eta_{d,t+1}=0$，这将降低对将来波动的预期，提高今天的股票回报。坎贝尔和汉茨切尔在估计(12.2.42)式时比在估计一个标准 GARCH-M 模型时对风险为 γ_1 的正价格发现了许多更有力的证据。他们的结论表明波动反馈作用和杠杆作用对股票市场不稳定的非对称行为均有影响。

① 事实上他们使用了森塔那(Sentana,1991)的二次型 GARCH 或 QGARCH 一类更一般的非对称模型，使得即便在没有收益易变性反馈信息出现的时候也能用模型拟合非对称性。当然，这个基本想法用标准 GARCH 模型来说明就显得更简单。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

12.3 非参数估计

在有些金融运用中，我们只能得到两个变量 X、Y 的函数关系，而不能通过结构模型来限制这种关系的参数形式。在这种情况下，我们可运用非参数估计技术，在不求助于任何对这种非线性关系的专门假定时，获得较宽的非线性变化。比起在第 12.1 节和第 12.2 节中描述的相对高度结构化或参数化的估计非线性问题的方法，非参数估计对非线性的性质不要求什么假定。然而，其缺点是非参数估计具有高度数据敏感性且一般对小样本无效。而且非参数估计特别易于导致过度拟合。这是一个不太容易通过统计方法克服的问题(见第 12.5 节)。

也许用的最多的是平滑估计法。在这种方法中，观测误差可以通过成熟的数据平均方法得以减少。核回归、正交级数展开、投影寻踪、最近邻域估计量、平均导数估计量、曲线尺度和人工神经网络都是平滑方法的例子。为了理解为什么做这样的平均，假定我们要估计变量 X_t 和 Y_t 的关系，X_t 和 Y_t 满足关系式：

$$Y_t = m(X_t) + \varepsilon_t, \qquad t=1,\cdots,T \tag{12.3.1}$$

其中，$m(\cdot)$是一未知的、随意固定的非线性函数，$\{\varepsilon_t\}$是一零均值的 IID 过程。

考虑在某一特定日 t_0 估计 $m(\cdot)$，有 $X_{t_0}=x_0$，又假定对于观测值 Y_{t_0}，可获得变量 Y_{t_0} 的独立的重复观测值 $Y_{t_0}^1=y_1,\cdots,Y_{t_0}^n=y_n$。那么在点 x_0 处，函数 $m(\cdot)$的一个自然估计是：

$$\hat{m}(x_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[m(x_0)+\varepsilon_t^i] \tag{12.3.2}$$

$$= m(x_0) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_t^i \tag{12.3.3}$$

根据大数定理，对于一个很大的 n，(12.3.3)式中第二项可忽略。

当然，如果$\{Y_t\}$是一时间序列，我们不可能对一给定的 X_t 进行重复观测。然而，如果假定 $m(\cdot)$充分平滑，那么对于值 x_0 附近的时间序列观测值 X_t，Y_t 的相应值一定靠近 $m(x_0)$。换句话说，如果 $m(\cdot)$充分平滑，那么在 x_0 的一个小的邻域中，$m(x_0)$几乎固定不变，并且可以通过对 x_0 附近的 X_t 序列所对应的 Y_t 序列的值取平均来估计 $m(x_0)$。X_t 序列的值离 x_0 越近，相应的 Y_t 序列的值平均离 $m(x_0)$越近。这证明了对于 Y_t 序列的加权平均，当 X_t 离 x_0 越远，相应的 Y_t 的权数越小。通过加权平均估计 $m(x)$，其本质就是平滑。更规范一点，则对任意 x 的平滑估计可以表示成：

$$\hat{m}(x) \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\omega_{t,T}(x)Y_t \tag{12.3.4}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中，离 x 近的 X_t 对应的 Y_t 有大的权重$\{\omega_{t,T}(x)\}$，离 x 远的 X_t 对应的 Y_t 有小的权重$\{\omega_{t,T}(x)\}$。

为了完成这样的估计过程，我们必须定义什么是“近”，什么是“远”。如果选择一个过大的 x 的邻域来计算平均值，加权平均将太平滑，而不能展现 $m(\cdot)$的真正的非线性。如果选择的 x 的邻域过小，加权平均值将会过分易变，反映了 $m(\cdot)$的变异和噪音，因此，必须仔细选择权数$\{\omega_{t,T}(x)\}$在两者之间取得平衡。我们将在第 12.3.1 节至第 12.3.3 节以及第 12.3.5 节中进一步论述这一问题和其他相关问题。

12.3.1 核回归

估计 $m(\cdot)$的一个重要的平滑技术就是核回归。在核回归模型中，权重函数 $\omega_{t,T}(x)$ 由概率密度函数 $K(x)$构造出来，称为核：

$$K(x)\geqslant 0,\qquad \int K(u)du=1 \tag{12.3.5}$$

尽管 $K(x)$是概率密度函数，但它在随后的分析中并不起概率的作用，它仅仅是计算加权平均的一个方便的办法，并不意味着 X 服从 $K(x)$分布（否则就是一个参数假设）。

如果定义：

$$K_h(u)\equiv\frac{1}{h}K(u,/h),\int K_h(u)du=1 \tag{12.3.6}$$

通过改变 $h(h>0)$，可以改变核的范围，现在我们可以定义加权平均(12.3.4)式中的权重为：

$$\omega_{t,T}(x)\equiv K_h(x-X_t)/g_h(x) \tag{12.3.7}$$

$$g_h(x)\equiv\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}K_h(x-X_t) \tag{12.3.8}$$

如果 h 很小，平均将限于每个 X_t 的一个相当小的邻域；如果 h 很大，平均将在 X_t 的一个比较大的邻域进行。因此，通过调整平滑参数 h，也称为窗宽①，来控制平均数量的程度。将(12.3.8)式代入(12.3.4)式，得 $m(x)$的纳达拉雅沃特森的核估计 $\hat{m}_h(x)$：

$$\hat{m}_h(x)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\omega_{t,T}(x)Y_t=\frac{\sum_{t=1}^{T}K_h(x-X_t)Y_t}{\sum_{t=1}^{T}K_h(x-X_t)} \tag{12.3.9}$$

随着样本容量的增加，在对核 K 的形状和权重大小的某些规则条件下，$\hat{m}_h(x)$也许会渐近地以不同方式收敛于 $m(x)$[见哈德尔(Härdle，1990)详述]。很多类型的核有这种收敛的性质，但在本章的后面部分的例子中，我们将采用最常用的高斯(Gaussian)核：

---

① 在第 12.3.2 节将进一步讨论如何选择合适的窗宽。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$K_h(x)=\frac{1}{h\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \tag{12.3.10}$$

一个核回归的图例说明

为了说明核回归在解非线性关系中的作用，我们对人工数据集采用平滑技术处理，这个数据集由蒙特卡罗模拟得来。记 500 个顺序观测值为$\{X_t\}$，它们以均匀间隔增量分布在 0 与 2π 之间，$\{Y_t\}$通过下面非线性关系与$\{X_t\}$关联：

$$Y_t=\mathrm{Sin}(X_t)+0.5\varepsilon_t \tag{12.3.11}$$

其中，$\{\varepsilon_t\}$是 IID 伪随机标准正态变数序列。通过核回归方法，用模拟数据$\{X_t,Y_t\}$（见图 12.4），我们试图估计出条件期望值 $E[Y_t|X_t]=\mathrm{Sin}(X_t)$。为此，对这些数据我们用高斯核进行纳达拉雅沃特森估计，并在 $0.1\hat{\sigma}_x$ 和 $0.5\hat{\sigma}_x$ 之间调整窗宽参数 h。其中 $\hat{\sigma}_x$ 是$\{X_t\}$的样本标准差，通过以标准差为单位改变 h，可隐性地使解释变量$\{X_t\}$按其自身的标准差被标准化。如公式(12.3.10)所示。

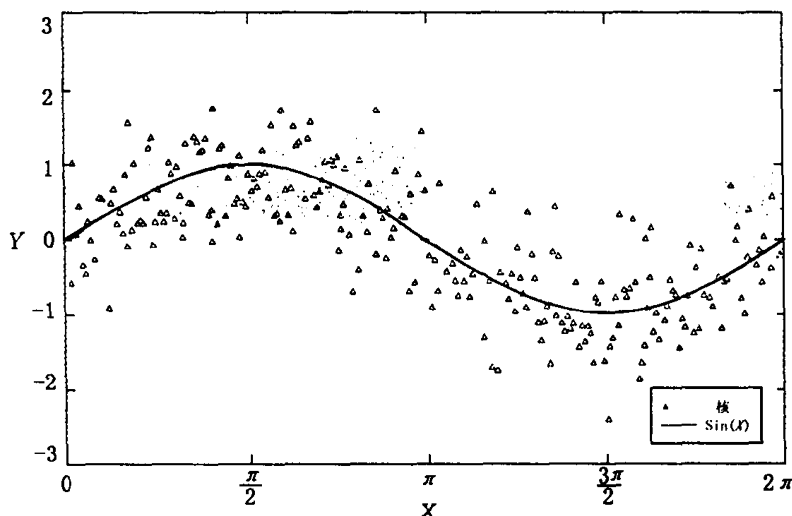
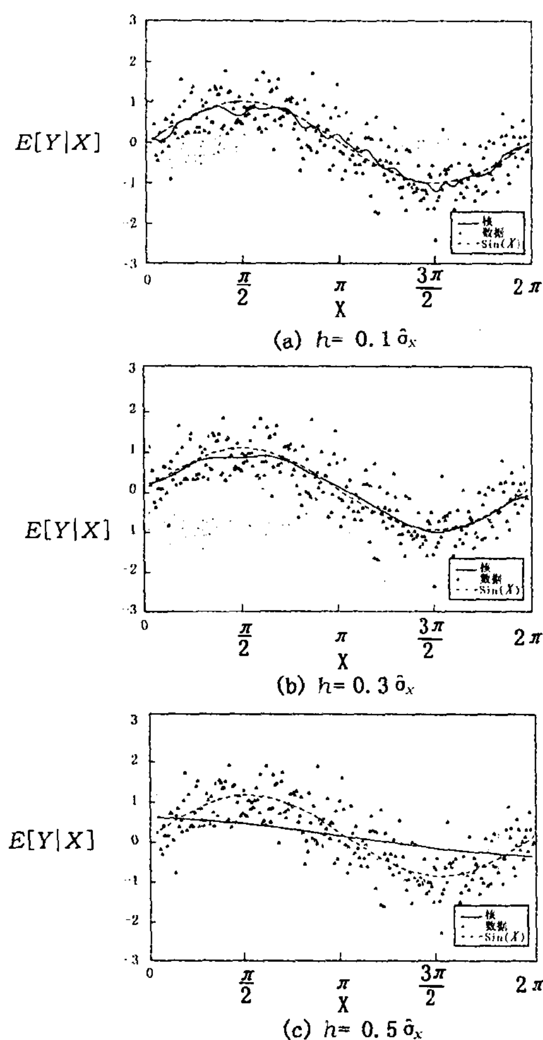


图 12.4 $Y_t=\mathrm{Sin}(X_t)+0.5\varepsilon_t$ 的模拟

对于不同的 h，我们在图 12.5 的(a)～(c)中，画出了作为 X_t 函数的核估计。注意对于 $0.1\hat{\sigma}_x$ 的窗宽，核估计波动大，不光滑。因为窗宽太小，不能提供足够的区域平均来达到 $\mathrm{Sin}(X_t)$。核估计确实反映了数据的周期性，但它也受到了来自噪音的偏扰。这种偏扰可以通过增加窗宽从而扩大区域平均的范围来减少。

图 12.5 中的(b)显示了一个带宽为 $0.3\hat{\sigma}_x$ 的核估计，这个核估计平滑多了，且更符合真实的条件期望。随着窗宽的提高，区域平均的范围不断变宽，核估计的变化性(作为 x 的函数)减小了。图 12.5 中的(c)显示了带宽为 $0.5\hat{\sigma}_x$ 的核估计，由于正弦函数

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net



(a) $h=0.1\hat{\sigma}_X$

(b) $h=0.3\hat{\sigma}_X$

(c) $h=0.5\hat{\sigma}_X$

图 12.5 核估计

(Sin(•))的内在变动随着噪音一起被消灭了。核估计很平整。其极限接近于$\{Y_t\}$的平均值，作为 X_t 的函数的 Y_t 的所有变动性被丢失了。

12.3.2 最佳窗宽选择

从第 12.3.1 节中的例子可以看出，选择一个合适的窗宽是任何核回归应用的关键。选择一个最佳窗宽有几种方法，由于它的稳健性和渐近最优性[详解参见哈德尔(Härdle，1990，第 5 章)]，最常用的方法是交叉子样法。在这种方法中，选择一个窗宽使核估计的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

加权平均方差最小。具体来说，对于一个有 T 次观测的样本$\{X_t, Y_t\}_{t=1}^{t=T}$，令：

$$\hat{m}_{h,j}(X_j) = \frac{1}{T}\sum_{t\neq j}\omega_{t,T}(X_j)Y_t \tag{12.3.12}$$

这只是当第 j 次观测 X_j 时，基于除去第 j 次观测值 Y_j 时的核估计。则交叉检测函数 CV(h)定义为：

$$\mathrm{CV}(h) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[Y_t - \hat{m}_{h,t}(X_t)]^2\delta(X_t) \tag{12.3.13}$$

其中，$\delta(X_t)$是非负权重函数，用来减少边界效果[详见哈德尔(Härdle，1990，第 162 页)]。CV(h)被称为交叉检测函数是因为它确保了核估计适合于$\{Y_t\}$的每个样本$\{X_t, Y_t\}_{t\neq j}$(有一个观测被省略)。最佳窗宽就是使 CV(h)取最小值者。

12.3.3 平均导数估计

对于许多金融运用，我们希望建立 Y_t 和几个变量 $X_{1t},\cdots,X_{kt}$ 的非参数关联。例如，建立一个股票或债券的期望回报关于一些因素的非线性函数的数学模型，这些因素有：市场回报、利差、红利等等[见罗和麦金雷(Lo and MacKinlay，1996)]。这样的工作比起第 12.3.1 节中单一变量的例子更让人兴奋。考虑有 5 个独立变量且不失一般性的情况，假定 5 个变量都取值于[0，1]中，即使我们把每个变量的取值域只分成 10 个等份，也会产生 10^5 个宽度为 0.10 的邻域，因此，我们也至少需要 10^5 个观测值才能使平均每个邻域有一个数据点，这种令人讨厌的维数难题只能通过采取对采用的非线性形式加以限制而得到解决。

例如，假定 X_{it} 序列的线性组合与 Y_t 非参数相关。这有利于求得重要的非线性，同时，提供了足够的结构从而能对一个合理的样本容量进行估计。具体地，考虑下面多变量非线性模型：

$$Y_t = m(\mathbf{X}_t'\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t,\ \mathrm{E}[\varepsilon_t|\mathbf{X}_t] = 0 \tag{12.3.14}$$

其中，$\mathbf{X}_t = [X_{1t}\cdots X_{kt}]'$是一个$(k\times 1)$的向量，$m(\cdot)$是某一任意但固定的非线性函数，可以由下列两步过程估计 $m(\cdot)$：①用平均导数估计量估计 $\boldsymbol{\beta}$，②通过求 Y_t 对 $\mathbf{X}'_t\hat{\beta}$ 的核回归估计 $m(\cdot)$。

斯托克尔(Stoker，1986)发现在下列两个条件任意一个成立时，(12.3.14)式的系数 $\boldsymbol{\beta}$ 可以用普遍最小二乘法(OLS)估计规模因子：①$\mathbf{X}_t$ 序列是多元正态向量，或更一般地，②$\mathrm{E}[X_{it}|\mathbf{X}'_t\boldsymbol{\beta}]$关于 $\mathbf{X}'_t\boldsymbol{\beta}$ 是线性的，$i=1,\cdots,k$。① 如果这两条件都不成立，斯托克尔(Stoker，1986)提出了一个聪明的估计，即平均导数估计量，这种方法能一致地估计 $\boldsymbol{\beta}$(见斯托克尔[Stoker，1992])。

---

① 多变量正态的 $\mathbf{X}_t$ 满足第二个条件，同时非正态椭圆对称分布也满足第二个条件，参见查伯雷恩(Chamberlian，1983b)，强恩和哥德伯格(Chung and Goldberger，1984)，迪顿和艾里西(Deaton and Irish，1984)，及鲁德(Rund，1983)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

平均导数估计量的根据是 $m(\cdot)$关于 $\mathbf{X}_t$ 序列的导数的数学期望与 $\boldsymbol{\beta}$ 成比例：

$$\mathrm{E}\left[\frac{\partial m}{\partial \mathbf{X}_t}\right]=\mathrm{E}[m'(\mathbf{X}'_t\boldsymbol{\beta})]\boldsymbol{\beta}\propto\boldsymbol{\beta} \tag{12.3.15}$$

因此，平均导数的估计相当于把 $\boldsymbol{\beta}$ 估计成一个规模因子。这种规模因子与我们的目的不相干，因为它已经被 $m(\cdot)$包含在内，且可以用核回归一致地估计出来。

有几种平均导数估计方法，即直接估计、非直接估计和斜率估计。斯托克尔(Stoker，1992 第 3 章)倾向于非直接斜率估计(ISE)并基于以下两个理由：首先，如果 Y_t 与 $\mathbf{X}_t$ 的关系真是线性的，非直接斜率估计仍是无偏的而其他则不是。其次，非直接斜率估计对其非参数成分估计的精度要求不高，这是由于 ISE 是比率形式(见下)。

具有启发性的是，非直接斜率估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ISE}}$揭示了未知参数向量与被解释变量 Y 和$l(\cdot)$之间的协方差成比例。$l(\cdot)$是独立变量 $\mathbf{X}_t$ 的边际密度的对数的导数的相反数。因此，通过估计 $\mathrm{Cov}[Y,l(\cdot)]$，我们可以得到 $\boldsymbol{\beta}$ 的一致估计。通过计算 Y 和样本对应部分的$l(\cdot)$之间的样本协方差，可以估计出 $\mathrm{Cov}[Y,l(\cdot)]$。

形式上，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ISE}}$可以看作是有工具矩阵 $\mathbf{H}$ 时 Y_t 对 $\mathbf{X}_t$ 的回归的工具变量(IV)估计(见附录 A.1)：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ISE}}=(\mathbf{H}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{Y} \tag{12.3.16}$$

其中：$\mathbf{Y}\equiv[Y_1\cdots Y_T]'$

$$\mathbf{H}\equiv\begin{bmatrix}1 & \mathrm{I}_b(\mathbf{X}_1)\hat{l}(\mathbf{X}_1)' \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathrm{I}_b(\mathbf{X}_t)\hat{l}(\mathbf{X}_t)' \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathrm{I}_b(\mathbf{X}_T)\hat{l}(\mathbf{X}_T)'\end{bmatrix},\qquad \mathbf{X}\equiv\begin{bmatrix}1 & \mathbf{X}'_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}'_t \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}'_T\end{bmatrix} \tag{12.3.17}$$

$\hat{l}(\cdot)$是 X_t 边际密度对数的导数的负值的一个估计量，$\mathrm{I}_b(\mathbf{x})$是具有小于固定常数 b 的被估边际密度，同时去除部分样本的示性函数：

$$\mathrm{I}_b(\mathbf{x})\equiv\mathrm{I}[\hat{f}(\mathbf{x})>b] \tag{12.3.18}$$

在大多数实际运用中，常数 b 被设定为被整理样本的 1%～5%。

为得到 $\hat{l}(\cdot)$，注意到如果 $f(\mathbf{x})$表示 $\mathbf{X}_t$ 的边际密度，则 $f(\mathbf{x})$的高斯核估计为：①

$$\hat{f}(\mathbf{x})=\frac{1}{T}\frac{1}{h^k}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{K}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_t}{h}\right) \tag{12.3.19}$$

① 一般来说，$\hat{f}(\mathbf{x})$中隐含的带宽 h 不同于公式(12.3.14)中 $m(\cdot)$的非参数估计中的带宽。交叉子样本技术可以选用两者，然而计算量很大，实际上，简单地按经验法则即可。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

其中，

$$\mathrm{K}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_t}{h}\right) \equiv \prod_{i=1}^{k} \mathrm{K}_i\left(\frac{x_i - X_{it}}{h}\right) \tag{12.3.20}$$

$$= (2\pi)^{-k/2} \exp\left[-\frac{1}{2h^2}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_t)'(\mathbf{x}-\mathbf{X}_t)\right] \tag{12.3.21}$$

因此有：

$$\hat{f}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{T}\frac{1}{h^{k+1}}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{K}'\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_t}{h}\right) \tag{12.3.22}$$

$$= -\frac{1}{T}\frac{1}{h^{k+1}}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{K}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_t}{h}\right)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{X}_t)/h \tag{12.3.23}$$

且：

$$\hat{l}(\mathbf{x}) \equiv -\frac{\hat{f}'(\mathbf{x})}{\hat{f}(\mathbf{x})} \tag{12.3.24}$$

尽管 $f(\cdot)$是多变量的，但在它的核估计(12.3.19)式中仍然只有一个带宽来调节，就像在单变量的情况下，带宽控制区域平均的程度，在多变量情况下，其作用于多维邻域。实践中，在计算 $\hat{f}(\cdot)$之前，用 X_{it}各自的标准差使 X_{it}序列标准化可以改进区域平均过程的数字特征。那么用相应 X_{it}的标准差乘每一个 β_i 可以消除所做的标准化。

12.3.4 应用：估计牌价密度

不确定性下，投资经济学的一个最重要的理论发展是安诺尔(Arrow，1964)和德布卢(Debreu，1959)的牌价偏好模型，这个模型引进了原始公债，这种公债只在某种特定的自然状态下支付 1 美元报酬，其他情况则什么也没有。这就是所谓的安诺尔—德布卢(Arrow-Debreu)公债，它也是我们目前所理解的不确定性条件下经济均衡的基础。

在实践中，由于真正的安诺尔—德布卢公债不能进行任何有组织的交易，所以也无法知道其价格[①]。然而使用非参数技术特别是多变量核回归，艾特萨哈里尔和罗(Aït-Sahalia and Lo，1996)提出了估计这种价格的方法，称为连续状态下的牌价密度(也称时间状态价格，State-price density，SPD)。SPD 中包含了许多关于经济中风险资产定价和避险的信息。原则上，SPD 可用于给其他资产，甚至目前没有交易的资产定价[见艾特萨哈里尔和罗(Aït-Sahalia and Lo，1995)中的例子]。[②]

---

① 随着超股份的出现，这种情况很快改变了。超股份由加曼(Garman，1978)和哈干森(Hakansson，1976，1977)首先提出，目前，由利兰德、奥伯雷恩和鲁宾斯坦(Leland O'Brien Rubinstein Associates，Inc)发展，详见梅森、默顿、培罗德和塔法诺(Mason，Merton，Perold and Tufano，1995)。

② 当然，如果要使这样的价格有意义，市场必须是动态完备的。例如，见康斯坦丁尼德斯(Constantinides，1982)。这个假定总是显性地或隐性地被接受。同样，在参数化导数定价模型中也被采纳。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

更重要的是，SPD 包括了更多关于偏好和资产价格变动过程的信息。例如，如果对资产价格的数据发生过程增加参数限制，SPD 估计可用来推导资产价格均衡模型中代理人的偏好[见比克(Bick，1990)，荷和利兰德(He and Leland，1993)]。相应地，如果确定了某一偏好，SPD 估计可用来推导资产价格的数据发生过程[见德曼和凯尼(Derman and Kani，1994)，杜派厄(Dupire，1994)，鲁宾斯坦(Rubinstein，1985)，以及希姆科(Shimko，1991，1993)]。鲁宾斯坦(Rubinstein，1985) 确实发现了以下三者中任何两个可以导出第三者：①代理人偏好。②资产价格变动过程。③SPD。

牌价密度的定义

为正式地定义牌密度，考虑在一个标准的动态交易经济(见第 8 章)中，有一证券只在日期 T 支付报酬 $Y(C_T)$，在日期 t，证券的均衡价格 p_t 是总消费 C_T 的函数：

$$P_t = \mathrm{E}_t[Y(C_T)M_{t,T}],\ M_{t,T} \equiv \frac{\delta^{T-t}U'(C_T)}{U'(C_t)} \tag{12.3.25}$$

其中，$M_{t,T}$是日期 t 与日期 T 之间的边际替换率，δ 是时间偏好率。这一著名的均衡资产定价关系使证券现值等于其未来支付的现值期望，用随机折现因子折现。

卢卡斯(Lucas，1978)提出(12.3.25)式并不意味着$\{P_t\}$是一个鞅过程，他支持里络伊的观点，即鞅的性质既不是确定合理的资产价格的必要条件，也不是其充分条件。然而，他假定未来消费的条件分布的密度表示为 $f_t(\cdot)$。(12.3.25)式中的条件期望按下列方法重新描述：

$$\mathrm{E}_t[Y(C_T)M_{t,T}] = \int Y(C_T)\frac{\delta^{T-t}U'_T(C_T)}{U'_t(C_t)}f_t(C_T)dC_T \tag{12.3.26}$$

$$= e^{-r_{t,T}(T-t)}\int Y(C_T)f_t^*(C_T)dC_T \tag{12.3.27}$$

$$= e^{-r_{t,T}(T-t)}\mathrm{E}_t^*[Y(C_T)] \tag{12.3.28}$$

其中，

$$f_t^*(C_T) \equiv \frac{M_{t,T}f_t(C_T)}{\int M_{t,T}f_t(C_T)dC_T} \tag{12.3.29}$$

$r_{t,T}$是在 T 时刻支付单位消费的资产在 t 时刻至 T 时刻的连续复合净收益率。比方，$r_{t,T}$是无风险资产的回报。

欧拉方程式的形式说明资产现价可以表示成其按无风险利率折现后的期望回报值(详见第 8 章)。然而，期望回报由边际替换率加权后的概率密度函数求得的，而不是由未来的消费最初的概率密度求得。在连续时间情况下，f^* 也被看作风险中性定价密度[考克斯和罗斯(Cox and Ross，1976)]或等价鞅测度[哈里森和克雷普斯(Harrison and Kreps，1979)]。[①]

① 详见华恩和利曾伯格(Huang and Litzenberger，1988，第 5 章)对 SPD 的讨论。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

一旦求得 f_t^*，它可用于在日期 t 给任何资产定价，该资产只在日期 T 支付回报，且回报是任意一个 C_T 的函数。[①] SPD 还把第 8 章讨论的偏好均衡模型与第 9 章讨论的套利衍生产品定价模型联系起来。确实，所有金融证券，不管它是衍生产品与否，其价格中都隐藏有安诺尔—德布卢证券价格，安诺尔—德布卢证券价格可用来计算所有其他证券的价格，不管有多复杂。

用 SPD 给衍生产品定价

在某些正规条件下，f^* 可以表示成 t 和 T 的显性函数，由此，SPD$f^*(C_T;t,T)$ 可用于任意时刻 t 给资产定价。该资产只在将来任意时刻 T 一次性支付报酬，$T\geqslant t$：

$$P_t = e^{-r_{t,T}(T-t)}\int Y(C_T)f^*(C_T;t,T)dC_T \tag{12.3.30}$$

为标记简便，以后将遵循这一约定。例如，一个在时期 T 有总消费 C_T 的欧洲证券看涨期权(欧洲证券买进约定权利)其约定价格为 X，则其报酬函数 $Y(C_T)=\max[C_T-X,0]$ 并且日期 t 价格为：

$$G_t = e^{-r_{t,T}(T-t)}\int \max[C_T-X,0]f^*(C_T;t,T)dC_T \tag{12.3.31}$$

即使最复杂的路径依赖型衍生产品也可用(12.3.30)式来定价和避险。例如，考虑一个有高度非线性报酬函数的证券：

$$Y(C)=\frac{a-b}{1+\exp[-\beta(C-\alpha)]}+b$$

$$a>0,\quad b>0 \tag{12.3.32}$$

$$\alpha\equiv c+\frac{1}{\beta}\log\left(-\frac{a}{b}\right) \tag{12.3.33}$$

这一报酬函数是对所谓看涨垂直差价买卖期权组合报酬的修匀。该期权组合买入一个低约定价格的看涨期权，并卖出一个高约定的看涨期权[详见表 12.5 及考克斯和罗宾斯坦(Cox and Rubinstein，1985，第 1 章)]。

从衍生产品价格推导 SPDs

罗斯(Ross，1976)，班齐和米勒(Banz and Miller，1978)以及布里登和利曾伯格(Breeden and Litzenberger，1978)首先发现，期权价格与 SPDs 之间关系比(12.3.30)式表述的关系更紧密。尤其是，他们发现赎回价格函数 G_t 关于约定价格 X 的二阶导数一定等于 SPD：

$$\frac{\partial^2 G_t}{\partial X^2}=e^{-r_{t,T}(T-t)}f^* \tag{12.3.34}$$

因此，SPDf^* 包含在每个期权定价公式中。

① 多次支付回报的证券和无限次支付回报的证券也可由 SPD 定价，但这种情况下，SPD 必须适当地重定义以求出边际替换率中的时间变分，详见布里登和利曾伯格(Breeden and Litzenberger，1978)及拉德纳(Radner，1982)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

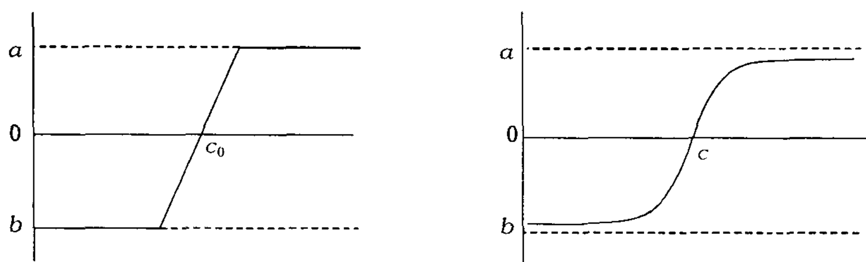


图 12.6 看涨垂直差价买卖的报酬函数及修匀

要由(12.3.34)式估计 SPD,我们需要买卖期权定价公式。虽然有许多参数定价公式存在[参见赫尔(Hull,1993,第 17 章)的一些常见例子],艾特萨哈里尔和罗(Aït-Sahalia and Lo,1996)构建了一个非参数定价公式。这个公式对基础资产价格的数据发生过程限制很少,仅要求平滑和弱相关性。当参数化假设(如几何布朗运动)被满足时,参数公式提供了很大的方便,如布莱克和斯科尔斯(Black and Scholes,1973)的参数公式和默顿(Merton,1973)的参数公式。而非参数方法在这些假设不满足时仍然稳健有效。由于有些实证迹象对这样的假设提出了质疑,至少对证券指数来说是这样[1],所以非参数方法有一些重要的优点。[2]

给定观测看涨期权价格$\{G_i, X_i, \tau_i\}$(其中:$\tau_i \equiv T_i - t_i$)、基础资产价格$\{P_i\}$和无风险利率$\{r_{\tau i}\}$,可构造平滑非参数购回价格函数为:

$$\hat{G}(P,X,\tau,r_t)=\hat{E}[G|P,X,\tau,r_\tau] \tag{12.3.35}$$

其中使用了一个由 4 个单变数核的积形成的多变数核:

$$K_h(P,X,\tau,r_\tau)\equiv k_{h_p}(P)k_{h_x}(X)k_{h_\tau}(\tau)k_{h_r}(r_\tau) \tag{12.3.36}$$

因此,

$$\hat{G}(P,X,\tau,r_\tau)=\frac{\sum_{i=1}^{n}k_{h_p}(P-P_i)k_{h_x}(X-X_i)k_{h_\tau}(\tau-\tau_i)k_{h_r}(r_\tau-r_{\tau_i})C_i}{\sum_{i=1}^{n}k_{h_p}(P-P_i)k_{h_x}(X-X_i)k_{h_\tau}(\tau-\tau_i)k_{h_r}(r_\tau-r_{\tau_i})} \tag{12.3.37}$$

期权的 delta 值和 SPD 的估计量由对 $\hat{P}$ 求微分得到:

$$\hat{\Delta}(P,X,\tau,r_\tau)=\frac{\partial\hat{G}(P,X,\tau,r_\tau)}{\partial P} \tag{12.3.38}$$

$$\hat{f}^*(P_T|P,\tau,r_\tau)=e^{r_\tau\tau}\left[\frac{\partial^2\hat{G}(P,X,\tau,r_\tau)}{\partial X^2}\right]_{X=P_T} \tag{12.3.39}$$

---

① 例如,见罗和麦金雷在 1988 年的文献。
② 见哈切恩森、罗和波吉尔以及艾特萨哈里尔关于其他非参数期权定价模型。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

在对数据发生过程的标准规则性假设和对真实购回价格函数的修匀假设下，艾特萨哈里尔和罗(Aït-Sahalia and Lo,1996)证明了期权价格的估计量、期权的 delta 值和 SPD 是一致的和渐近正态的。他们还给出了渐近方差的表达式。

掌握了 SPD，任何有特征 ζ 和报酬函数 $Y(\zeta, P_T)$ 的衍生证券，在时刻 $T(T=t+\tau)$ 的价格可通过定价函数在时刻 t 求出：

$$G(P,\zeta,\tau,r_\tau)=e^{-r_\tau\tau}\int_0^\infty Y(\zeta,P_T)\hat{f}^*(P_T\mid P,\tau,r_\tau)dP_T \tag{12.3.40}$$

如果报酬函数 $Y(\cdot)$ 对 P_T 可二次微分，那么：

$$G(P,\zeta,\tau,r_\tau)=e^{-r_\tau\tau}\int_0^\infty Y(\zeta,P_T)\hat{f}^*(P_T\mid P,\tau,r_\tau)dP_T \tag{12.3.41}$$

$$=\int_0^\infty Y(\zeta,P_T)\frac{\partial^2\hat{G}}{\partial P_T^2}dP_T \tag{12.3.42}$$

$$=\int_0^\infty \frac{\partial^2 Y(\zeta,P_T)}{\partial P_T^2}\hat{G}dP_T \tag{12.3.43}$$

对 $\hat{G}$ 积分比对 $\hat{G}$ 的二阶导数积分可加快估计量的收敛速率——$\hat{G}$ 以速度 $n^{1/2}h^{4/2}$ 收敛，其对 P_T 的修匀函数的积分以速度 $n^{1/2}h^{3/2}$ 收敛，而 $\hat{G}$ 的二阶积数以速度 $n^{1/2}h^{8/2}$ 收敛，其对 P_T 的修匀函数的积分以速度 $n^{1/2}h^{6/2}$ 收敛。比起报酬函数对 $\hat{G}$ 的二阶导数的积分，如果报酬函数的二阶导数存在的话，它对 $\hat{G}$ 的积分可使收敛速度获得 $h^{3/2}$ 因子的提高。

艾特萨哈里尔和罗(Aït-Sahalia and Lo,1996)运用这种估计量为标准普尔 500 指数(S&P 500)看涨和看跌期权定价和为 delta 套期保值。其数据取自于芝加哥期货交易所从 1993 年 4 月～1993 年 12 月的样本，样本容量为14 431个观测值。其 SPD 的估计量表现出负的偏度和超额峰态，这是历史股票回报率的一个共同特征(例见第 1 章)。还有，与许多参数期权定价模型不同，SPD 产生的期权定价公式能获得持续的易变性的“优势”和市场价格的其他经验特征。

12.4 人工神经网络

在工程和商业中，另一个引起注意的非参数回归是人工神经网络。人工神经网络可以看作为一项非参数技术，因此，其模型归于第 12.3 节也很自然。然而，由于其最初的动因来自于生物现象，特别是神经细胞生理学，人工神经网络现已成为一个单独的、不同的新兴学科分支[见赫兹、科罗格和帕尔默(Hertz,Krogh and Palmer,1991)，哈切恩森、罗和波吉尔(Hutchinson, Lo and Poggio, 1994)，波吉尔和吉罗西(Poggio and Girosi, 1990)，以及怀特(White,1992)的概述]。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

为了强调人工神经网络常见的非参数起源，这一章，我们描述三种这样的网络，统称为学习网络[见巴伦和巴伦(Barron and Barron,1988)]。在第 12.4.1 节，我们要介绍多层次视感控器，一种也许是最近的文献中最流行的人工神经网络，这就是“神经网络”的由来，在第 12.4.2 节和第 12.4.3 节，我们将介绍另两种有网络含义的技术：发散基本函数和投影导踪回归。

12.4.1 多层次视感控器

也许人工神经网络中最简单的例子是麦卡拉西和彼特斯(McCulloch and Pitts,1943)的二进制临界模型，在该模型中，一个取值为 0 或 1 的输出变量 Y 与 J 个输入变量 $X_j, j=1,\cdots,J$ 成非线性相关，

$$Y = g\left(\sum_{j=1}^{J}\beta_j X_j - \mu\right) \tag{12.4.1}$$

$$g(u)=\begin{cases}1 & \text{如果} \quad u\geqslant 0\\ 0 & \text{如果} \quad u<0\end{cases} \tag{12.4.2}$$

按照(12.4.1)式，每个投人 X_j 由系数 β_j 加权，β_j 称为连结承受力，然后把所有投入加总。如果加权后的和超过临界值 μ，则人工神经元被激活函数 $g(\cdot)$ 激活或打开，否则人工神经元保持休眠状态。这种简单的网络通常如图 12.7 所示，其中输入层与输出层相连。

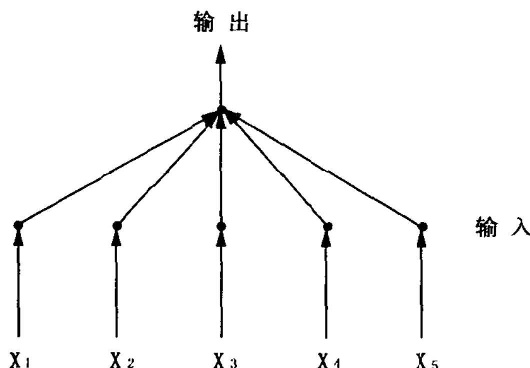


图 12.7 二元门限模型

二进制临界模型的一般化形成了人工神经网络中最流行的应用的基础，特别是为了使产出取值连续，亥维赛激活函数(12.4.2)式被逻辑斯蒂克函数替代(见图 12.8)：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

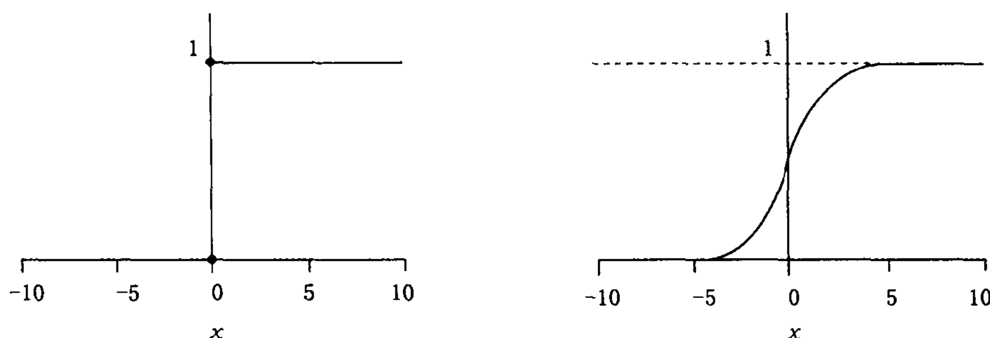


图 12.8 亥维赛和逻辑斯蒂克激活函数比较

$$g(u)=\frac{1}{1+e^{-u}} \tag{12.4.3}$$

而且，在不失一般性的情况下，可设 $\mu=0$，因为对于一个非零的激活水平，总可以通过定义第一个输入量 $X_1=1$，使连结强度 $-\beta_1$ 的输入的负值成为激活水平。

但是，二元门限模型最重要的扩展是在输入层和输出层之间引入一个隐藏层，具体地令：

$$Y=h\left(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k g(\boldsymbol{\beta}'_k\mathbf{X})\right) \tag{12.4.4}$$

$$\boldsymbol{\beta}_k=[\beta_{k1}\beta_{k2}\cdots\beta_{kJ}]',\mathbf{X}=[X_1\ X_2\cdots X_J]'$$

其中，$h(\cdot)$是另一任意的非线性激活函数。在这种情况下，输入与多个隐含层相连，在每个隐含层被不同权数加权并被相同的激活函数 $g(\cdot)$变换。每一个隐含层的输出又再被加权，权数为 α_k 序列，然后加总，并被第二个激活函数 $h(\cdot)$变换。这样的一个网络构造是多层次视感控器(MLP)的一个例子。最近的人工神经网络应用中最常见的类型是只有一个隐含层。比起图 12.7，多层次视感控器的拓扑结构更复杂(见图 12.9)。显然，通过增加更多的隐含层，可得到多层次视感控器。

对于给定的输入输出集合$\{\mathbf{X}_t,Y_t\}$，MLP 近似值相当于估计 MLP 网络的参数，即向量 $\boldsymbol{\beta}_k$ 和标量 α_k，$k=1,\cdots,K$——这些参数是通过极小化输出和网络离差平方即 $\sum_t[Y_t-\sum_k\alpha_k g(\boldsymbol{\beta}'_k\mathbf{X})]^2$ 而得到的，这是一种典型的方法。在文献中，参数估计过程的术语称为培植网络，它没有早期称之为逆向繁衍的参数估计那么牵强。它确实模仿了一种学习行为(尽管是非常简单的模仿)。① 然而怀特(White，1992)举出了大量的逆向繁衍的实际的缺点(数学不稳定性、偶尔不收敛，等等)，因此，估计(12.4.4)式中参数的首选办法是非线性最小二乘法。

即使单一隐含层的 MLP(12.4.4)式也有一般渐近属性：通过适当数量的隐含单元，

---

① 逆向繁衍是一个基本的随机渐近方法，最早由罗宾斯和门罗(Robbins and Monro，1951a)提出，详见怀特(White，1992)。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

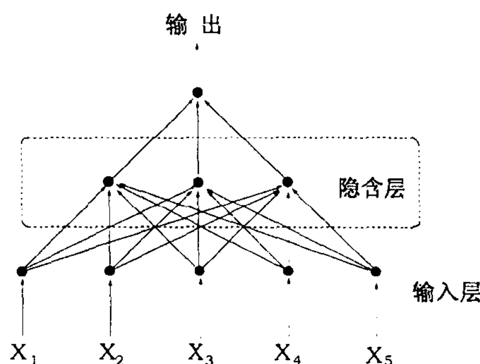


图 12.9 有一个隐含层的多层次视感控器

它可以任意精确度趋近于任何非线性函数[(见怀特(White,1992)]。然而，许多非参数估计技术也具有这种无限渐近属性，包括第 12.3 节中的非参数回归估计量和第 12.4.2 节、第 12.4.3 节中的技术。当然，这没有告诉我们在实际中这样的技术的表现如何。对于一给定的数据集，一种技术在精确度和其他方面是有可能超过另一项技术的。

也许 MLP 最重要的优点是能够通过对具有相对简单的函数的网络进行构造而逼近复杂的非线性关系，这种特点使并行处理成为自然而然的事。虽然目前金融应用还没有利用 MLP 的这种特点，但随着并行处理软件和硬件的广泛使用，这种情况会得到改变。

为了举例说明 MLP 模型，我们用 MLP 模型处理由(12.3.11)式产生的人工数据集。对于某个有一个隐含层、五个隐含单元的网络，记为 MLP(1,5)，Θ(·)为识别函数集，可得如下模型：

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_t = & 5.282 - 14.576g(-1.472 + 1.869X_t) \\
& - 5.411g(-2.628 + 0.641X_t) \\
& - 3.071g(13.288 - 2.347X_t) + 6.320g(-2.009 + 4.009X_t) \\
& + 7.892g(-3.316 + 2.484X_t)
\end{aligned}
\tag{12.4.5}
$$

其中，$g(u)=1/(1+e^{-u})$。该模型平面图为图 12.10，该图与第 12.3.1 节中核估计量的图很像，尽管(12.4.5)式看起来仅仅是一个 Sin 函数，然而，MLP 的数值性很好，相对来说，易于估计。

12.4.2 基本径向函数

基本径向函数(radial basis functions, RBFs)类首先被用于插值问题，通过一系列点来拟合一条曲线[见波维尔(Powell,1987)]。前不久，一些研究者用扩展后的 RBFs 来进行更一般的逼近工作[见布鲁姆海德和罗威(Broomhead and Lowe,1988)，穆迪和达肯

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

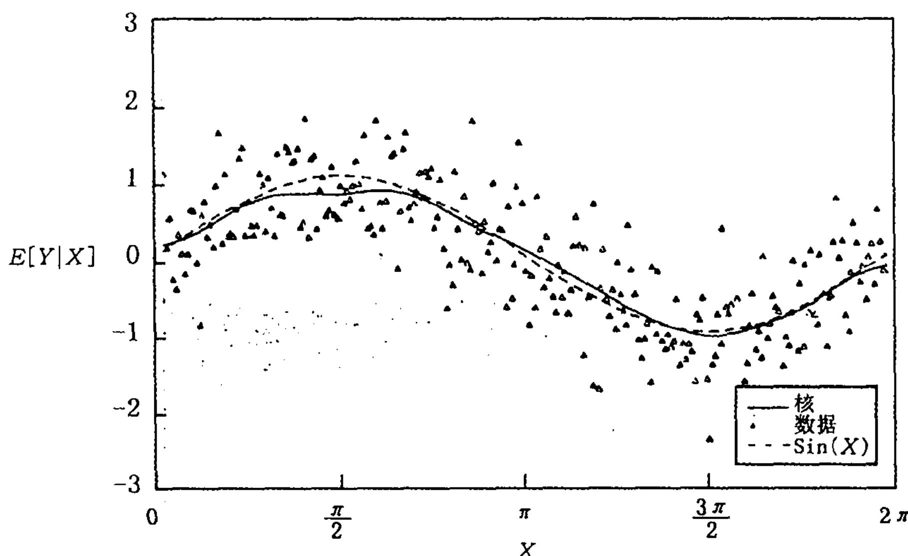


图 12.10 MLP(1,5)模型 $Y_t=\mathrm{Sin}(X_t)+0.5\varepsilon_t$

(Moody and Darken,1989),以及波吉尔和吉罗西(Poggio and Girosi,1990)]。尤其是,波吉尔和吉罗西(Poggio and Girosi,1990)指出 RBFs 可由古典正则化问题导出。在古典正则化问题中,给定一个零星的数据集($\mathbf{X}_t$,Y_t)和一些平滑限制,可对某些未知函数 $Y=m(\mathbf{X})$进行逼近。根据多重回归类比,d 维向量 $\mathbf{X}_t$ 为解释变量,Y_t 为因变量,$m(\cdot)$为可能的非线性函数,它是给定 $\mathbf{X}_t$ 时,Y_t 的条件期望,因此有:

$$Y_t=m(\mathbf{X}_t)+\varepsilon_t,\qquad \mathrm{E}[\varepsilon_t|\mathbf{X}_t]=0 \tag{12.4.6}$$

正则化问题(或非参数问题)可以看作是下面目标函数的最小化问题:

$$V(m)\equiv\sum_{t=1}^{T}(\|Y_t-m(\mathbf{X}_t)\|^2+\lambda\|\mathcal{D}m(\mathbf{X}_t)\|^2) \tag{12.4.7}$$

其中,$\|\cdot\|$ 指向量的范数,$\mathcal{D}$是微分运算符号。(12.4.7)式中和的第一项只是 $m(\mathbf{X}_t)$与 Y_t 之间的距离,第二项是一个补偿函数,它是 $m(\cdot)$修匀的减函数,而 λ 在修匀和拟合之间起权衡作用。

在某些条件下(例见波吉尔和吉罗西(Paggio and Girosi,1990),(12.4.7)式的最小化的解的最一般形式是:

$$\hat{m}(\mathbf{X}_t)=\sum_{k=1}^{K}\beta_k\hat{m}_k(\|\mathbf{X}_t-\mathrm{U}_k\|)+\mathcal{P}(\mathbf{X}_t) \tag{12.4.8}$$

其中,$\{\mathrm{U}_k\}$是 d 维向量的中心(与曲线尺度函数的结相近),$\{\beta_k\}$为标量系数,$\{\hat{m}_k\}$是标量函数,$\mathcal{P}(\cdot)$是一多项式。K 一般比样本中观测次数 T 小很多。波吉尔和吉罗西(Poggio and Girosi,1990)把这样的逼近称为超基函数,并且指出超基函数与曲线尺度、

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

校平器(Smoothers:如核估计)和其他非参数估计量联系紧密。[①]

为了我们当前的目的,取向量范数为由 $d\times d$ 权数矩阵 $\mathbf{W}$ 加权后的欧几里得范数,取多项式的项恰为线性的,并含常数项,则可得到 $\hat{m}(\cdot)$ 的公式:

$$\hat{m}(\mathbf{X}_t)=\alpha_0+\boldsymbol{\alpha}'_1\mathbf{X}_t+\sum_{k=1}^{k}\beta_k\hat{m}_k((\mathbf{X}_t-\mathbf{U}_k)'\mathbf{W}'\mathbf{W}(\mathbf{X}_t-\mathbf{U}_k)) \qquad (12.4.9)$$

其中,α_0、$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是多项式 $p(\cdot)$ 的系数。米切利(Miccheli,1986)提出有很大一类基函数 $\hat{m}_k(\cdot)$ 是可用的,但最常用的还是高斯的 e^{-x/σ^2} 以及多重二次型 $\sqrt{x+\sigma^2}$。

这种网络可产生任何实值输出,但在实际应用中,我们对期望输出值的范围有一个先验的知识,对输出运用某些非线性转换函数来反映这种先验知识可以使计算效率更高。我们将在推导定价模型的应用中这样做,其中 RBF 网络的某些部分将被输出 S 形放大,输出 S 形使值域范围从 $(-\infty,+\infty)$ 变为固定的对应范围 $(0,1)$。具体地说,放大后的网络的形式为 $g(\hat{m}(\mathbf{x}))$,其中,$g(u)=1/(1+e^{-u})$。

对于 MLPs,在给定输入、输出集 $(\mathbf{X}_t,Y_t)$ 时,RBF 逼近牵涉到估计 RBF 网络的参数——矩阵 $\mathbf{W}'\mathbf{W}$ 上三角 $d(d+1)/2$ 个单值项,$\{\mathbf{U}_k\}$ 的 dk 个中心元素,以及 $d+k+1$ 个系数 α_0、α_1 和 $\{\beta_k\}$。这些系数的估计主要采用非线性最小二乘法,如使 $\sum_t[Y_t-m(\mathbf{X}_t)]^2$ 最小等方法。

12.4.3 投影寻踪回归

投影寻踪法来自于统计界通过研究高维数据集的低维投影来分析高维数据集的方法。弗里德曼和斯蒂茨尔(Friedman and Stuetzle,1981)发展了一种解决非线性问题的、称之为投影寻踪回归(PPR)的方法。与 MLPs 相近的是,PPR 模型也是由数据的投影组成,如数据与系数估计值的积,与 MLPs 不同的是,PPR 还从数据中估计其非线性合并函数,遵从第 12.4.1 节的标识,单值输出的 PPR 公式可写成:

$$m(\mathbf{X}_t)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{K}\alpha_k m_k(\boldsymbol{\beta}_k'\mathbf{X}_t) \qquad (12.4.10)$$

其中,函数 $m_k(\cdot)$ 由数据估计而来(通常采用平滑方法),$\{\alpha_k\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_k\}$ 为系数,K 是投影的个数,α_0 一般取输出 $m(\mathbf{X}_t)$ 的样本均值。很明显,从(12.4.10)式中可看出 PPR、RBF 和 MLP 网络之间的相似性。

12.4.4 学习网络的局限性

尽管学习网络对逼近非线性函数有许多优点,但它也有一些严重的局限性。具体地

① 为了简化术语,这里我们用 RBFs 来包括波维尔(Powell,1987)使用的插值技术和其后的一般化。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

说，对一给定的应用中，目前还没有一个被广泛接受的用于估计其网络结构的规范。如隐含层的数目是多少？隐含单元的数目是多少？激活函数怎么样，等等。尽管在偶尔的经验观测中有一些经验规则已经出现，但它们充其量是启发式的。

在培植网络时，同样会产生困难，典型的就是，在通过使方差最小来估计网络参数时，由于激活函数的内在非线性，使得目标函数不是全局凸性的，从而有许多局部最小值。

最后，由于网络的层次组合，统计推理的传统技术，如显著性检验，并不总是能够用到网络模型中。例如，如果(12.4.4)式中的某一 α_k 为零，则相应隐含单元的连结承受力 $\boldsymbol{\beta}_k$ 不能被确定。因此，即使是简单的显著性检验与置信区间的确定也需要复杂的维持假定才有意义。

12.4.5 应用：了解布莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)公式

给定神经网络在逼近复杂的非线性关系时的能力和灵活性，用它给衍生证券定价就是很自然的事。衍生证券的定价公式尽管有固定的形式，但仍然高度的非线性。哈切恩森、罗和波吉尔(Hutchison，Lo and Poggio，1994)提出了一个具有挑战性的问题：如果期权价格真的完全由 Black-Scholes 公式决定，神经网络能否“了解”Black-Scholes 公式？用更标准的统计语言说，就是能否通过有足够实际使用价值的准确度的学习网络来非参数地估计 Black-Scholes 公式？

哈切恩森、罗和波吉尔(Hutchison，Lo and Poggio，1994)通过蒙特卡罗模拟试验来解答这个问题。他们用人工生成的 Black-Scholes 期权价格构造不同的神经网络，并比较它们与 Black-Scholes 公式在解析上和非样本避险试验中有多么接近。他们发现，即使用六个月的日数据，学习网络定价公式也能以合理的准确度逼近 Black-Scholes 公式。

具体地，他们先模拟了两年的日证券价格样本，并根据芝加哥期权交易所(CBOE)的交易规则，得到每日期权的横截面数据及其由 Black-Scholes 公式求得的价格。他们把这种证券和(多重)期权价格称为培植路径，因为网络是由这些样本培植的①。给定日证券价格的模拟培植路径，他们为根据 CBOE 交易规则引进股票期权构建了期权价格的相应路径。

图 12.11 显示了一个典型的培植路径。由于由特殊样本路径产生的期权是(随机)股

---

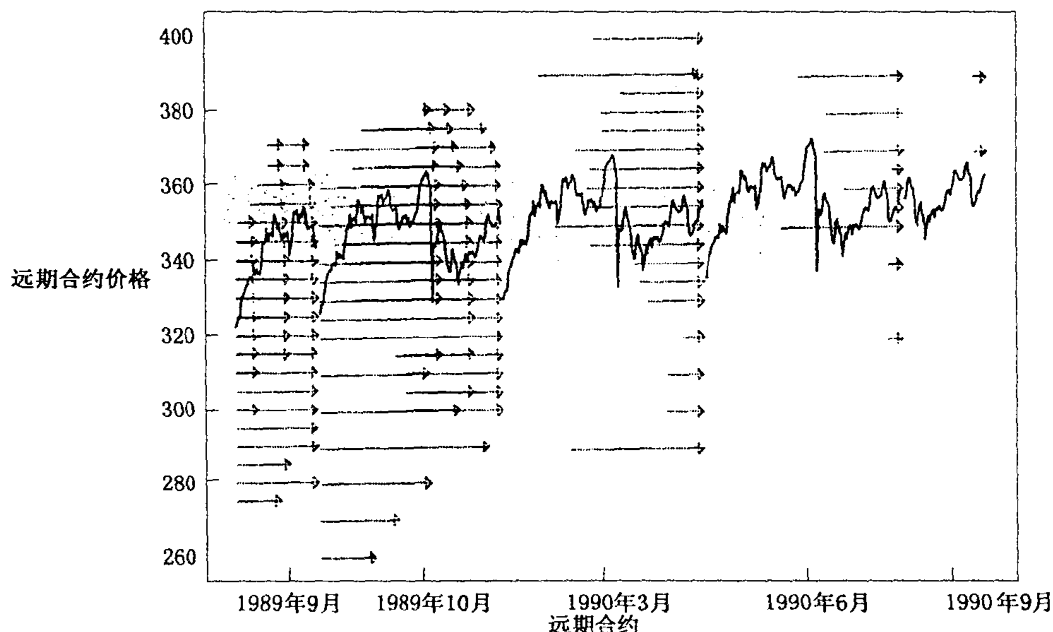
① 在模拟试验中他们假设基本资产是典型的纽约证券交易所的股票，具有初始股价 $P(0)$ 为 50 美元，具有期望的年连续复合收益率 μ 为 10%以及年收益的易变性 σ 为 20%。在服从几何布朗运动的布莱克—斯科尔斯假设之下：

$$dP=\mu P dt+\sigma P dB$$

我们取每年的交易天数为 253 天，从正态分布 $\mathcal{N}(\mu/253,\sigma^2/253)$ 获得 506 个伪随机变量 $\{\epsilon_t\}$，得到了 2 年的日连续复合收益，并对 $t>0$ 按通常的关系式 $P(t)=P(0)\exp[\sum_{i=1}^{t}\epsilon_t]$ 转换成价格。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

价路径的函数，数据矩阵的大小(指期权的数目和数据点的总数目)在样本路径中变化不定。对于 6 个月的数据培植集，每一样本路径的期权数目在 71 与 91 之间变动，平均为 81，数据点的总数目在 5 227 与 6 847 之间变动，平均为 6 001。



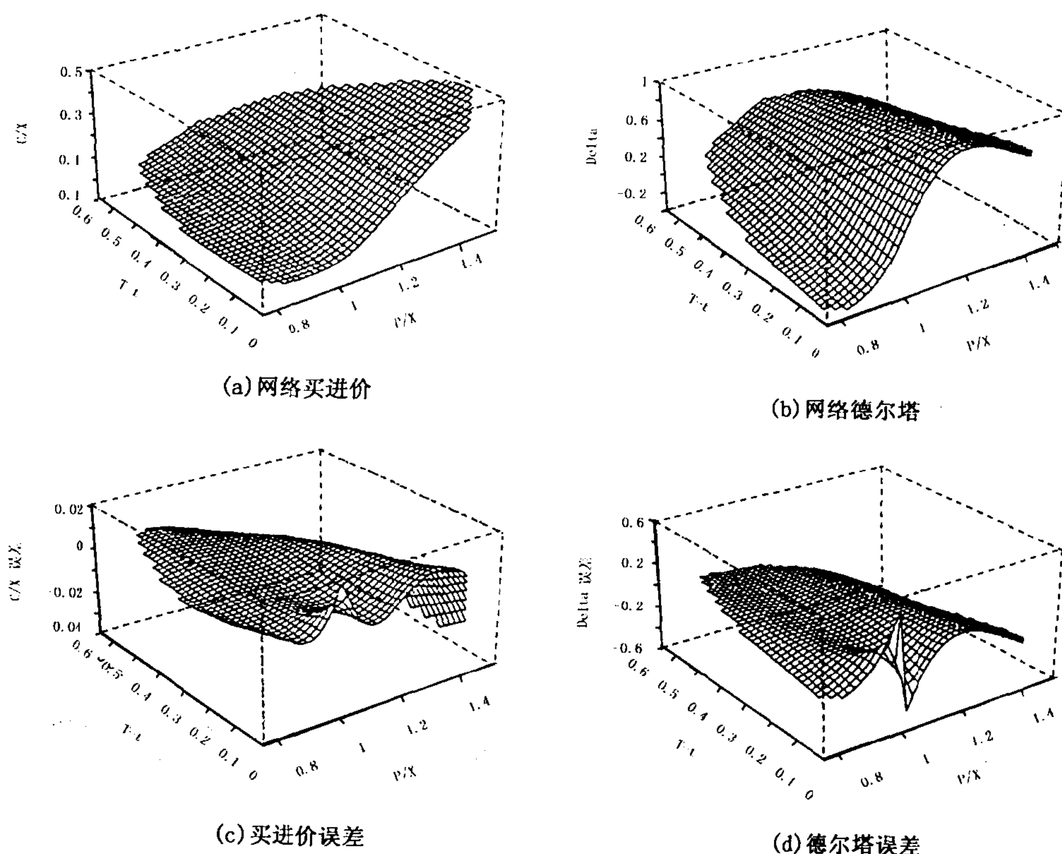
注：折线代表股权，箭头表示股票期权，箭头的 y 坐标值为约定价格(箭有些倾斜是为了表明开始日到到期日期权价格不同)。

图 12.11 典型的模拟训练路径(参数见正文)

由神经网络得来的非线性模型产生的期权价格与其 delta 值的估计，与真实的由 Black-Scholes 公式得出的值在视觉上很难区分。图 12.12 显示了 RBF 网络的估计与误差的例子。这个特殊的 RBF 网络的估计等式为：

$$
\begin{aligned}
\widehat{G/X} = & -0.06\sqrt{\begin{bmatrix} P/X-1.35 \\ \tau-0.45 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 59.79 & -0.03 \\ -0.03 & 10.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P/X-1.35 \\ \tau-0.45 \end{bmatrix} + 2.55} \\
& -0.03\sqrt{\begin{bmatrix} P/X-1.18 \\ \tau-0.24 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 59.79 & -0.03 \\ -0.03 & 10.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P/X-1.15 \\ \tau-0.24 \end{bmatrix} + 1.97} \\
& +0.03\sqrt{\begin{bmatrix} P/X-0.98 \\ \tau+0.20 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 59.79 & -0.03 \\ -0.03 & 10.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P/X-0.98 \\ \tau+0.20 \end{bmatrix} + 0.00} \\
& +0.10\sqrt{\begin{bmatrix} P/X-1.05 \\ \tau+0.10 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 59.79 & -0.03 \\ -0.03 & 10.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P/X-1.05 \\ \tau+0.10 \end{bmatrix} + 1.62} \\
& +0.14P/X-0.24\tau-0.01
\end{aligned}
\tag{12.4.11}
$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net



(a) 网络买进价 (b) 网络德尔塔

(c) 买进价误差 (d) 德尔塔误差

图 12.12 四个典型非线性类的 RBF 模型

其中，$\tau = T - t$。注意(12.4.11)式中，RBF 模型的中心没有被限定在输入范围内，在这个例子中，实际上确实不存第三、第四中心。网络中最大的误差趋向于出现在期权到期履约金额的拐点和样本点边界上。

尽管学习的网络价格精度很引人关注，但它单独不足以确保非参数方法的合理性。尤其是，期权避险的能力是同样重要的，因为通过动态避险策略来复制期权的能力可以使套利定价公式的存在性是可预测的。这种附加的限制给正规化技术，特别是哈切恩森、罗和波吉尔(Hutchinson，Lo and Poggio，1994)使用的 RBF 网络的发展提供了附加的动因。

特别地，delta 避险策略要求准确逼近基础定价公式的导数。这种要求直接导致正规

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

化技术，如 RBF 网络提出的平滑性限制①。哈切恩森、罗和波吉尔（Hutchinson，Lo and Poggio，1994）提出 RBF 网络和 MLP 网络都对模拟 Black-Scholes 数据和在标准普尔 500 指数期货期权中提供了很好的 delta 避险能力，并且在许多情况下优于 Black-Scholes 公式（回想 Black-Scholes 公式是在可进行连续 delta 避险的假设下导出的，而这些模拟假设进行日 delth 避险）。

尽管参数求导定价公式当其可用时是首选的方法，但哈切恩森、罗和波吉尔（Hutchinson，Lo and Poggio，1994）的研究结果显示当参数方法失败时，非参数学习网络是有用的替代选择。虽然他们的研究很有前途，我们仍不能得出这样的方法通常会成功的结论——其模拟只集中于 Black-Scholes 模型，并且其经验应用只由单一的工具和时期组成，如标准普尔 500 指数期货期权，时间为 1987～1991 年。

然而，这种一般性方法为将来的研究指出了大量的有希望的方向，也许最紧迫的是附加输入的详述，这些附加输入是参数模型所忽略的，例如，市场回报，一般市场变化率和商业条件的其他衡量。

学习网络详述中其他的研究方向由适当统计推断的需要所激发。首先，我们需要某种方法构造网络，包括非线性单元数目、中心数目、基函数类型，等等，以最优的更合适的自动方式与手边现有的数据集相配合。

其次，样本容量与渐进误差之间的关系应该可以通过解析方法或蒙特卡罗试验来考察。也许可以构造某一数据依赖型的测度来提供渐近误差的实时估计量，其方式和通过典型的估计量来获得标准误差完全一样。

最后，需要比较不同方案的优劣。典型的拟合优度测量，如 R^2 为模型选择提供了一定的依据。在做这样的选择之前，方案都是未完成的。而且，在非线性模型中，自由度概念的定义对所有的统计拟合方法都不适用了。

12.5 过度拟合和数据探寻

本章所讨论的每一个非线性方法各有其利弊，都一定程度地存在过度拟合和数据探寻的问题。当模型拟合得“太好”时出现过度拟合，即模型既抓住了真正的非线性关系，又掺杂了随机噪音。有启发性的是，过度拟合主要来源是，“自由度”太少或相对于数据点参

① 实际上，众所周知，数值微分问题的提出是不对的，雷恩斯切（Reinsch，1967）提出解决（12.4.7）式中的变异问题的经典方法是找到一个充分修匀函数使之正规法。正如我们前面所讨论的，RBF 网络、曲线尺度和几种 MLP 网络直接由正规化方法产生，并且被认为不仅可逼近定价公式还可逼近其导数（只要对应于前面修匀的基函数有足够的度。见波吉尔和吉罗西（Poggio and Girosi，1990），而高斯函数有我们所需要的足够的平滑度）。总概要的一个特殊情况就是加兰特和怀特（Gallant and White，1992），霍尼克、斯廷齐库姆和怀特（Hornik，Stinchombe and White，1990）的研究结果，他们提出随着隐含单元的增加，单一隐含层的 MLP 网络可以很好地逼近一个任意的非线性关系的导数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

数太多。它的一个典型症状是样本期内拟合很好，样本期外表现很差。[①] 数据探寻是另一对应的问题，它导致很好的但错误的样本期外表现。当我们为使最终的模型与数据相拟合时，我们进行了许多的规范搜索，这样数据探寻偏差就产生了。[②] 即使模型实际上不正确，通过对不同的数据集和(或)参数值进行足够长的搜索，我们也可能找出一种组合将很好地拟合数据。然而，这种拟合是虚假的，它仅仅是扩大搜索过程的一个表现。

不幸的是，对这两个问题还没有简单的补救方法。这是因为产生这两个问题的过程也是得到真实的经验发现的过程。这两个问题产生的根源在于我们不能进行支配下的试验，因而我们理解数据时，严重地依赖统计推断，而对所有形式的统计推断，总有一个误差边缘，这种误差边缘对我们处理数据和修正模型方式的微小变化常常敏感。

尽管如此，仍有一些方法缓解过度拟合与数据探寻的影响。例如，在罗和麦金雷(Lo and Mackinlay，1990b)中，系统的规范搜索的影响可以明确地计算出来。在这种情况下，使用校正后的统计分布进行推理将能避免得出一些实际不存在，却有意义的结果。仔细的样本期外表现评估能克服过度拟合的问题；如果进行了相对少一点的样外试验，或样外试验的数据集不同(且弱相关)，则能减少数据探寻的影响。

但也许减小过度拟合和数据探寻影响的最有效的方法是用先验理论论述对规范搜索进行某些约束。这些理论论述的形式可以是经济行为系统化的数学模型、心理因素驱动的行为模型或简单的基于判断、直觉和过分经验的启发式的经验法则。所有这些理论根源都一定程度地受数据探寻和过度拟合的影响，没有一种形式的推断能避开这两个问题，它们只是不太敏感并提供了一种不太依赖数据的确认模型的方法。

所有这些说明在处理数据之前，需要确认一个模型的先验框架和规范。通过提出这样一个规范，加上试图分析的各种各样的现象和搜索中将用到的相关变量，我们得出一个看似成功的都是虚假的模型的几率将减小。

12.6 结 论

由于计算能力的提高和大型数据集的获得，非线性在金融应用中扮演了一个非常突出的角色，与前面的章节中介绍的材料不同，本章中的一些方法还不完善，带有更多的试验性，在一个短的时间内，许多我们所介绍的方法将被精炼，有些则会被淘汰。尽管如此，重要的是要指出一个研究的方向和提出一些问题，尤其是在研究的早期阶段。

---

① 非线性模型中的自由度很难决定，因为“参数”的概念模糊，例如，核回归似乎只有一个参数——带宽 h，但这显然使人糊涂，因为每个数据点都是区域平均的中心，详见汉姆贝尔(Hampel，1986)和瓦巴(Wahba，1990)。

② 对该偏差的正式分析见利默(Leamer，1978)，罗和麦金雷(Lo and Mackinlay，1990b)，布莱克(Black，1993)中金融文献最近的例子。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

尽管非线性模型有其灵活性，但它们确实有严重的局限性，它们一般很难被估计准确，对异常值敏感，数值不稳定，比相对的线性模型更容易过度拟合和出现数据探析偏差。与一般的看法相反，非线性模型要求更多的经济结构和先验因素，而不是更少。对其解释需要更努力、更仔细。然而，非线性是经济生活中的常态，对许多金融应用来说，非线性的起源和性质易于确认，或至少易于以某种方式表述。鉴于此，本章中描述的方法是金融计量学家们的又一强有力的工具。

习 题

12.1 大多数数码计算机生成的伪随机数字发生器是乘法线性同余发生器(MLCG)，其中 $X_n=(aX_{n-1}+c)m$，a 是精心挑选的乘法，c 是一任意常数，m 等于或略小于一个计算机所代表的最大整数(例如，令 $a=1664525, c=0, m=2^{32}$)。为了对照 MLCG 数字，考虑以下两个非线性递推公式：帐篷图(见第 12.1.1 节)和逻辑斯蒂克图，分别为：

$$X_n=\begin{cases}2X_{n-1} & \text{设 } X_{n-1}<\frac{1}{2} \\ 2(1-X_{n-1}) & \text{设 } X_{n-1}\geq\frac{1}{2}\end{cases} \quad X_0\in(0,1) \tag{12.6.1}$$

$$X_n=4X_{n-1}(1-X_{n-1}), \quad X_0\in(0,1) \tag{12.6.2}$$

这些递推是混沌系统的例子，它表现出对初始条件敏感的依赖和异常的复杂动态行为。

12.1.1 伪随机数字发生器有什么好的特征？在实际中，而不是理论上，应如何对两个不同的发生器进行比较？

12.1.2 把 MLCG 与帐篷图和罗吉斯图对比，进行蒙特卡罗模拟来决定哪一个是更好的伪随机数字发生器。哪一个更好？为什么？在确定选择标准时，考虑你所要使用伪随机数字发生器应用的类型。提示：执行(12.6.1)式时，用 1.99999999 代替 2，用 3.99999999 代替(12.6.2)式中的 4——为了加分。解释为什么。

12.2 估计一个多层次视感控器模型，根据标准普尔 500 指数从 1926 年 1 月～1994 年 12 月的数据求月回报。该模型有 5 个滞后回报为输入量，并有一个包括 10 个隐含单元的隐含层。计算你的模型的单步提前预测的样内均方根误差(RMSE)，并把结果与相应的样外测试结果相比较，样外测试期为从 1986 年 1 月～1994 年 12 月。如果两者有差异，请解释之。

12.3 使用核回归估计从 1965 年 1 月～1994 年 12 月 IBM 股价与 S&P 500 股票指数月度收益之间的关系。如何以核估计量的结果出发计算常规的贝塔值？请至少构造二个度量获取核估计关于最小二乘估计的增量值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

GMM 附录

这部分附录主要对金融计量经济学中最常用的估计技术作一简短的介绍。许多更好的参考书有这些最常用估计技术的详细内容。所以，我们的着眼点就是让大家及时了解自己想知道的与这些估计技术最有关的方面。读者有兴趣的话，可以查找更系统、更易于理解和操作的比如哈尔(Hall，1992)写的，汉密尔顿(Hamitlton，1994)写的，奥加基(Ogaki，1992)写的和怀特(White，1984)写的等教材和著作。

我们把哈尔(Hall，1992)的专著中 A.1 部分的线性工具变量估计作为 1982 年汉森(Hansen)提出的广义矩估计量方法的直接导言。在豪尔的专著中的 A.2 部分我们推广了 GMM 方法，进一步讨论处理序列相关的方法；在 A.3 部分继续讨论处理异方差的方法；在 A.4 部分我们讨论 GMM 与最大似然估计方法之间的关系。

A.1 线性工具变量

考虑标量 y_t 和向量 $\mathbf{x}_t$ 之间的线性关系：$y_t=\mathbf{x}'_t\boldsymbol{\theta}_0+\varepsilon(\boldsymbol{\theta}_0)$，$t=1\cdots T$。把标量 y_t 的 T 个观测写成向量形式，我们有：

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}_0+\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}_0) \tag{A.1.1}$$

这里 $\mathbf{y}$ 是包含 y_t 的 T 个观测的 $(T\times1)$ 维向量，$\mathbf{X}$ 是包含 $\mathbf{x}_t$ 中 N_X 个独立变量的 T 个观测的 $(T\times N_X)$ 维向量，$\boldsymbol{\theta}_0$ 是 $(N_X\times1)$ 维参数向量，而 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)$ 是包含误差项 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ T 个观测的 $(T\times1)$ 维向量。误差项被写成真实参数向量的函数，这样 ε 既可被当成真实方程的误差，又可被当成估计方程的残差。为方便起见，假定误差项之间没有序列相关，具有同方差 σ^2；于是，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)$ 的方差就是 $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}_0))=\sigma^2\mathbf{I}_T$，这里，$\mathbf{I}_T$ 是 $(T\times T)$ 单位矩阵。

还有 $(N_H\times1)$ 维列向量 $\mathbf{h}_t$，其中含有 N_H 个工具变量。这个向量的 T 个观测构成了 $(T\times N_H)$ 阶矩阵 $\mathbf{H}$。该向量有这么一个性质：$\mathrm{E}(\mathbf{h}'_t\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}_0))$ 是一个 $(N_H\times1)$ 维零向量，即

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

工具向量与误差项 ε_t 是同期不相关的。[①] 一个特定的工具向量与方程误差项不相关的陈述就是所谓的正交条件，工具变量回归法就是使用 N_H 个可得到的正交条件来估计模型的。

给定任意一个系数向量 $\boldsymbol{\theta}$，我们可以构造相应的残差 $\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})\equiv y_t-\mathbf{x}'_t\boldsymbol{\theta}$。把这些残差堆积起来就变成一个向量，即 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\equiv\mathbf{y}-\mathbf{x}\boldsymbol{\theta}$。我们还可以定义另外一个 $(N_H\times 1)$ 维列向量，它是工具向量与残差的乘积：

$$\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta})\equiv\mathbf{h}_t\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) \tag{A.1.2}$$

这个乘积的期望在真实参数向量点 θ_0 上是一个 $(N_H\times 1)$ 维零向量：

$$\mathrm{E}[\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)]=0 \tag{A.1.3}$$

工具变量(IV)估计的基本想法就是选择系数使它尽可能接近于满足这个条件。当然，我们不可能观测到 $\mathbf{f}$ 的真实期望值，所以只能用 $\mathbf{f}$ 的样本平均值来替代。用 $\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})$ 作为 $\mathbf{f}$ 的样本平均值，下标 T 表示它对样本的依赖性，则有：

$$\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})\equiv T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta})=T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{h}_t\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})=T^{-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \tag{A.1.4}$$

最小距离准则

一般来讲，向量 $\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})$ 的元素不完全是常数，更不会全为零。这样，我们可以最小化包含 $\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})$ 中元素的平方项和交叉乘积项加权和的二次型。定义二次型 $\mathbf{Q}_T(\boldsymbol{\theta})$ 为：

$$\mathbf{Q}_T(\boldsymbol{\theta})\equiv\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})'\mathbf{W}_T\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})=[T^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})'\mathbf{H}]\mathbf{W}_T[T^{-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})] \tag{A.1.5}$$

这里，$\mathbf{W}_T$ 是一个 $(N_H\times N_H)$ 阶对称、正定加权矩阵。

IV 回归就是选择 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 作为使二次型 $\mathbf{Q}_T(\boldsymbol{\theta})$ 达到最小的 $\boldsymbol{\theta}$ 的值。按照 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})$ 的定义把它替换进入(A.1.5)式，这样最小化问题的一阶条件就是：

$$\mathbf{X}'\mathbf{H}\mathbf{W}_T\mathbf{H}'\mathbf{y}=\mathbf{X}'\mathbf{H}\mathbf{W}_T\mathbf{H}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}_T \tag{A.1.6}$$

当工具变量个数 N_H 等于被估参数个数 N_X 的时候，矩阵 $\mathbf{H}'\mathbf{X}$ 是非奇异的。于是，(A.1.6)式左、右两边的 $\mathbf{X}'\mathbf{H}\mathbf{W}_T$ 可以消去。最小化问题给出的 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 的解为：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_T=(\mathbf{H}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{y} \tag{A.1.7}$$

这个估计与加权矩阵 $\boldsymbol{W}_T$ 是独立的，因为既然 $N_H=N_X$ 说明所有的正交条件可以被精确地满足，就不需要各个正交条件之间的相互替换。显然，如果工具矩阵 $\mathbf{H}$ 与解释变量矩阵 $\mathbf{X}$ 相同时，(A.1.7)式给出的就是 OLS 回归系数的一般表达式。

更一般地，当 $N_H>N_X$ 时说明所满足的正交条件数多于被估计的参数个数。在这种情况下，模型是过度识别的，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 的解为：

---

① 在许多应用中，ε_t 是与前述已知变量不相关的预测误差。本情形中工具向量 h_t 将仅包含一阶或多阶滞后变量。于是，出于概念上的简单化和一般化的目的，我们才把工具向量写成 h_t。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_T=(\mathbf{X}'\mathbf{H}\mathbf{W}_T\mathbf{H}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}\mathbf{W}_T\mathbf{H}'\mathbf{y} \tag{A. 1. 8}$$

渐近分布理论

得到了 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 的表达式以后，下一步就是要计算参数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 的渐近分布。从(A. 1. 1)式中替换掉 $\mathbf{y}$ 再做整理，我们得到：

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}_0)=(T^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}\mathbf{W}_T T^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X})^{-1}T^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}\mathbf{W}_T T^{-1/2}\mathbf{H}'\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}_0) \tag{A. 1. 9}$$

现在假定当 T 增加时，$T^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{H}$ 收敛到非奇异矩阵 $\mathbf{M}_{HH}$，以及 $T^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}$ 收敛到秩为 N_X 的非奇异矩阵 $\mathbf{M}_{XH}$。另外还假定当 T 增加时，加权矩阵 $\mathbf{W}_T$ 收敛到对称、正定矩阵 $\mathbf{W}$。由于我们已经假定误差项 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)$满足序列不相关和同方差，则正交条件使 $T^{-1/2}\mathbf{H}'\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)$收敛到均值为零、方差协方差矩阵为 $\sigma^2\mathbf{M}_{HH}$ 的正态分布向量。我们使用 $\mathbf{S}$ 代表这个渐近协方差矩阵：

$$\mathbf{S}=\lim_{T\to\infty}\mathrm{Var}[T^{-1/2}\mathbf{H}'\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)]=\sigma^2\mathbf{M}_{HH} \tag{A. 1. 10}$$

由(A. 1. 4)式，$\mathbf{S}$ 可以被更一般地表达为 $T^{1/2}$乘以 $\mathbf{f}$ 的样本平均的渐近方差，也就是 $T^{1/2}$乘以 $\mathbf{g}_T$ 的渐近方差，即：

$$\mathbf{S}\equiv\lim_{T\to\infty}\mathrm{Var}\Big[T^{1/2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)\Big]=\lim_{T\to\infty}\mathrm{Var}[T^{1/2}\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta}_0)] \tag{A. 1. 11}$$

在这些收敛性假设下，(A. 1. 9)式就蕴涵着：

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}N(0,\mathbf{V}) \tag{A. 1. 12}$$

这里：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}&=(\mathbf{M}_{XH}\mathbf{W}\mathbf{M}_{HX})^{-1}\mathbf{M}_{XH}\mathbf{W}\mathbf{S}\mathbf{W}\mathbf{M}_{HX}(\mathbf{M}_{XH}\mathbf{W}\mathbf{M}_{HX})'^{-1}\\&=\sigma^2(\mathbf{M}_{XH}\mathbf{W}\mathbf{M}_{HX})^{-1}\mathbf{M}_{XH}\mathbf{W}\mathbf{M}_{HH}\mathbf{W}\mathbf{M}_{HX}(\mathbf{M}_{XH}\mathbf{W}\mathbf{M}_{HX})'^{-1}\end{aligned} \tag{A. 1. 13}$$

并且 $\mathbf{M}_{HX}=\mathbf{M}'_{XH}$

最优加权矩阵

我们已经证明估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 是一致和渐近正态的。分析的最后一步工作就是选择加权矩阵 $\mathbf{W}$ 使得渐近方程矩阵 $\mathbf{V}$ 达到最小，并且给出一个渐近有效的估计量。我们通过选择 $\mathbf{W}$ 等于任意正的标量乘以 $\mathbf{S}^{-1}$可以获得使 $\mathbf{V}$ 最小的结果。再回到样本平均值的方差协方差矩阵 $\mathbf{S}$ 的正交条件用 $\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})$。显然，我们应当降低那些粗略正交条件的权重，增加可以被准确度量的正交条件的权重。由于 $\mathbf{S}^{-1}=\sigma^{-2}\mathbf{M}_{HH}^{-1}$，所以很容易使 $\mathbf{W}$ 具有如下等式：

$$\mathbf{W}^*=\mathbf{M}_{HH}^{-1} \tag{A. 1. 14}$$

从而 $\mathbf{V}$ 的表达式可以简化为：

$$\mathbf{V}^*=\sigma^2(\mathbf{M}_{XH}\mathbf{M}_{HH}^{-1}\mathbf{M}_{HX})^{-1} \tag{A. 1. 15}$$

在实际操作当中人们可以选择加权矩阵：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$\mathbf{W}_T^* = (T^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1} \tag{A.1.16}$$

当 T 增加时，$\mathbf{W}_T^*$ 收敛到 $\mathbf{W}^*$。

在这个加权矩阵下 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 的表达式就变成：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^* = [\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X}]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{y} = (\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}})^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{y} \tag{A.1.17}$$

这里，$\hat{\mathbf{X}} \equiv \mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{X}$ 关于 $\mathbf{H}$ 回归中的预测值。这就是著名的二阶段最小二乘估计(2SLS)量。该二阶段过程实际上就是：第一阶段是 $\mathbf{X}$ 关于 $\mathbf{H}$ 回归，然后再作 $\mathbf{y}$ 关于来自第一阶段的拟合值 $\hat{\mathbf{X}}$ 的回归来估计参数向量 $\boldsymbol{\theta}_0$。

另一方面，可以把 2SLS 看作第一阶段 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{y}$ 关于 $\mathbf{H}$ 回归，然后再把 $\mathbf{y}$ 的拟合值关于 $\mathbf{X}$ 的拟合值作回归；这样得到的系数估计与(A.1.17)式实际上是一致的。在这样的解释之下，第二阶段回归的决定系数 R^2 渐近地为 1，因为(A.1.1)式中误差项与工具变量正交，所以当对工具变量投影时具有零拟合值。这就意味着如果(A.1.1)式和正交条件成立，那么系数估计将渐近地不依赖于(A.1.1)式中所选择的因变量及(A.1.1)式中所选择的回归变量。也就是说，回归无论用哪种方式表达都将渐近地获得相同的系数估计。

通过把各种矩矩阵的一致估计替换进入(A.1.15)式，我们就可以估计出 2SLS 系数估计的方差协方差 $\mathbf{V}^*$，即：

$$\hat{\mathbf{V}}_T^* = \hat{\sigma}^2(T^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X})^{-1} \tag{A.1.18}$$

这里，$\hat{\sigma}^2$ 是方程误差方差的一致估计。(A.1.18)式对恰好识别的 IV 和系数的 OLS 估计都是有效的。

按上面的定义替换加权矩阵 $\mathbf{W}^*$，通常可能使用 $k\mathbf{W}^*$（这里 k 是一个正的标量）。同样，我们可以用 $k_T\mathbf{W}_T^*$ 替换 $\mathbf{W}_T^*$ 收（这里 k_T 是一个收敛于 k 的正的标量）。这样的重新标度并不会影响(A.1.17)式中工具变量的表达式。标量 k 的一种选择就是方程误差 ε_t 的方差的倒数 δ^{-2}，于是加权矩阵就等于 $\mathbf{S}^{-1}$。标量 k_T 相应的选择是 σ^{-2} 的一些一致估计 $\hat{\sigma}^{-2}$。汉森(Hansen，1982)已经证明了在这样的标度下，只要(A.1.1)式和工具变量与方程误差正交的原假设成立，T 乘以目标函数的最小值就渐近地服从自由度为$(N_H - N_X)$的卡方(χ^2)分布。

原假设的汉森检验实际上是关于在原假设下工具变量回归的残差应当与工具变量无半以及残差关于工具变量的回归应具有较小的 R^2 统计量的直观判断。为明白这一点，请注意当 $\mathbf{W}_T = (\hat{\sigma}^2 T^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}$时，最小化的目标函数为：

$$[T^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*)'\mathbf{H}](\hat{\sigma}^2 T^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}[T^{-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*)] \tag{A.1.19}$$

现在考虑残差 $\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*)$关于工具矩阵 $\mathbf{H}$ 的回归。该回归的拟合值是 $\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*)$，以及回归的 R^2 统计量收敛到与(A.1.19)式相同的极限。从而汉森的结果就意味着 T 乘以残差关于工具变量回归的 R^2 的积渐近地服从自由度为$(N_H - N_X)$的卡方(χ^2)分布。这

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

是恩格尔(Engle,1984)提出的二阶段最小二乘估计中过度识别限制的一个标准检验。

A.2 广义矩方法

汉森(Hansen,1982)提出的广义矩方法可以被理解为我们曾经讨论过的线性工具变量回归的推广。现在假定有一个模型,其中误差项定义为 $\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\theta})$,这里 $\mathbf{x}_t$ 包括了所有对模型来说有效的数据(换句话说,我们已经减少了 y_t 与 $\mathbf{x}_t$ 之间的差别),$\boldsymbol{\theta}$ 是一个具有 N_β 个系数分量的向量。误差项的定义公式实际上用三种方式对线性 IV 回归做了一般化表述:第一,$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\theta})$可以是一个具有 N_ε 个元素的列向量,而不是标量;第二,$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\theta})$可以是数据和参数的非线性函数而不是线性函数;第三,$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\theta})$可能存在异方差和序列相关而不是同方差的白噪声。上述模型模型仅告诉我们,存在真实参数 $\boldsymbol{\theta}_0$ 的一些集合满足$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\theta}_t)$与工具变量集合正交。这里的工具变量集合可以是前面所提到的$(N_H\times1)$的列向量 $\mathbf{h}_t$。

类似于(A.1.2)式,我们定义:

$$\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta})\equiv\mathbf{h}_t\otimes\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}_t,\boldsymbol{\theta}) \tag{A.2.1}$$

这里符号⊗表示两个向量的克隆涅科乘积(Kronecker product)。也就是说,$\mathbf{f}$ 是一个包含 $\mathbf{h}$ 中的每一个工具变量与 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 中每一个元素交叉乘积项的向量。从而,$\mathbf{f}$ 是一个具有 $N_f=N_\varepsilon\cdot N_H$ 个元素的列向量。类似于(A.1.3)式有:

$$\mathrm{E}[\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)]=0 \tag{A.2.2}$$

与(A.1.4)式一样,相应于(A.1.9)式中 f 的元素,我们定义包含样本平均的向量 $\boldsymbol{g}_T(\boldsymbol{\theta})$:

$$\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})=T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{f}_1(\boldsymbol{\theta}) \tag{A.2.3}$$

类似于(A.1.5)式,GMM 就是使如下二次型达到最小:

$$\mathbf{Q}_T(\boldsymbol{\theta})\equiv\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})'\mathbf{W}_T\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta}) \tag{A.2.4}$$

由于使得二次型达到最小的问题是非线性的,所以最小化解必须通过数值化方法求得。(A.2.4)式的一阶条件为:

$$\mathbf{D}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)'\mathbf{W}_T\mathbf{g}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)=0 \tag{A.2.5}$$

这里 $D_T(\theta)$是如下定义的偏微分矩阵:

$$\mathbf{D}_T(\boldsymbol{\theta})=\frac{\partial\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}} \tag{A.2.6}$$

$\mathbf{D}_T(\boldsymbol{\theta})$中第$(i,j)$的元素为$\dfrac{\partial\mathbf{g}_{Ti}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_j}$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

渐近分布理论

系数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 的渐近分布为

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T-\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}N(0,\mathbf{V}) \tag{A.2.7}$$

这里，

$$\mathbf{V}=(\mathbf{D}'_0\mathbf{W}\mathbf{D}_0)^{-1}\mathbf{D}'_0\mathbf{W}\mathbf{S}\mathbf{W}\mathbf{D}_0(\mathbf{D}'_0\mathbf{W}\mathbf{D}_0)^{-1} \tag{A.2.8}$$

对线性工具变量的情形来讲，这些表达式直接类似于(A.1.12)和(A.1.13)。在那些方程中 $\mathbf{D}_0$ 是 $\mathbf{M}_{HX}$ 的一般形式，其定义为 $\mathbf{D}_0\equiv\mathrm{E}\left[\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial\boldsymbol{\theta}_0}\right]$，$\mathbf{D}_T(\boldsymbol{\theta})$渐近收敛到 $\mathbf{D}_0$。$\mathbf{S}$ 如同(A.1.11)式所定义的

$$\mathbf{S}\equiv\lim_{T\to\infty}\mathrm{Var}\left[T^{1/2}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{f}_t[\boldsymbol{\theta}_0]\right]=\lim_{T\to\infty}\mathrm{Var}[T^{1/2}\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta}_0)] \tag{A.2.9}$$

最优加权矩阵

与线性 IV 情况完全一样，使 $\mathbf{V}$ 达到最小的最优加权矩阵就是任意标量乘以($\mathbf{S}^{-1}$。$T^{1/2}$)乘以系数估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 的渐近方差的最优矩阵是

$$\mathbf{V}^*=(\mathbf{W}'_0\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}_0)^{-1} \tag{A.2.10}$$

于是，当使用加权矩阵 $\mathbf{S}^{-1}$，T 乘以最小目标函数服从自由度为(N_f-N_β)的卡方(χ^2)分布，这里 N_f是正交条件个数，N_β 是被估计参数的个数。

当然，实际当中(A.2.8)式中 $\mathbf{S}$ 和别的量都必须被估计。为做到这一点，我们从选择加权矩阵 $\mathbf{W}_T$ 开始，加权矩阵 $\mathbf{W}_T$ 可以是单位矩阵或着由使用不同正交条件相对方差的先验信息构造的。使用已经确定了的加权矩阵 $\mathbf{W}_T$，通过最小化(A.2.4)式得到一个初始一致估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$。为估计(A.2.8)式中的 $\mathbf{V}$ 需用一致估计量替代其中的元素。$\mathbf{D}_0$ 可以由 $\mathbf{D}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}})$替代，$\mathbf{W}$ 可以由 $\mathbf{W}_T$ 替代，$\mathbf{S}$ 可以由一致估计 $\mathbf{S}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$替代。给定这些估计，我们可以构造一个新的加权矩阵 $\mathbf{W}_T^*=\mathbf{S}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)^{-1}$，再次最小化(A.2.4)式可以得到参数的第二阶段估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*$。于是，$T^{1/2}$乘以第二阶段系数估计的渐近方差可以由下式估计：

$$\hat{\mathbf{V}}_T^*=(\mathbf{D}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*)'\mathbf{S}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*)^{-1}\mathbf{D}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*))^{-1} \tag{A.2.11}$$

并且第二阶段最小化的目标函数服从自由度为(N_f-N_β)的卡方(χ^2)分布。虽然这个二阶段过程是渐近有效的，但是它迭代到参数估计和最小化的目标函数收敛还是可能的。这个过程消除了估计量关于初始加权矩阵的依赖性，并且当参数个数很大时改善了 GMM 的有限样本性质[参见弗森和佛斯特(Ferson and Foerster，1994)的文献]。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

A.3 序列相关和异方差

在实施 GMM 估计中最重要的一步是估计矩阵 $\mathbf{S}$。根据(A.2.9)式

$$\mathbf{S} = \lim_{T\to\infty} \mathrm{E}[T^{-1}(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0))(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)')]$$

$$= \boldsymbol{\Gamma}_0(\boldsymbol{\theta}_0) + \sum_{j=1}^{\infty}(\boldsymbol{\Gamma}_j(\boldsymbol{\theta}_0) + \boldsymbol{\Gamma}'_j(\boldsymbol{\theta}_0)) \tag{A.3.1}$$

这里，

$$\boldsymbol{\Gamma}_j(\boldsymbol{\theta}_0) \equiv \mathrm{E}[\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{f}_{t+1-j}(\boldsymbol{\theta}_0)'] \tag{A.3.2}$$

$\boldsymbol{\Gamma}_j(\boldsymbol{\theta}_0)$是 $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$的第 j 个自协方差矩阵。矩阵 $\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$时间平均的方差协方差矩阵，它等价于频数为零时 $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$的谱密度矩阵，并可以写成 $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$的自协方差矩阵的无限和。

如果经过若干期滞后 $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$的自协方差为零，则通过去除零自协方差，我们可以简化(A.3.1)式中 $\mathbf{S}$ 的表达式。如果相应的 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\theta}_0)$的自协方差为零，则 $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$的自协方差就为零。在前面讨论过的误差项无序列相关的线性 IV 情形中，如果 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\theta}_0)$是白噪声，则 $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$也是白噪声；在这种情形下对 $j>0$ 人们可以去除所有 $\boldsymbol{\Gamma}_j$ 的自协方差，这样 $\mathbf{S}$ 就变成 $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$的自协方差 $\boldsymbol{\Gamma}_0$。同样的结论在第 8 章所研究的单期收益的消费 CAPM 中也成立。然而，如同第 7 章所研究的具有 K 期收益的回归那样，$\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$的 $K-1$ 个自协方差是不为零的，所以 $\mathbf{S}$ 的表达式相应地会更复杂。

纽—威斯特估计量

为估计 $\mathbf{S}$ 用样本自协方差替换 $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$，$\boldsymbol{\Gamma}_j(\boldsymbol{\theta}_0)$似乎是很自然的，即：

$$\boldsymbol{\Gamma}_{j,T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T) \equiv T^{-1}\sum_{t=j+1}^{T}\mathbf{f}_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)\mathbf{f}_{t-j}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)' \tag{A.3.3}$$

然后再把(A.3.3)式代入(A.3.1)式。当然，我们必须面对两个难题：第一，在有限样本中我们只能获得有限个自协方差；要得到 $\mathbf{S}$ 的一致估计量不能让样本容量随被估的自协方差个数增长得太快。第二，不能保证由(A.3.3)式代入(A.3.1)式替换得到的 $\mathbf{S}$ 的估计量是正定的。为解决这两个难题，纽和威斯特(Newey and West，1987)提出了如下估计量：

$$\mathbf{S}_T(q,\hat{\boldsymbol{\theta}}_T) = \boldsymbol{\Gamma}_{0,T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T) + \sum_{j=1}^{q}(\frac{q-j}{q})(\boldsymbol{\Gamma}_{j,T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T) + \boldsymbol{\Gamma}'_{j,T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)) \tag{A.3.4}$$

这里，q 随着样本容量增加而增加，但增速并不太快。$q-1$ 是纽和威斯特 1987 年提出的估计量非零权中滞后长度最长的。该估计量通过权重下降的高阶自协方差保证了正

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

定性，并且由于递降权重的渐近消失而具有一致性。

在滞后阶数超过 $K-1$ 后自协方差为零的模型中，人们正在对滞后阶数 $q=K$ 的情况尝试使用纽和威斯特(Newey and West，1987)提出的估计量。当然，若 $K=1$ 也是合理的，只不过出现在估计量中的方差为 $\mathbf{\Gamma}_{0,T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$；但当 $K>1$ 时，这种方法可能使有些非零自协方差的权重急剧下降；由于对样本容量的依赖，在这种情形中使用 $q>K$ 也许更好。

尽管纽和威斯特提出的加权过程被最广泛地运用，但是包括安德鲁斯(Andrews，1991)，安德鲁斯和蒙纳汉(Andrews and Monahan，1992)，以及格兰特(Gallant，1987)在他们的研究文献中提出了另外一些估计量。汉弥尔顿(Hamilton，1994)也提出了很价值的观点。

线性工具变量情形

这里给出既适用于线性模型又适用于非线性模型的一般公式，但对线性 IV 回归模型来讲该公式会更简单一些。回到 A.1 部分，允许误差项存在序列相关和异方差。于是，方程(A.1.10)变成：

$$\mathbf{S}\equiv\lim_{T\to\infty}\mathrm{Var}[T^{-1/2}\mathbf{H}'\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)]=\lim_{T\to\infty}T^{-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{H} \tag{A.3.5}$$

这里，$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta}_0)$是$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)$的方差协方差矩阵，它可以由下式估计：

$$\mathbf{S}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)=T^{-1}\mathbf{H}'\boldsymbol{\Omega}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)\mathbf{H} \tag{A.3.6}$$

这里 $\boldsymbol{\Omega}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$是 $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta}_0)$的一个估计量。于是，方程(A.2.11)现在就变成：

$$\hat{\mathbf{V}}_T^*=(T^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\boldsymbol{\Omega}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X})^{-1} \tag{A.3.7}$$

在前面我们讨论的同方差白躁声的情形下，由于 $\boldsymbol{\Omega}=\sigma^2\mathbf{I}_T$，故而所用的估计是$\boldsymbol{\Omega}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)\equiv\hat{\sigma}^2\mathbf{I}_T$，其中，$\hat{\sigma}^2=T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$。把此代入(A.3.7)式就得到(A.1.18)式。

当误差项之间不相关但却存在异方差时，$\boldsymbol{\Omega}$ 是一个主对角元素具有不完全相同的方差的对角矩阵。对每一个元素，人们可以构造相应的样本估计值。对矩阵的任一主对角元素，$\boldsymbol{\Omega}_{T,tt}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)=\varepsilon_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)^2$，而对主对角外的其他元素，即 $s\neq t$ 有 $\boldsymbol{\Omega}_{T,ts}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)=0$。把这里产生的 $\boldsymbol{\Omega}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$代入(A.3.6)式，我们就可以得到 $\mathbf{S}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$的一个一致估计量，再把它代入(A.3.7)式就得到一致估计量 $\hat{\mathbf{V}}_T^*$。这一结果即使对 $\boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$不是 $\boldsymbol{\Omega}$ 的一致估计量也是正确的，因为被估计的 $\boldsymbol{\Omega}$ 的元素与相本容量相等。

当误差项之间存在序列相关但没有异方差时，我们可以按如下公式构造矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$的每一个元素：

$$\boldsymbol{\Omega}_{T,ts}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)=\begin{cases}T^{-1}\sum_{i=l+1}^{T}\left(\dfrac{q-l}{q}\right)\varepsilon_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)\varepsilon_{i-l}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)，如果\ l\equiv|t-s|<q \\ 0 \qquad 其他\end{cases} \tag{A.3.8}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

这里使用的是最大滞后长度为 q 的纽维和威斯特(Newey and West,1987)提出的加权过程。当然,我们可以用单位化权重来替换三角型权重 $(q-l)/q$ 而得到汉森和豪德莱克(Hansen and Hodrick,1980)提出的估计量,但却不能保证该估计量是正定的。

当误差项之间存在列相关和异方差时,我们可以按如下公式构造矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$ 的每一个元素:

$$\boldsymbol{\Omega}_{T,s}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)=\begin{cases}\left(\frac{q-l}{q}\right)\varepsilon_s(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)\varepsilon_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T), & \text{如果 } l=|t-s|<q \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{A. 3. 9}$$

这里使用的还是纽维和威斯特(Newey and West,1987)提出的加权过程。人们可以用单位化权重来替换三角形权重而得到汉森和豪德莱克(Hansen and Hodrick,1980)提出的估计量。在每一种情况下,把 $\boldsymbol{\Omega}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$ 代入(A. 3. 6)式,我们就可以得到 $\mathbf{S}$ 的一个一致估计量,再把它代入(A. 3. 7)就得到一致估计量 $\hat{\mathbf{V}}_T^*$。这一结果即使对 $\boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$ 不是 $\boldsymbol{\Omega}$ 的一致估计量也是正确的,因为被估计的 $\boldsymbol{\Omega}$ 的非零元素的增加远快于样本容量。怀特(White,1984)对存在序列相关和异异方差的线性模型给出了一个广泛适用的处理方法。

A. 4 广义矩方法和最大似然方法

根据汉密尔顿(Hamilton,1994)提出的观点,现在我们证明最大似然估计量(*MLE*)是如何被理解为广义矩估计量的(GMM)。首先我们列出一些符号。我们用 L_t 表示 $\mathbf{x}_{t+1}$ 关于 $\mathbf{x}_t$ 的历史信息和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的条件密度:

$$L_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})=L(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t,\mathbf{x}_{t-1},\cdots,\boldsymbol{\theta}) \tag{A. 4. 1}$$

我们用符号ℓ_t 表示 L_t 的对数,即条件对数似然:

$$\ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})=\log L_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta}) \tag{A. 4. 2}$$

全部数据集 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_T$ 的对数似然就是条件对数似然的总和,即:

$$\mathcal{L}=\sum_{t=1}^{T}\ell_t \tag{A. 4. 3}$$

既然 L_t 是条件密度,那么它的积分必须为 1:

$$\int L_t(\mathbf{x}_{t+1},\theta)d\mathbf{x}_{t+1}=1 \tag{A. 4. 4}$$

在一定的正则条件之下,就有 L_t 关于参数 $\boldsymbol{\theta}$ 偏微分的积分为零。这一系列简单的过程证明如下:

$$\begin{aligned}0&=\int\frac{\partial L_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}d\mathbf{x}_{t+1}=\int\frac{\partial L_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{L_t}L_t dX_{t+1}=\int\frac{\partial\ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}L_t dX_{t+1}\\&=\mathrm{E}_t\frac{\partial\ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\mathrm{E}\frac{\partial\ell_t(\mathbf{x}_t+1,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{A. 4. 5}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

条件对数似然函数关于参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的偏微分$\frac{\partial \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$是一个具有 N_β 个元素的向量，它就是著名的刻度向量(score vector)。根据(A. 4. 5)式，当数据由(A. 4. 1)式产生的话，刻度向量就具有零的条件期望。同样，它也具有零的无条件期望，其作用类似于 GMM 分布中的正交条件向量 $\mathbf{f}_t$。样本均值$(1/T)\sum_{t=1}^{T}\partial \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})/\partial\boldsymbol{\theta}$ 所起的作用类似于 GMM 分析中的 $\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})$。

参数的最大似然估计量是 Max $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})=\sum_{t=1}^{T}\ell_t$ 的解 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$。该最大化的一阶条件可以写成：

$$\mathbf{g}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\partial \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial\boldsymbol{\theta} = 0 \tag{A. 4. 6}$$

对恰好识别的模型(A. 4. 6)式赋予了 GMM 参数估计的特征。所以，在(A. 4. 5)的正交条件基础上最大似然估计 MLE 与广义矩估计 GMM 是相同的。

渐近分布理论

参数最大似然估计的渐近分布由以下结果给出：

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}_0)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,\mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)) \tag{A. 4. 7}$$

这里$\mathcal{I}$由下式给出：

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})\equiv\lim_{n\to\infty}-\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\,\partial\boldsymbol{\theta}'}\right] \tag{A. 4. 8}$$

也就是所谓信息矩阵。$\mathcal{I}$可以由相应的样本对数值来估计：

$$\hat{\mathcal{I}}_a=-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial^2\ell_t(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\theta}\,\partial\boldsymbol{\theta}'} \tag{A. 4. 9}$$

信息矩阵给出了最大值附近似然值对参数数值的敏感性的度量。如果参数数值的一个小的变动就会引起最大值附近似然值一个大的变化，那么参数可以被精确估计。由于似然函数在最大值处是平坦的，所以似然值对参数的局部敏感性可以用似然函数在最大值附近关于参数的局部二阶微分来度量和评估。

信息矩阵等式

信息矩阵的另一个估计量$\hat{\mathcal{I}}_b$ 可以用刻度向量的样本方差来表示：

$$\hat{\mathcal{I}}_b\equiv T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial\ell_t(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial\ell_t(\hat{\boldsymbol{\theta}})'}{\partial\boldsymbol{\theta}} \tag{A. 4. 10}$$

为了解$\hat{\mathcal{I}}_b$ 收敛到$\hat{\mathcal{I}}_a$相同的极限，我们用(A. 4. 5)式中第三个等式关于参数 $\boldsymbol{\theta}'$求微分得到：

$$0=\int\frac{\partial^2\ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\,\partial\boldsymbol{\theta}'}L_t dx_{t+1}+\int\frac{\partial\ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial L_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})'}{\partial\boldsymbol{\theta}}dx_{t+1}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\partial^2 \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\,\partial\boldsymbol{\theta}'} L_t dx_{t+1} + \int \frac{\partial \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})'}{\partial\boldsymbol{\theta}} L_t dx_{t+1} \\
&= \mathrm{E}_t \frac{\partial^2 \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\,\partial\boldsymbol{\theta}'} + \mathrm{E}_t \frac{\partial \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})'}{\partial\boldsymbol{\theta}} \\
&= \mathrm{E} \frac{\partial^2 \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\,\partial\boldsymbol{\theta}'} + \mathrm{E} \frac{\partial \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \ell_t(\mathbf{x}_{t+1},\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}
\qquad (A.4.11)
$$

(A. 4. 11)式就是所谓信息矩阵等式，它说明样本平均$\hat{\mathcal{I}}_a$ 和$\hat{\mathcal{I}}_b$ 的期望收敛于同一数值。在数据由(A. 4. 1)式产生的假设之下信息矩阵等式成立。

GMM 分析给出了最大似然参数估计分布的另一个公式。回到(A. 2. 11)式我们知道，GMM 估计量服从具有渐近方差估计值的渐近正态分布：

$$
\hat{\mathbf{V}}_T^* = (\mathbf{D}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*)'\mathbf{S}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*)^{-1}\mathbf{D}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*))^{-1}
$$

在这种情况下，

$$
\mathbf{D}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*) = \frac{\partial \mathbf{g}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*)}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial^2 \ell_t(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\theta}\,\partial\boldsymbol{\theta}'} = -\hat{\mathcal{I}}_a \qquad (A.4.12)
$$

而此时：

$$
S_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^*) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial \ell_t(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \ell_t(\hat{\boldsymbol{\theta}})'}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathcal{I}}_b \qquad (A.4.13)
$$

由于刻度矩阵是序列不相关的，因此 S 可以用它的样本方差来估计。从而，GMM 估计量的分布按下述式子表示：

$$
\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}_0) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,[\mathcal{I}_a(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{I}_b^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{I}_a(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}) \qquad (A.4.14)
$$

这里$\mathcal{I}_a$ 和$\mathcal{I}_b$ 是当 T 无限增加时$\mathcal{I}_a$ 和$\mathcal{I}_b$ 的极限在真实参数向量 $\boldsymbol{\theta}_0$ 处的数值。

如果模型被准确设定的话，$\mathcal{I}_a$ 和$\mathcal{I}_b$ 都将收敛于信息矩阵$\mathcal{I}$，于是(A. 4. 14)式中的极限可以简化为$(\mathcal{I}\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I})^{-1}=\mathcal{I}^{-1}$，这样就导出了(A. 4. 7)式中渐近方差的常规的表达式。所以，在这种情况下无论$\mathcal{I}_a$，或$\mathcal{I}_b$，或者$\mathcal{I}_a$ 和 $\mathcal{I}_b$ 都可以用来估计信息矩阵$\mathcal{I}$。

当然，如果模型被错误设定的话，一般$\mathcal{I}_a$ 和$\mathcal{I}_b$ 将收敛于不同的极限，相应的极限差异就可以被当作怀特(White, 1982)提出的设定检验的偏差。但是，假定正交条件成立，则错误设定的模型的最大似然估计仍然是一致的，并且若刻度向量没有序列相关，我们还可以运用一般的方差公式(A. 1. 14)。这就是怀特(White, 1982)提出的所谓半最大似然估计(quasi-maximum likelihood estimation)。

假设检验

(A. 4. 7)式和(A. 4. 14)式中的渐近方差可以被直接用来构造参数带约束的沃德(Wold)检验。这个检验的想法就是考察不带限制的参数估计是否显著地不同于带限制的参数估计，这里，不带限制的参数估计的方差计算时无须加上限制条件。

另外，我们还要用仅有的带限制模型检验约束条件。一旦约束条件加上以后，最小化

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

的 GMM 目标函数就不再等于零。在这种情况下，汉森(Hansen，1982)年提出的方法是用 T 乘以最小化的目标函数，该乘积具有自由度与约束条件个数相等的卡方(χ^2)分布，其中 T 乘以最小化的目标函数的积是：

$$T\mathbf{g}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}})'\hat{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{g}_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{A.4.15}$$

(A.4.15)式对由最大似然法估计得到的带限制模型来说，也是拉朗乘数检验(Lagrange multiplier test)。

Delta 方法

对参数估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的任意非线性函数来说，诸如泰勒定理或 Delta 方法等更复杂的推断将会被运用。如果

$$\sqrt{T}(f(\hat{\boldsymbol{\theta}})-f(\boldsymbol{\theta}))\overset{a}{\sim}\mathcal{N}(0,V_f),V_f=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}'}V_\theta\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} \tag{A.4.16}$$

(A.4.16)式实际上来自 $f(\boldsymbol{\theta})$ 在 $\boldsymbol{\theta}_0$ 附近的一阶泰勒序列展开。由于高阶项收敛到零的速度比 $1/\sqrt{T}$ 快些，所以对 $f(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ 的渐渐近分布只要一阶展开就可以了。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

参考文献

Abel, A., 1990, "Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses," in *American Economic Review* 80, *Papers and Proceedings*, 38—42.

——, 1996, "Risk Premia and Term Premia in General Equilibrium," unpublished paper, University of Pennsylvania.

Abel, A., N. G. Mankiw, L. Summers, and R. Zeckhauser, 1989, "Assessing Dynamic Efficiency: Theory and Evidence," *Review of Economic Studies*, 56, 1—20.

Acharya, S., 1988, "A Generalized Econometric Model and Tests of a Signalling Hypothesis with Tow Discrete Signals," *Journal of Finance*, 43, 413—429.

——, 1993, "Value of Latent Information: Alternative Event Study Methods," *Journal of Finance*, 48, 363—385.

Adams, K., and D. van Deventer, 1994, "Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness," *Journal of Fixed Income*, 4, 52—62.

Admati, A., and P. Pfleiderer, 1988, "A Theory of Intraday Patterns: Volume and Price Variability," *Review of Financial Studies*, 1, 3—40.

——, 1989, "Divide and Conquer: A Theory of Intraday and Day-of-the-Week Mean Effects," *Review of Financial Studies*, 2, 189—224.

Affleck-Graves, J., and B. McDonald, 1989, "Nonnormalities and Tests of Asset Pricing Theories," *Journal of Finance*, 44, 889—908.

Affleck-Graves, J., S. Hegde, and R. Miller, 1994, "Trading Mechanisms and the Components of the Bid-Ask Spread," *Journal of Finance*, 49, 1471—1488.

Ainslie, G., 1992, *Picoeconomics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Aitchison, J., and S. Silvey, 1957, "The Generalization of Probit Analysis to the Case of Multiple Responses," *Biometrika*, 44, 131—140.

Aït-Sahalia, Y., 1993, "Nonparametric Functional Estimation with Applications to Financial Models," unpublished Ph. D. dissertation, Department of Economics, Massachusetts Institute of Technology.

——, 1996a, "Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities," *Econometrica*, 64, 527—560.

——, 1996b, "Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate," *Review of Financial Studies*, 9, 385—426.

Aït-Sahalia, Y., and A. Lo, 1996, "Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices", Working Paper LFE-1015-96, MIT Laboratory for Financial Engineering.

Aiyagari, S., and M. Gertler, 1991, "Asset Returns with Transaction Costs and Uninsured Individual

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Risk: A Stage Ⅲ Exercise," *Journal of Monetary Economics*, 27, 309—331.

Aldous, D., 1989, *Probability Approximations via the Poisson Clumping Heuristic*, Springer Verlag, New York.

Aldous, D., and P. Diaconis, 1986, "Shuffling Cards and Stopping Times," *American Mathematical Monthly*, 8, 333—348,

Alexander, S., 1961, "Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks," *Industrial Management Review*, 2, 7—26.

——, 1964, "Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks, No. 2," in P. Cootner (ed.), *The Random Character of Stock Market Prices*, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, MA.

Amihud, Y., and H. Mendelson, 1980, "Dealership Markets: Market Making with Uncertainty," *Journal of Financial Economics*, 8, 31—54.

——, 1986, "Asset Pricing and the Bid-Ask Spread, " *Journal of Financial Economics*, 17, 223—250.

——, 1987, "Trading Mechanisms and Stock Returns: An Empirical Investigation," *Journal of Finance*, 42, 533—553.

Amin, K. and V. Ng, 1993, "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility," *Journal of Finance*, 48, 881—910.

Anderson, T., 1984, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis* (2nd ed.), John Wiley and Sons, New York.

Andrews, D., 1991, "Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation," *Econometrica*, 59, 817—858.

Andrews, D., and J. Monahan, 1992, "An Improved Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimator," *Econometrica*, 60, 953—966.

Arnold, L., 1974, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, John Wiley and Sons, New York.

Arrow, K., 1964, "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing," *Review of Economic Studies*, 31, 91—96.

Aschauer, D., 1985, "Fiscal Policy and Aggregate Demand, " *American Economic Review*, 75, 117—127.

Ashford, J., 1959, "An Approach to the Analysis of Data for Semi-Quantal Responses in Biological Response," *Biometrics*, 26, 535—581.

Ashley, J., 1962, "Stock Prices and Changes in Earnings and Dividends: Some Empirical Results," *Journal of Political Economy*, 82—85.

Asquith, P., and D. Mullins, 1986, "Equity Issues and Offering Dilution," *Journal of Financial Economics*, 15, 61—89.

Atchison, M., K. Butler, and R. Simonds, 1987, "Nonsynchronous Security Trading and Market Index Autocorrelation," *Journal of Finance*, 42, 111—118.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Bachelier, L., 1900, "Theory of Speculation," in Cootner, P. (ed.), *The Random Character of Stock Market Prices*, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, MA, 1964; Reprint.

Backus, D., 1993, "Cox-Ingersoll-Ross in Discrete Time, "unpublished paper, New York University.

Backus, D., and S. Zin, 1994, "Reverse Engineering the Yield Curve," Working Paper 4676, NBER, Cambridge, MA.

Backus, D., S. Foresi, and S. Zin, 1996, "Arbitrage Opportunities in Arbitrage-Free Models of Bond Pricing, "Working Paper 5638, NBER, Cambridge, MA.

Backus, D., A. Gregory, and S. Zin, 1989, "Risk Premiums in the Term Structure: Evidence from Artificial Economics," *Journal of Monetary Economics*, 24, 371—399.

Badrinath, S., Kale, J., and T. Noe, 1995, "Of Shepherds, Sheep, and the CrossAutocorrelations in Equtiy Returns, "*Review of Financial Studies*, 8, 401—430.

Bagehot, W., (a. k. a. Jack Treynor), 1971, "The Only Game in Town," *Financial Analysts Journal*, 22, 12—14.

Baker, C., 1956, "Effective Stock Splits," *Harvard Business Review*, 34(1), January—February, 101—106.

——, 1957, "Stock Splits in a Bull Market," *Harvard Business Review*, 35(3), May—June, 72—79.

——, 1958, "Evaluation of Stock Dividends," *Narvard Business Review*, 36(4), July—August, 99—114.

Bakshi, G., and Z. Chen, 1996, "The Spirit of Capitalism and Stock Market Prices," *American Economic Review*, 86, 133—157.

Balduzzi, P., G. Bertola, and S. Foresi, 1993, "A Model of Target Changes and the Term Structure of Interest Rates," Working Paper 4347, NBER, Cambridge, MA.

Ball, C., 1998, "Estimation Bias Induced by Discrete Security Prices," *Journal of Finance*, 43, 841—865.

Ball, C., and A. Roma, 1994, "Stochastic Volatility Option Pricing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 589—607.

Ball, C., and W. Torous, 1983, "A Simplified Jump Process for Common Stock Returns," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, 53—65.

——, 1985, "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing," *Journal of Finance*, 40, 155—174.

——, 1988, "Investigating Security-Price Performance in the Presence of Event-Date Uncertainty," *Journal of Financial Economics*, 22, 123—154.

Ball, R., and P. Brown, 1968, "An Empirical Evaluation of Accounting Income, Numbers," *Journal of Accounting Research*, 159—178.

Ball, C., W. Torous, and A. Tschoegl, 1985, "The Degree of Price Resolution: The Case of the Gold Market," *Journal of Futures Markets*, 5, 29—43.

Banz, R., 1981, "The Relation between Return and Market Value of Common Stocks," *Journal of Fi-*

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

nancial Economics, 9, 3—18.

Banz, R., and M. Miller, 1978, "Prices for State-Contingent Claims: Some Estimates and Applications," *Journal of Business*, 51, 653—672.

Barberis, N., A. Shleifer, and R. Vishny, 1996, "A Model of Investor Sentiment with both Underreaction and Overreaction," unpublished paper, University of Chicago and Harvard University.

Barclay, M., and R. Litzenberger, 1988, "Announcement Effects of New Equity Issues and the Use of Intraday Price Data," *Journal of Financial Economics*, 21, 71—100.

Barr, D., and J. Campbell, 195, "Inflation, Real Interest Rates, and the Bond Market: A Study of UK Nominal and Index-Linked Government Bond Prices," Discussion Paper 1732, Harvard Institute of Economic Research, Harvard University.

Barron, A., 1993, "Universal Approximation Bounds for Superpositions of a Sigmoidal Function," *IEEE Trans. Info. Theory*, 39, 930—945.

——, 1994, "Approximation and Estimation Bounds for Artificial Neural Networks," *Machine Learning*, 14, 115—133.

Barron, A., and R. Barron, 1988, "Statistical Learning Networks: A Unifying View," in *20th Symposium on the Interface: Computing Science and Statistics*, pp. 192—203, Reston, Virginia.

Barsky, R., and J. De Long, 1993, "Why Does the Stock Market Fluctuate?," *Quarterly Journal of Economics*, 108, 291—311.

Basu, S., 1977, "The Investment Performance of Common Stocks in Relation to Their Price to Earnings Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis," *Journal of Finance*, 32, 663—682.

Beckers, S., 1980, "The Constant Elasticity of Variance Model and Its Implications for Option Pricing," *Journal of Finance*, 35, 661—673.

——, 1983, "Variances of Security Price Returns Based on High, Low, and Closing Prices," *Journal of Business*, 56, 97—112.

Benartzi, S., and R. Thaler, 1995, "Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle," *Quarterly Journal of Economics*, 110, 73—92.

Benston, G., and R. Hagerman, 1974, "Determinants of Bid-Asked Spreads in the Over-the-Counter Market," *Journal of Financial Economics*, 1, 353—364.

Benveneto, R., 1984, "The Occurrence of Sequence Patterns in Ergodic Markov Chains," *Stochastic Processes and Their Applications*, 17, 369—373.

Bernard, V., 1987, "Cross-Sectional Dependence and Problems in Inference in Market-Based Accounting Research," *Journal of Accounting Research*, 25, 1—48.

Berndt, E., B. Hall, R. Hall, and J. Hausman, 1974, "Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models," *Annals of Economic and Social Measurement*, 3, 653—665.

Bernstein, P., 1992, *Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street*, Free Press, New, York.

Bertsimas, D., and A. Lo, 1996, "Optimal Control of Execution Costs," working Paper LFE-1025-96,

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Massachusetts Institute of Technology Laboratory for Financial Engineering, Cambridge, MA.

Bertsimas, D. , L. Kogan, and A. Lo, 1996, "When Is Time Continuous?", Working Paper LFE-1045-96, Massachusetts Institute of Technology Laboratory for Financial Engineering.

Bhattacharya, M. , 1983, "Transactions Data Tests of Efficiency of the Chicago Board Options Exchange," *Journal of Financial Economics*, 12, 181—185.

Bick, A. , 1990, "On Viable Diffusion Price Processes of the Market Portfolio," *Journal of Finance*, 45, 673—689.

Bierwag, G. , G. Kaufman, and A. Toevs(eds.), 1983, *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, JAI Press, Westport, CT.

Biggans, J. ,and C. Cannings, 1987, "Markov Renewal Processes, Counters and Repeated Sequences in Markov Chains," *Advances in Applied Probability*, 19, 521—545.

Billingsley, P. , 1968, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley and Sons, New York.

Black, F. , 1971, "Toward a Fully Automated Stock Exchange," *Financial Analysts Journal*, July—August, 29—44.

——, 1972, "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing," *Journal of Business*, 45, July, 444—454.

——,1976, "Studies of Stock Price Volatility Changes," in *Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economics Statistics Section*, *American Statistical Association*, pp. 177—181.

——,1993, "Return and Beta," *Journal of Portfolio Management*, 20,8—18.

Black, F. , and P. Karasinski, 1991, "Bond and Option Pricing when Short Rates Are Lognormal," *Financial Analysts Journal*, July—August, 52—59.

Black, F. , and M. Scholes, 1972, "The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency," *Journal of Finance*, 27,399—418.

——,1973,"The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, 637—654.

Black, F. , E. Derman, and W. Toy, 1990, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options," *Financial Analysts Journal*, January—February, 33—39.

Black, F. , M. Jensen, and M. Scholes, 1972, "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests,"in Jensen,M. (ed). , *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger, New York.

Blanchard, O. , and M. Watson, 1982, "Bubbles, Rational Expectations and Financial Markets,"in P. Wachtel(ed.), *Crises in the Economic and Financial Structure: Bubbles, Bursts, and Shocks*, Lexington, Lexington,MA.

Blattberg, R. , and N. Gonedes, 1974, "A Comparison of Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices," *Journal of Business*, 47,244—280.

Blume, M. , and I. Friend, 1973, "A New Look at the Capital Asset Pricing Model," *Journal of Finance*, 28,19—33.

——,1978, *The Changing Role of the Individual Investor*, John Wiley and Sons, New York.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Blume, M. , and R. Stambaugh, 1983, "Biases in Computed Returns: An Application to the Size Effect," *Journal of Financial Economics*, 12, 387—404.

Blume, L. , D. Easley, and M. O'Hara, 1994, "Market Statistics and Technical Analysis: The Role of Volume," *Journal of Finance*, 49, 153—181.

Blume, M. , C. MacKinlay, and B. Terker, 1989, "Order Imbalances and Stock Price Movements on October 19 and 20,1987," *Journal of Finance*, 44, 827—848.

Boehmer, E. , J. Musumeci, and A. Poulsen, 1991, "Event-Study Methodology under Conditions of Event Induced Variance," *Journal of Financial Economics*, 30, 253—272.

Boldrin, M. , and M. Woodford, 1990, "Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos: A Survey," *Journal of Monetary Economics*, 25,189—222.

Bollerslev, T. , 1986, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31,307—327.

——,1987,"A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return," *Review of Economics and Statistics*, 69,542—547.

——,1990, "Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach," *Review of Economics and Statistics*, 72,498—505.

Bollerslev,T. , and R. Engle, 1993, "Common Persistence in Conditional Variances," *Econometrica*,61, 166—187.

Bollerslev, T. , and J. Wooldridge, 1992, "Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances,"*Econometric Reviews*, 11, 143—172.

Bollerslev, T. , R. Chou, and K. Kroner, 1992,"ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence,"*Journal of Econometrics*,52,5—59.

Bollerslev, T. ,R. Engle, and D. Nelson,1994, "ARCH Models," in R. Engle and D. McFadden(eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol, Ⅳ, Elsevier, Amsterdam.

Boollerslev, T. , R. Engle, and J. Wooldridge,1988,"A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances,"*Journal of Political Economy*, 96, 116—131.

Bonomo, Marco, and René Garcia,1993,"Disappointment Aversion as a Solution to the Equity Premium and the Risk-Free Rate Puzzles,"CRDE Discussion Paper 2793, University of Montreal.

Boudoukh, J. , and M. Richardson, 1994, "The Statistics of Long-Horizon Regressions Revisited," *Mathematical Finance*, 4, 103—119.

Boudoukh, J. , Richardson, M. , Stanton, R. and R. Whitelaw, 1995, "Pricing Mortgage Backed Securities in a Multifactor Interest Rate Environment: A Multivariate Density Estimation Approach," working paper, Stern School of Business, New York University.

Boudoukh, J. , M. Richardson, and R. Whitelaw, 1994, "A Tale of Three Schools: Insights on Autocorrelations of Short-Horizon Stock Returns,"*Review of Financial Studies*, 7, 539—573.

Box, G. , and D. Cox,1964,"An Analysis of Transformations,"*Journal of the Royal Statistical Society*, Series B(26),211—243.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Box, G., and D. Pierce, 1970, "Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models," *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1509—1526.

Boyle, P., 1977, "Options: A Monte Carlo Approach," *Journal of Financial Economics*, 4, 323—338.

——, 1988, "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1—12.

Brainard, W., W. Nelson, and M. Shapiro, 1991, "The Consumption Beta Explains Expected Returns at Long Horizons," unpublished paper, Yale University and University of Michigan.

Branch, B., and W. Freed, 1977, "Bid-Asked Spreads on the AMEX and the Big Board," *Journal of Finance*, 32, 159—163.

Braun, P., D. Nelson, and A. Sunier, 1995, "Good News, Bad News, Volatility, and Betas," *Journal of Finance*, 50, 1575—1603.

Breeden, D., 1979, "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities," *Journal of Financial Economics*, 7, 265—296.

Breeden, D., and R. Litzenberger, 1978, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices," *Journal of Business*, 51, 621—651.

Breeden, D., M. Gibbons, and R. Litzenberger, 1989, "Empirical Tests of the Consumption-Oriented CAPM," *Journal of Finance*, 44, 231—262.

Breen, W., and R. Korajczyk, 1993, "On Selection Biases in Book-to-Market Based Tests of Asset Pricing Models," Working Paper 167, Northwestern University, Evanston, IL.

Brennan, M., 1979, "The Pricing of Contingent Claims in Discrete-Time Models," *Journal of Finance*, 34, 53—68.

Brennan, M., and T. Copeland, 1988, "Stock Splits, Stock Prices, and Transaction Costs," *Journal of Financial Economics*, 22, 83—101.

Brennan, M., and E. Schwartz, 1977a, "Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion," *Journal of Finance*, 32, 1699—1715.

——, 1977b, "The Valuation of American Put Options," *Journal of Finance*, 32, 449—462.

——, 1978, "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, 461—474.

——, 1979, "A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds," *Journal of Banking and Finance*, 3, 133—155.

Brennan, M., N. Jegadeesh, and B. Swaminathan, 1993, "Investment Analysis and the Adjustment of Stock Prices to Common Information," *Review of Financial Studies*, 6, 799—824.

Brenner, R., R. Harjes, and K. Kroner, 1996, "Another Look at Alternative Models of the Short-Term Interest Rate," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, 85—107.

Brock, W., 1986, "Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version," *Journal of Economic Theory*, 40, 168—195.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Brock, W., and C. Sayers, 1988, "Is The Business Cycle Characterized By Deterministic Chaos?", *Journal of Monetary Economics*, 22, 71—90.

Brock., W., W. Dechert, and J. Scheinkman, 1987, "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension," unpublished paper, University of Wisconsin at Madison, University of Houston, and University of Chicago.

Brock, W., J. Lakonishok, and B. LeBaron, 1992, "Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns," *Journal of Finance*, 47, 1731—1764.

Brodsky, B., 1993. *Nonparametric Methods in Change-Point Problems*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Bronfman, C., 1991, "From Trades to Orders on the NYSE: Pitfalls in Inference Using Transactions Data," working paper, Department of Finance and Real Estate, College of Business and Public Administration, University of Arizona, Tucson, AZ.

Broomhead, D., and D. Lowe, 1988, "Multivariable Functional Interpolation and Adaptive Networks," *Complex Systems*, 2, 321—355.

Brown, S., and P. Dybvig, 1986, "The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 41, 617—632.

Brown, D., and R. Jennings, 1989, "On Technical Analysis," *Review of Financial Studies*, 2, 527—552.

Brown, R., and S. Schaefer, 1991, "Interest Rate Volatility and the Term Structure," unpublished paper, London Business School.

——, 1994, "The Term Structure of Real Interest Rates and the Cox, Ingersoll, and Ross Model," *Journal of Financial Economics*, 35, 3—42.

Brown, S., and J. Warner, 1980, "Measuring Security Price Performance," *Journal of Financial Economics*, 8, 205—258.

——, 1985, "Using Daily Stock Returns: The Case of Event Studies," *Journal of Financial Economics*, 14, 3—31.

Brown, S., and M. Weinstein, 1985, "Derived Factors in Event Studies," *Journal of Financial Economics*, 14, 491—495.

Brown, S., W. Goetzmann, and S. Ross, 1995, "Survival," *Journal of Finance*, 50, 853—873.

Burnside, C., 1994, "Hansen-Jagannathan Bounds as Classical Tests of Asset Pricing Models," *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 57—79.

Campbell, C., and C. Wasley, 1993, "Measuring Security Price Performance Using Daily NASDAQ Returns," *Journal of Financial Economics*, 33, 73—92.

Campbell, J., 1986, "Bond and Stock Returns in a Simple Exchange Model," *Quarterly Journal of Economics*, 101, 785—803.

——, 1987, "Stock Returns and the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 18, 373—399.

——, 1991, "A Variance Decomposition for Stock Returns," *Economic Journal*, 101, 157—179.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

——,1993a,"Intertemporal Asset Pricing without Consumption Data," *American Economic Review*, 83, 487—512.

——,1993b,"Why Long Horizons? A Study of Power against Persistent Alternatives," unpublished paper, Princeton University.

——,1995,"Some Lessons from the Yield Curve," *Journal of Economic Perspectives*, 9(3),129—152.

——,1996a,"Understanding Risk and Return," *Journal of Political Economy*, 104,298—345.

——,1996b,"Consumption and the Stock Market: Interpreting International Evidence," NBER Working Paper 5610, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA.

Campbell, J., and J. Ammer, 1993, "What Moves the Stock and Bond Markets? A Variance Decomposition for Long-Term Asset Returns," *Journal of Finance*, 48,3—37.

Campbell, J., and J. Cochrane, 1995, "By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior," unpublished paper, Harvard University and University of Chicago.

Campbell, J., and J. Hentschel, 1992, "No News Is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns", *Journal of Financial Economics*, 31, 281—318.

Campbell, J., and H. Koo, 1996, "A Comparison of Numerical and Analytical Approximate Solutions to an Intertemporal Consumption Choice Problem," *Journal of Economic Dynamics and Control*, forthcoming.

Campbell, J., and A. Kyle, 1993, "Smart Money, Noise Trading, and Stock Price Behavior," *Review of Economic Studies*, 60,1—34.

Campbell, J., and N. G. Mankiw, 1987, "Are Output Fluctuations Transitory?", *Quarterly Journal of Economics*, 102, 857—880.

——,1990, "Permanent Income, Current Income, and Consumption," *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 265—278.

Campbell, J., and P. Perron, 1991, "Pitfalls and Opportunities: What Macroeconomists Should Know about Unit Roots," *NBER Macroeconomics Annual*, 6, 141—201.

Campbell, J., and R. Shiller, 1987, "Cointegration and Tests of Present Value Models," *Journal of Political Economy*, 95,1062—1087.

——,1988a, "The Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors," *Review of Financial Studies*, 1,195—227.

——,1988b, "Stock Prices, Earnings, and Expected Dividends," *Journal of Finance*, 43,661—676.

——,1991, "Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View," *Review of Economic Studies*, 58, 495—514.

——,1996, "A Scorecard for Indexed Government Debt," *NBER Macroeconomics Annual*, forthcoming.

Campbell, J., S. Grossman, and J. Wang, 1993, "Trading Volume and Serial Correlation in Stock Returns," *Quarterly Journal of Economics*, 108,905—939.

Carlstein, E., H. Muller, and D. Siegmund, eds., 1994, *Change-Point Problems*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Carleton, W., and I. Cooper, 1976, "Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 31, 1067—1083.

Carverhill, A., 1988, "Numerical Methods in Pricing,"Preprint 88/1, Financial Options Research Centre, University of Warwick, UK.

Carverhill, A., and N. Webber, 1988, "American Options: Validation of Numerical Methods,"Preprint 88/2, Financial Options Research Centre, University of Warwick, UK.

Cecchetti, S., P. Lam, and N. Mark, 1990, "Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices," *American Economic Review*, 80, 398—418.

——, 1994, "Testing Volatility Restrictions on Intertemporal Marginal Rates of Substitution Implied by Euler Equations and Asset Returns," *Journal of Finance*, 49, 123—152.

Chamberlain, G., 1983a, "Funds, Factors, and Diversification in Arbitrage Pricing Models," *Econometrica* 51, 1305—1323.

——, 1983b, "A Characterization of the Distributions that Imply Mean-Variance Utility Functions," *Journal of Economic Theory*, 29, 1985—201.

Chamberlain, G., and M. Rothschild, 1983, "Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets," *Econometrica*, 51, 1281—1304.

Chan, K., 1988, "On the Contrarian Investment Strategy," *Journal of Business*, 61, 147—163.

Chan, K., N. Chen, and D. Hsieh, 1985, "An Exploratory Investigation of the Firm Size Effect," *Journal of Financial Economics*, 14, 451—472.

Chan, K., W. Christie, and P. Schultz, 1995, "Market Structure and the Intraday Evolution of Bid-Ask Spreads for NASDAQ Securities," *Journal of Business*, 68, 35—60.

Chan, K., G. Karolyi, F. Longstaff, and A. Sanders, 1992, "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate," *Journal of Finance*, 47, 1209—1227.

Chan, L., and J. Lakonishok, 1993a, "Are the Reports of Beta's Death Premature?", *Journal of Portfolio Management*, 19, 51—62.

——, 1993b, "Institutional Trades and Intra-Day Stock Price Behavior," *Journal of Financial Economics*, 33, 173—199.

——, 1995, "The Behavior of Stock Prices around Institutional Trades," *Journal of Finance*, 50, 1147—1174.

Chen, H., 1991a, "Estimation of a Projection-Pursuit Type Regression Model," *Annals of Statistics*, 19, 142—157.

Chen, N., 1983, "Some Empirical Tests of Arbitrage Pricing," *Journal of Finance*, 38, 1393—1414.

Chen, N., 1991b, "Financial Investment Opportunities and the Macroeconomy, " *Journal of Finance*, 46, 529—554.

Chen, N., and J. Ingersoll, 1983, "Exact Pricing in Linear Factor Models with Finitely Many Assets," *Journal of Finance*, 38, 985—988.

Chen, N., R. Roll, and S. Ross, 1986, "Economic Forces and the Stock Market," *Journal of Business*,

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

59, 383—403.

Chiras, D., and S. Manaster, 1978, "The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency," *Journal of Financial Economics*, 6, 213—234.

Cho, D., and E. Frees, 1988, "Estimating the Volatility of Discrete Stock Prices," *Journal of Finance*, 43, 451—466.

Choi, J., D. Salandro, and K. Shastri, 1988, "On the Estimation of Bid-Ask Spreads: Theory and Evidence," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, 219—230.

Christie, A., 1982, "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage, and Interest Rate Effects," *Journal of Financial Economics*, 10, 407—432.

Christie, W., and P. Schultz, 1994, "Why Do NASDAQ Market Makers Avoid Odd Eighth Quotes?", *Journal of Finance*, 49, 1813—1840.

Christie, W., J. Harris, and P. Schultz, 1994, "Why Did NASDAQ Market Makers Stop Avoiding Odd-Eighth Quotes?," *Journal of Finance*, 49, 1841—1860.

Chung, C., and A. Goldberger, 1984, "Proportional Projects in Limited Dependent Variables Models," *Econometrica*, 52, 531—534.

Chung, K., and R. Williams, 1990, *Introduction to Stochastic Integration* (2d ed.), Birkhäuser, Boston, MA.

Clark, P., 1973, "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices," *Econometrica*, 41, 135—156.

Clewlow, L., 1990, "Finite Difference Techniques for One and Two Dimensional Option Valuation Problems," Preprint 90/10, Financial Options Research Centre, University of Warwick, UK.

Cochrane, J., 1988, "How Big Is the Random Walk in GNP?," *Journal of Political Economy*, 96, 893—920.

——, 1991, "Volatility Tests and Efficient Markets: A Review Essay," *Journal of Monetary Economics*, 27, 463—487.

Cochrane, J., and L. Hansen, 1992, "Asset Pricing Explorations for Macroeconomics," in *NBER Macroeconomics Annual* 1992, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, MA, 115—165.

Cohen, K., G. Hawawini, S. Maier, R. Schwartz, and D. Whitcomb, 1983a, "Estimating and Adjusting for the Intervalling-Effect Bias in Beta," *Management Science*, 29, 135—148.

——, 1983b, "Friction in the Trading Process and the Estimation of Systematic Risk," *Journal of Financial Economics*, 12, 263—278.

Cohen, K., S. Maier, R. Schwartz, and D. Whitcomb, 1978, "The Returns Generation Process, Returns Variance, and the Effect of Thinness in Securities Markets," *Journal of Finance*, 33, 149—167.

——, 1979, "On the Existence of Serial Correlation in an Efficient Securities Market," *TIMS Studies in the Management Sciences*, 11, 151—168.

——, 1981, "Transaction Costs, Order Placement Strategy and Existence of the Bid-Ask Spread," *Journal of Political Economy*, 89, 287—305.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

——,1986, *The Microstructure of Securities Markets*, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, NJ.

Collins, D. , and W. Dent, 1984, "A Comparison of Alternative Testing Methodologies Used In Capital Market Research," *Journal of Accounting Research*, 22, 48—84.

Connor, G. , 1984, "A Unified Beta Pricing Theory," *Journal of Economic Theory*, 34, 13—31.

Connor, G. , and R. Korajczyk, 1986, "Performance Measurement with the Arbitrage Pricing Theory: A New Framework for Analysis, " *Journal of Financial Economics*, 15,373—394.

——,1988, "Risk and Return in an Equilibrium APT: Application of a New Test Methodology," *Journal of Financial Economics*, 21,255—290.

——,1993, "A Test for the Number of Factors in an Approximate Factor Structure," *Journal of Finance*, 48, 1263—1291.

Conrad, J. , and G. Kaul, 1993, "Long-Term Market Overreaction or Biases in Computed Returns?", *Journal of Finance*, 48,39—63.

Conrad, J. , G. Kaul, and M. Nimalendran, 1991, "Components of Short-Horizon Individual Security Return," *Journal of Financial Economics*, 29,365—384.

Constantinides, G. , 1982, "Intertemporal Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and without Demand Aggregation," *Journal of Business*, 55,253—268.

——,1986, "Capital Market Equilibrium with Transaction Costs," *Journal of Political Economy*, 94, 842—862.

——,1990, "Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle, " *Journal of Political Economy*, 98,519—543.

——,1992, "A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates," *Review of Financial Studies*, 5,531—552.

Constantinides, G. , and D. Duffie, 1996, "Asset Pricing with Heterogeneous Consumers," *Journal of Political Economy*, 104,219—240.

Cootner, P. (ed.), 1964, *The Random Character of Stock Market Prices*, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, MA.

Copeland, T. , and D. Galai, 1983, "Information Effects on the Bid-Ask Spread," *Journal of Finance*, 38,1457—1469.

Corrado, C. , 1989, "A Nonparametric Test for Abnormal Security Price Performance in Event Studies," *Journal of Financial Economics*, 23,385—395.

Courtadon, G. , 1982, "A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, 697—703.

Cowles, A. , 1933, "Can Stock Market Forecasters Forecast?", *Econometrica*, 1,309—324.

——,1960, "A Revision of Previous Conclusions Regarding Stock Price Behavior," *Econometrica*, 28, 909—915.

Cowles, A. , and H. Jones, 1937, "Some A Posteriori Probabilities in Stock Market Action, " *Econometrica*, 5, 280—294.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Cox, D., and H. Miller, 1965, *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman and Hall, London.

Cox, J., 1975, "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions," unpublished lecture notes, Graduate, School of Business, Stanford University.

Cox, J., and S. Ross, 1976, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3, 145—166.

Cox, J., and M. Rubinstein, 1985, *Options Markets*, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, New Jersey.

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross, 1981a, "A Reexamination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 36, 769—799.

——, 1981b, "The Relation between Forward Prices and Futures Prices," *Journal of Financial Economics*, 9, 321—346.

——, 1985a, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53, 385—408.

——, 1985b, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica*, 53, 363—384.

Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein, 1979, "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7, 229—264.

Crack, T. and O. Ledoit, 1996, "Robust Structure Without Predictability: The 'Compass Rose' Pattern of the Stock Market," *Journal of Finance*, 51, 751—762.

Craig, S., J. Kohlase, and D. Papell, 1991, "Chaos Theory and Microeconomics: An Application to Model Specification and Hedonic Estimation," *Review of Economics and Statistics*, 73, 208—215.

Cumby, R., and D. Modest, 1987, "Testing for Market Timing Ability: A Framework for Forecast Evaluation," *Journal of Financial Economics*, 19, 169—190.

Cutler, D., J. Poterba, and L. Summers, 1991, "Speculative Dynamics," *Review of Economic Studies*, 58, 529—546.

Cybenko, G., 1989, "Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function," *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2, 303—314.

Dann, L., and C. James, 1982, "An Analysis of the Impact of Deposit Rate Ceilings on the Market Values of Thrift Institutions," *Journal of Finance*, 37, 1259—1275.

David, F., and D. Barton, 1962, *Combinatorial Chance*, Hafner, New York.

Davies, R., and D. Harte, 1987, "Tests for Hurst Effect," *Biometrika*, 74, 95—101.

Davis, D., and C. Holt, 1993, *Experimental Economics*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Davis, M., and A. Norman, 1990, "Portfolio Selection with Transaction Costs," *Mathematics of Operations Research*, 15, 676—713.

Day, R., 1983, "The Emergence of Chaos from Classical Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, 98, 201—214.

Deaton, A., and M. Irish, 1984, "Statistical Models for Zero Expenditures in Household Budgets," *Journal of Public Economics*, 23, 59—80.

DeBondt, W., and R. Thaler, 1985, "Does the Stock Market Overreact?", *Journal of Finance*, 40, 793

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

—805.

——,1987,"Further Evidence on Investor Overreaction and Stock Market Seasonality,"*Journal of Finance*, 42,557—582.

Debreu, G. ,1959,*Theory of Value*, John Wiley and Sons, New York.

DeLong,B. , A. Shleifer, L. Summers, and R. Waldmann, 1990a,"Positive Feedback Investment Strategies and Destabilizing Speculation,"*Journal of Finance*, 45, 379—396.

——,1990b,"Noise Trader Risk in Financial Markets,"*Journal of Political Economy*,98,703—738.

Demsetz, H. , 1968,"The Cost of Transacting,"*Quarterly Journal of Economics*, 82,33—53.

Derman, E. , and I. Kani, 1994, "Riding on the Smile,"*RISK*,7,February, 32—39.

Dhrymes, P. , I. Friend, B. Gultekin, and M. Gultekin, 1984, "A Critical Reexamination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory,"*Journal of Finance*,39,323—346.

Diaconis, P. , 1988,*Group Representations in Probability and Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.

Diaconis, P. , and M. Shahshahani, 1984,"On Nonlinear Functions of Linear Combinations,"*SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*,5(1),175—191.

Diamond, P. ,1965,"National Debt in a Neoclassical Growth Model,"*American Economic Review*, 55, 1126—1150.

Diba, B. , and H. Grossman,1988,"The Theory of Rational Bubbles in Stock Prices,"*Economic Journal*, 98,746—757.

Dickey,D. , and W. Fuller, 1979, "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root,"*Journal of the American Statistical Association*, 74, 427—431.

Dimson, E. , 1979, "Risk Measurement When Shares Are Subject to Infrequent Trading,"*Journal of Financial Economics*, 7,197—226.

Ding,Z. , C. Granger, and R. Engle, 1993,"A Long Memory Property of Stock Returns and a New Model,"*Journal of Empirical Finance*, 1,83—106.

Dolley, J. , 1933, "Characteristics and Procedure of Common, Stock Split-Ups,"*Harvard Business Review*, 316—326.

Donaldson, R. , and M. Kamstra, 1996, "A New Dividend Forecasting Procedure that Rejects Bubbles in Asset Prices: The Case of 1929's Stock Crash,"*Review of Financial Studies*, 9,333—383.

Donoho, D. , and I. Johnstone, 1989. "Projection-Based Approximation and A Duality with Kernel Methods,"*Annals of Statistics*, 17, 58—106.

Duffie,D. , 1992,*Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Duffie, D. , and C. Huang, 1985, "Implementing Arrow-Debreu Equilibria by Continuous Trading of Few Long-Lived Securities,"*Econometrica*, 53,1337—1356.

Duffie, D. , and R. Kan, 1993, "A Yield-Factor Model of Interest Rates,"unpublished paper, Stanford University.

Dufour, J. , 1981,"Rank Tests for Serial Dependence,"*Journal of Time Series Analysis*, 2,117—128.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Dufour, J., and R. Roy, 1985, "Some Robust Exact Results on Sample Autocorrelations and Tests of Randomness," *Journal of Econometrics*, 29, 257—273.

Dunn, K., and K. Singleton, 1986, "Modelling the Term Structure of Interest Rates under Habit Formation and Durability of Goods," *Journal of Financial Economics*, 17, 27—55.

Dupire, B., 1994, "Pricing with a Smile," *RISK*, 7, January, 18—20.

Durlauf, S., and R. Hall, 1989, "Measuring Noise in Stock Prices," unpublished paper, Stanford University.

Durlauf, S., and P. Phillips, 1988, "Trends Versus Random Walks in Time Series Analysis," *Econometrica*, 56, 1333—1357.

Dybvig, P., 1985, "An Explicit Bound on Individual Assets' Deviations from APT Pricing in a Finite Economy," *Journal of Financial Economics*, 12, 483—496.

——, 1989, "Bond and Bond Option Pricing Based on the Current Term Structure," unpublished paper, Washington University.

Dybvig, P., and J. Ingersoll, 1982, "Mean-Variance Theory in Complete Markets," *Journal of Business*, 55, 233—252.

Dybvig, P., and S. Ross, 1985, "Yes, The APT Is Testable," *Journal of Finance*, 40, 1173—1188.

Dybvig, P., J. Ingersoll, Jr., and S. Ross, 1996, "Long Forward and Zero-Coupon Rates Can Never Fall," *Journal of Business*, 69, 1—25.

Easley, D., and M. O'Hara, 1987, "Price, Trade Size, and Information in Securities Markets," *Journal of Financial Economics*, 19, 69—90.

——, 1992, "Time and the Process of Security Price Adjustment," *Journal of Finance*, 47, 577—605.

Eberlein, E., and M. Taqqu, 1986, *Dependence in Probability and Statistics: A Survey of Recent Result*, Progress in Probability and Statistics, Vol. 11, Birkhäuser, Boston.

Eckbo, B., 1983, "Horizontal Mergers, Collusion, and Stockholder Wealth," *Journal of Financial Economics*, 11, 241—276.

Eckbo, E., V. Maksimovic, and J. Williams, 1990, "Consistent Estimation of CrossSectional Models in Event-Studies," *Review of Financial Studies*, 3(3), 343—365.

Edwards, R., and J. Magee, 1966, *Technical Analysis of Stock Trends* (revised 5th ed.), John Magee, Boston.

Eichenbaum, M., L. Hansen, and K. Singleton, 1988, "A Time Series Analysis of Representative Agent Models of Consumption and Leisure Choice under Uncertainty," *Quarterly Journal of Economics*, 103, 51—78.

Eikeboom, A., 1993, "The Dynamics of the Bid-Ask Spread," working paper, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.

Einstein, A., 1905, "Ueber die von der molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegungvon in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen," *Annalen der Physik*, 17, 549—560.

Engle, R., 1982, "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Inflation,"*Econometrica*, 50, 987—1008.

——,1984, "Wald, Likelihood Ratio, and Lagrange Multiplier Tests in Econometrics,"in Z. Griliches and M. Intriligator(eds.), *Handbook of Econometrics*, *Volume* Ⅱ, North-Holland, Amsterdam, chap. 13.

Engle, R., and G. Gonzalez-Rivera, 1991, "Semiparametric ARCH Models,"*Journal of Business and Economic Statistics*, 9, 345—359.

Engle, R., and C. Granger, 1987, "Cointegration and Error-Correction: Representation, Estimation, and Testing",*Econometrica*, 55,251—276.

Engle, R., and K. Kroner, 1995, "Multivariate Simultaneous Generalized ARCH,"*Econometric Theory*, 11,122—150.

Engle, R., and V. Ng,1993, "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility,"*Journal of Finance*, 48,1749—1778.

Engle, R., D. Lilien, and R. Robins,1987,"Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure:The ARCH-M Model,"*Econometrica*,55,391—407.

Engle, R.,V. Ng, and M. Rothschild,1990,"Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills,"*Journal of Econometrics*, 45,213—238.

Epstein, L., and S. Zin, 1989, "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework," *Econometrica*,57,937—968.

——,1990,"First-Order Risk Aversion and the Equity Premium Puzzle,"*Journal of Monetary Economics*, 26, 387—407.

——,1991, "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns:An Empirical Investigation,"*Journal of Political Economy*, 99,263—286.

Estrella, A., and G. Hardouvelis, 1991, "The Term Structure as a Predictor of Real Economic Activity,"*Journal of Finance*,46,555—576.

Eytan, T., and G. Harpaz, 1986, "The Pricing of Futures and Options Contracts on the Value Line Index,"*Journal of Finance*, 41,843—856.

Fabozzi, F., 1996, *Bond Markets*, *Analysis and Strategies*(3rd ed.), Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

Fabozzi, F., and T. Fabozzi(eds.),1995, *The Handbook of Fixed-Income Securities*(4th ed.), Irwin, Burr Ridge, IL.

Fama, E., 1965, "The Behavior of Stock Market Prices,"*Journal of Business*, 38,34—105.

——,1970,"Efficient Capital Markets:A Review of Theory and Empirical Work," *Journal of Finance*, 25, 383—417.

——,1975,"Short-Term Interest Rates as Predictors of Inflation,"*American Economic Review*, 65,269—282.

——,1976, *Foundations of Finance*, Basic Books, New York.

——,1984,"The Information in the Term Structure,"*Journal of Financial Economics*, 13,509—521.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

——,1990, "Term-Structure Forecasts of Interest Rates, Inflation, and Real Returns," *Journal of Monetary Economics*, 25,59—76.

——,1991, "Efficient Capital Markets: Ⅱ," *Journal of Finance*, 46,1575—1618.

——,1993, "Multifactor Portfolio Efficiency and Multifactor Asset Pricing Models," working paper, CRSP, University of Chicago, Chicago, IL.

Fama, E., and R. Bliss, 1987, "The Information in Long-Maturity Forward Rates," *American Economic Review*, 77,680—692.

Fama, E., and M. Blume, 1966, "Filter Rules and Stock Market Trading Profits," *Journal of Business*, 39,226—241.

Fama, E., and K. French, 1988a, "Dividend Yields and Expected Stock Returns," *Journal of Financial Economics*, 22,3—27.

——,1988b, "Permanent and Temporary Components of Stock Prices," *Journal of Political Economy*, 96, 246—273.

——,1989, "Business Conditions and Expected Returns on Stock and Bonds," *Journal of Financial Economics*, 25,23—49.

——,1992, "The Cross-Section of Expected Stock Returns," *Journal of Finance*, 47,427—465.

——,1993, "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds," *Journal of Financial Economics*, 33,3—56.

——,1996a, "Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies," *Journal of Finance*, 51,55—84.

——,1996b, "The CAPM Is Wanted, Dead or Alive," *Journal of Finance*, forthcoming.

Fama, E., and J. MacBeth, 1973, "Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests," *Journal of Political Economy*, 71,607—636.

Fama, E., and R. Roll, 1971, "Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions," *Journal of the American Statistical Association*, 66,331—338.

Fama, E., L. Fisher, M. Jensen, and R. Roll, 1969, "The Adjustment of Stock Prices to New Information," *International Economic Review*, 10,1—21.

Fang, K., and Y. Wang, 1994, *Number-Theoretic Methods in Statistics*, Chapman and Hall, London.

Faust, J., 1992, "When Are Variance Ratio Tests For Serial Dependence Optimal?", *Econometrica*, 60, 1215—1226.

Feller, W., 1968, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley and Sons, New York.

Ferson, W., and G. Constantinides, 1991, "Habit Persistence and Durability in Aggregate Consumption: Empirical Tests," *Journal of Financial Economics*, 29, 199—240.

Ferson, W., and S. Foerster, 1994, "Finite Sample Properties of the Generalized Method of Moments in Tests of Conditional Asset Pricing Models," *Journal of Financial Economics*, 36,29—55.

Fielitz, B., 1976, "Further Results on Asymmetric Stable Distributions of Stock Prices Changes," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 11,39—55.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Fielitz, B., and J. Rozell, 1983, "Stable Distributions and Mixtures of Distributions Hypotheses for Common Stock Returns," *Journal of the American Statistical Association*, 78, 28—36.

Fisher, L., 1966, "Some New Stock Market Indexes," *Journal of Business*, 39, 191—225.

Fishman, G., 1996, *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*, SpringerVerlag, New York.

Flavin, M., 1983, "Excess Volatility in the Financial Markets: A Reassessment of the Empirical Evidence," *Journal of Political Economy*, 91, 929—956.

Frankel, J., G. Galli, and A. Giovannini, eds., 1996, *The Microstructure of Foreign Exchange Markets* (NBER Conference Report), University of Chicago Press, Chicago, IL.

French, K., and R. Roll, 1986, "Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders," *Journal of Financial Economics*, 17, 5—26.

French, K., G. Schwert, and R. Stambaugh, 1987, "Expected Stock Returns and Volatility," *Journal of Financial Economics*, 19, 3—30.

Friedman, J., and W. Stuetzle, 1981, "Projection Pursuit Regression," *Journal of the American Statistical Association*, 76(376), December.

Friend, I., and M. Blume, 1975, "The Demand for Risky Assets," *American Economic Review*, 65, 900—922.

Froot, K., 1989, "New Hope for the Expectations Hypothesis of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 44, 283—305.

Froot, K., and M. Obstfeld, 1991, "Intrinsic Bubbles: The Case of Stock Prices," *American Economic Review*, 81, 1189—1217.

Fuller, W., 1976, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York.

Furbush, D., and J. Smith, 1996, "Quoting Behavior on NASDAQ: The Determinants of Clustering and Relative Spreads," Economists Inc., Washington, D. C.

Galai, D., 1977, "Tests of Market Efficiency of the Chicago Board Options Exchange," *Journal of Business*, 50, 167—197.

——, 1978, "Empirical Tests of Boundary Conditions for CBOE Options," *Journal of Financial Economics*, 6, 187—211.

Gallant, A., 1987, *Nonlinear Statistical Models*, John Wiley and Sons, New York.

Gallant, A., and H. White, 1992, "On Learning the Derivatives of an Unknown Mapping with Multilayer Feedforward Networks," *Neural Networks*, 5, 128—138.

Gallant, R., P. Rossi, and G. Tauchen, 1991, "Stock Prices and Volume," *Review of Financial Studies*, 5, 199—242.

Garber, P., 1989, "Tulipmania," *Journal of Political Economy*, 97, 535—560.

Garman, M., 1976a, "Market Microstructure," *Journal of Financial Economics*, 3, 257—275.

——, 1976b, "A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes," Working Paper 50, University of California, Berkeley.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

——,1978,"The Pricing of Supershares,"*Journal of Financial Economics*,6,3—10.

Garman, M., and M. Klass, 1980, "On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data," *Journal of Business*, 53, 67—78.

George, T., G. Kaul, and M. Nimalendran, 1991, "Estimation of the Bid-Ask Spread and Its Components: A New Approach," *Review of Financial Studies*, 4, 23—656.

Gerber, H., and S. Li, 1981, "The Occurrence of Sequence Patterns in Repeated Experiments and Hitting Times in a Markov Chain," *Stochastic Processes and Their Applications* 11, 101—108.

Geske, R., and K. Shastri, 1985, "Valuation by Approximation: A Comparison of Option Valuation Techniques," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20, 45—72.

Gibbons, M., 1982, "Multivariate Tests of Financial Models: A New Approach," *Journal of Financial Economics*, 10, 3—27.

Gibbons, M., and W. Ferson, 1985, "Testing Asset Pricing Models with Changing Expectations and an Unobservable Market Portfolio," *Journal of Financial Economics*, 14, 217—236.

Gibbons, M., and K. Ramaswamy, 1993, "A Test of the Cox, Ingersoll, and Ross Model of the Term Structure," *Review of Financial Studies*, 6, 619—658.

Gibbons, M., S. Ross, and J. Shanken, 1989, "A Test of the Efficiency of a Given Portfolio," *Econometrica*, 57, 1121—1152.

Gilles, C., and S. LeRoy, 1991, "Econometric Aspects of the Variance Bounds Tests: A Survey," *Review of Financial Studies*, 4, 753—791.

Giovannini, A., and P. Weil, 1989, "Risk Aversion and Intertemporal Substitution in the Capital Asset Pricing Model," Working Paper 2824, NBER, Cambridge, MA.

Gleick, J., 1987, *Chaos: Making a New Science*, Viking Penguin Inc., New York.

Glosten, L., 1987, "Components of the Bid-Ask Spread and the Statistical Properties of Transaction Prices," *Journal of Finance*, 42, 1293—1307.

Glosten, L., and L. Harris, 1988, "Estimating the Components of the Bid/Ask Spread," *Journal of Financial Economics*, 21, 123—142.

Glosten, L., and P. Milgrom, 1985, "Bid, Ask and Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously Informed Traders," *Journal of Financial Economics*, 14, 71—100.

Glosten, L., R. Jagannathan, and D. Runkle, 1993, "On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks," *Journal of Finance*, 48, 1779—1801.

Godek, P., 1996, "Why NASDAQ Market Makers Avoid Odd-Eighth Quotes," *Journal of Financial Economics*, 41, 465—474.

Goldenberg, D., 1991, "A Unified Method for Pricing Options on Diffusion Processes," *Journal of Financial Economics*, 29, 3—34.

Goldman, B., H. Sosin, and M. Gatto, 1979, "Path Dependent Options: 'Buy at the Low, Sell at the High,'" *Journal of Finance*, 34, 1111—1127.

Goldman, B., H. Sosin, and L. Shepp, 1979, "On Contingent Claims that Insure Ex-Post Optimal Stock

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Market Timing," *Journal of Finance*, 34, 401—414.

Goldstein, M., 1993, *Bid-Ask Spreads on U. S. Equity Markets*, Unpublished Ph. D. dissertation, Wharton School, University of Pennsylvania.

Goodhart, C., and R. Curcio, 1990, "Asset Price Discovery and Price Clustering in the Foreign Exchange Market," unpublished working paper, London, School of Economics.

Gordon, M., 1962, *The Investment, Financing, and Valuation of the Corporation*, Irwin, Homewood, IL.

Gottlieb, G., and A. Kalay, 1985, "Implications of the Discreteness of Observed Stock Prices," *Journal of Finance*, 40, 135—154.

Gourieroux, C., A. Monfort, and A. Trognon, 1985, "A General Approach to Serial Correlation," *Econometric Theory*, 1, 315—340.

Gourlay, A., and S. McKee, 1977, "The Construction of Hopscotch Methods for Parabolic and Elliptic Equations in Two Space Dimensions with a Mixed Derivative," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 201—206.

Graham, R., D. Knuth, and O. Patashnik, 1989, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading, MA.

Grandmont, J., and P. Malgrange, 1986, "Introduction to Nonlinear Economic Dynamics," *Journal of Economic Theory*, 40, 3—12.

Granger, C., 1966, "The Typical Spectral Shape of an Economic Variable," *Econometrica*, 34, 150—161.

——, 1969, "Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross Spectral Methods," *Econometrica*, 37, 424—438.

——, 1980, "Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models," *Journal of Econometrics*, 14, 227—238.

Granger, C., and A. Andersen, 1978, *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

Granger, C., and R. Joyeux, 1980, "An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing," *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15—29.

Granger, C., and O. Morgenstern, 1963, "Spectral Analysis of New York Stock Market Prices," *Kyklos*, 16, 1—27.

Granger, C., and O. Morgenstern, 1970, *Predictability of Stock Market Prices*, HeathLexington, Lexington, MA.

Granito, M., 1984, *Bond Portfolio Immunization*, Lexington, Lexington, MA.

Grassberger, P., and I. Procaccia, 1983, "Measuring the Strangeness of Strange Attractors," *Physica*, 9D, 189—208.

Gray, S., 1996, "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a RegimeSwitching Process," *Journal of Financial Economics*, 42, 27—62.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Grinblatt, M. , and S. Titman, 1985, "Factor Pricing in a Finite Economy," *Journal of Financial Economics*, 12, 497—507.

Grossman, S. , 1989, *The Informational Role of Prices*, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, MA.

Grossman, S. , and R. Shiller, 1981, "The Determinants of the Variability of Stock Market Prices," *American Economic Review*, 71, 222—227.

——, 1982, "Consumption Correlatedness and Risk Measurement in Economies with Non-Traded Assets and Heterogeneous Information," *Journal of Financial Economics*, 10, 195—210.

Grossman, S. , and J. Stiglitz, 1980, "On the Impossibility of Informationally Efficient Markets," *American Economic Review*, 70, 393—408.

Grossman, S. , and Z. Zhou, 1996, "Equilibrium Analysis of Portfolio Insurance," *Journal of Finance*, 51, 1379—1403.

Grossman, S. , A. Melino, and R. Shiller, 1987, "Estimating the Continuous Time Consumption Based Asset Pricing Model," *Journal of Business and Economic Statistics*, 5, 315—328.

Grossman, S. , M. Miller, D. Fischel, K. Cone, and D. Ross, 1995, "Clustering and Competition in Asset Markets," Lexecon Inc. Report.

Grundy, B. , and M. McNichols, 1989, "Trade and Revelation of Information through Prices and Direct Disclosure," *Review of Financial Studies*, 2, 495—526.

Gultekin, N. , R. Rogalski, and S. Tinic, 1982, "Option Pricing Model Estimates: Some Empirical Results," *Financial Management*, 11, 58—69.

Gurland, J. , T. Lee, and P. Dahm, 1960, "Polychotomous Quantal Response in Biological Assay," *Biometrics*, 16, 382—398.

Hagerman, R. , 1978, "More Evidence on the Distribution of Security Returns," *Journal of Finance*, 33, 1213—1220.

Hakansson, N. , 1976, "Purchasing Power Funds: A New Kind of Financial Intermediary," *Financial Analysts Journal*, 32, 49—59.

——, 1977, "The Superfund: Efficient Paths towards Efficient Capital Markets in Large and Small Countries," in H. Levy and M. Sarnat (eds.), *Financial Decision Making Under Uncertainty*, Academic Press, New York.

Hald, A. , 1990, *A History of Probability and Statistics and Their Applications before* 1750, John Wiley and Sons, New York.

Hall, A. , 1992, "Some Aspects of Generalized Method of Moments Estimation," in G. Maddala, C. Rao, and H. Vinod (eds.), *Handbook of Statistics*, *Volume* 11: *Econometrics*, North-Holland, Amsterdam.

Hall, R. , 1988, "Intertemporal Substitution in Consumption," *Journal of Political Economy*, 96, 221—273.

Halpern, P. , and S. Turnbull, 1985, "Empirical Tests of Boundary Conditions for Toronto Stock Ex-

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

change Options,"*Journal of Finance*,40,481—500.

Hamilton,J., 1989, "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle,"*Econometrica*, 57,357—384.

——,1990,"Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime," *Journal of Econometrics*,45,39—70.

——,1993,"Estimation, Inference, and Forecasting of Time Series Subject to Changes in Regime,"in G. Maddala, C. Rao, and H. Vinod, eds., *Handbook of Statistics*, Volume 11, North-Holland, New York.

Hamilton, J., 1994, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Hammersley, J., and D. Handscomb, 1964, *Monte Carlo Methods*, Chapman and Hall, London.

Hammersley, J., and J. Mauldon, 1956, "General Principles of Antithetic Variates,"*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*,52,476—481.

Hampel, F., 1986, *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions*, John Wiley and Sons, New York.

Hansen, L. ,1982, "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators,"*Econometrica*, 50,1029—1054.

——,1985, "A Method for Calculating Bounds on the Asymptotic Covariance Matrices of Generalized Method of Moments Estimators,"*Journal of Econometrics*, 30,203—238.

Hansen, L., and R. Hodrick, 1980, "Forward Exchange Rates as Optimal Predictors of Future Spot Rates: An Econometric Analysis,"*Journal of Political Economy*, 88,829—853.

——,1983,"Risk Averse Speculation in the Forward Foreign Exchange Market: An Econometric Analysis of Linear Models,"in J. Frenkel(ed.),*Exchange Rates and International Macroeconomics*, University of Chicago Press, Chicago, IL.

Hansen, L., and R. Jagannathan, 1991,"Restrictions on Intertemporal Marginal Rates of Substitution Implied by Asset Returns,"*Journal of Political Economy*, 99,225—262.

Hansen,L., and S. Richard, 1987, "The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models,"*Econometrica*, 55, 587—613.

Hansen, L., and J. Scheinkman, 1995,"Back to the Future: Generating Moment Implications for Continuous-Time Markov Processes,"*Econometrica*, 63,767—804.

Hansen, L., and K. Singleton, 1982, "Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models,"*Econometrica*,50,1269—1288.

——,1983,"Stochastic Consumption, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Asset Returns," *Journal of Political Economy*, 91,249—268.

Hansen, L., J. Heaton, and E. Luttmer, 1995, "Econometric Evaluation of Asset Pricing Models,"*Review of Financial Studies*, 8,237—274.

Hansen, L., J. Heaton, and M. Ogaki, 1988,"Efficiency Bounds Implied by Multiperiod Conditional Moment Restrictions,"*Journal of the American Statistical Association*, 83, 863—871.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Härdle, W., 1990, *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Harris, L., 1990, "Estimation of Stock Variances and Serial Covariances from Discrete Observations," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 291—306.

——, 1991, "Stock Price Clustering and Discreteness," *Review of Financial Studies*, 4, 389—415.

Harris, L., G. Sofianos, and J. Shapiro, 1994, "Program Trading and Intraday Volatility," *Review of Financial Studies*, 7, 653—685.

Harrison, M., 1985, *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, John Wiley and Sons, New York.

Harrison, M., and D. Kreps, 1979, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, 20, 381—408.

Harrison, M., and S. Pliska, 1981, "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, 215—260.

Harvey, A., E. Ruiz, and N. Shephard, 1994, "Multivariate Stochastic Variance Models," *Review of Economic Studies*, 61, 247—264.

Harvey, C., 1988, "The Real Term Structure and Consumption Growth," *Journal of Financial Economics*, 22, 305—334.

——, 1989, "Time-Varying Conditional Covariances in Tests of Asset Pricing Models," *Journal of Financial Economics*, 24, 289—317.

——, 1991, "The World Price of Covariance Risk," *Journal of Finance*, 46, 111—157.

Harvey, C., and G. Zhou, 1990, "Bayesian Inference in Asset Pricing Tests," *Journal of Financial Economics*, 26, 221—254.

Hasbrouck, J., 1988, "Trades, Quotes, Inventories, and Information," *Journal of Financial Economics*, 22, 229—252.

——, 1991a, "Measuring the Information Content of Stock Trades," *Journal of Finance*, 46, 179—208.

——, 1991b, "The Summary Informativeness of Stock Trades: An Econometric Analysis," *Review of Financial Studies*, 4, 571—595.

Hasbrouck, J., and T. Ho, 1987, "Order Arrival, Quote Behavior, and the Return Generating Process," *Journal of Finance*, 42, 1035—1048.

Hausman, J., 1978, "Specification Tests in Econometrics," *Econometrica*, 46, 1251—1271.

Hausman, J., A. Lo, and C. MacKinlay, 1992, "An Ordered Probit Analysis of Transaction Stock Prices," *Journal of Financial Economics*, 31, 319—379.

He, H., and H. Leland, 1993, "On Equilibrium Asset Price Processes," *Review of Financial Studies*, 6, 593—617.

He, H., and D. Modest, 1995, "Market Frictions and Consumption-Based Asset Pricing," *Journal of Political Economy*, 103, 94—117.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, 1992, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, 60, 77—105.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Heaton, J., 1995, "An Empirical Investigation of Asset Pricing with Temporally Dependent Preference Specifications," *Econometrica*, 681—717.

Heaton, J., and D. Lucas, 1996, "Evaluating the Effects of Incomplete Markets on Risk Sharing and Asset Pricing," *Journal of Political Economy*, 104, 668—712.

Helson, H., and D. Sarason, 1967, "Past and Future," *Mathematica Scandinavia*, 21, 5—16.

Henriksson, R., and R. Merton, 1981, "On Market Timing and Investment Performance, Ⅱ: Statistical Procedures for Evaluating Forecasting Skills," *Journal of Business*, 54, 513—533.

Hentschel, L., 1995, "All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models," *Journal of Financial Economics*, 39, 71—104.

Herrndorf, N., 1984, "A Functional Central Limit Theorem for Weakly Dependent Sequences of Random Variables," *Annals of Probability*, 12, 141—153.

Hertz, J., A. Krogh, and R. Palmer, 1991, *Introduction to the Theory of Neural Computation*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA.

Heston, S., 1992, "Testing Continuous-Time Models of the Term Structure of Interest Rates," unpublished paper, Yale University.

——, 1993, "A Closed-Form Solution for Options with Stochatic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies*, 6, 327—343.

Hicks, J., 1946, *Value and Capital* (2d ed.), Oxford University Press, Oxford.

Hinich, M., and D. Patterson, 1985, "Evidence of Nonlinearity in Daily Stock Returns," *Journal of Business and Economic Statistics*, 3, 69—77.

Ho, T., and S. Lee, 1986, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, 41, 1011—1029.

Ho, T., and H. Stoll, 1980, "On Dealership Markets under Competition," *Journal of Finance*, 35, 259—267.

——, 1981, "Optimal Dealer Pricing under Transactions adn Return Uncertainty," *Journal of Financial Economics*, 9, 47—73.

Hodrick, R., 1992, "Dividend Yields and Expected Stock Returns: Alternative Procedures for Inference and Measurement," *Review of Financial Studies*, 5, 357—386.

Hoel, P., S. Port, and C. Stone, 1972, *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin, Boston, MA.

Hofmann, N., E. Platen, and M. Schweizer, 1992, "Option Pricing under Incompleteness and Stochastic Volatility," *Mathematical Finance*, 2, 153—187.

Hogarth, R., and M. Reder, eds., 1987, *Rational Choice: The Contrast Between Economics and Psychology*, University of Chicago Press, Chicago, IL.

Holden, A., ed., 1986, *Chaos*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Hornik, K., 1989, "Multilayer Feedforward Networks Are Universal Approximators," *Neural Networks*, 2(5), 359—366.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Hornik, K. ,M. Stinchcombe, and H. White, 1990, "Universal Approximation of an Unknown Mapping and Its Derivatives," *Neural Networks*, 3, 551—560.

Hosking, J. ,1981, "Fractional Differencing," *Biometrika*, 68, 165—176.

Hsieh, D. , 1989, "Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates," *Journal of Business*, 62, 339—368.

——, 1991, "Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets," *Journal of Finance*, 46, 1839—1877.

——, 1993, "Implications of Nonlinear Dynamics for Financial Risk Management," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1993, 28, 41—64.

Hsu, D. ,R. Miller, and D. Wichern, 1974, "On the Stable Paretian Behavior of Stock Market Prices," *Journal of the American Statistical Association*, 69, 108—113.

Huang, C. ,1992, *Lecture Notes on the Theory of Financial Markets in Continuous Time*.

Huang, C. , and R. Litzenberger, 1988, *Foundations for Financial Economics*, NorthHolland, New York.

Huang, R. , and H. Stoll, 1995a, "The Components of the Bid-Ask Spread: A General Approach," Financial Markets Research Center Working Paper 94—33, Owen Graduate School of Management, Vanderbilt University.

——, 1995b, "Dealer Versus Auction Markets: A Paired Comparison of Execution Costs on NASDAQ and the NYSE," Financial Markets Research Center Working Paper 95—16, Owen Graduate School of Management, Vanderbilt University.

Huber, P. , 1985, "Projection Pursuit," *Annals of Statistics*, 13(2), 435—525.

Huberman, G. , 1982, "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Economic Theory*, 28, 183—191.

Huberman, G. , and S. Kandel, 1987, "Mean-Variance Spanning," *Journal of Finance*, 42(4), 873—888.

Hull, J. , 1993, *Options, Futures, and Other Derivative Securities* (2d ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Hull, J. , and A. White, 1987, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42, 281—300.

——, 1990a, "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, 3, 573—592.

——, 1990b, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 87—100.

Hurst, H. , 1951, "Long Term Storage Capacity of Reservoirs," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 770—799.

Hutchinson, J. , A. Lo, and T. Poggio, 1994, "A Nonparametric Approach to the Pricing and Hedging of Derivative Securities Vai Learning Networks," *Journal of Finance*, 49, 851—889.

Ingersoll, J. , 1987, *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, Totowa, NJ.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Ingersoll, J. Jr., J. Skelton, and R. Weil, 1978, "Duration Forty Years Later," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, 627—650.

Itô, K., 1951, "On Stochastic Differential Equations," *Memoirs of the American Mathematical Society*, 4, 1—51.

Jackwerth, J., and M. Rubinstein, 1995, "Recovering Probability Distributions from Contemporary Security Prices," working paper, Haas School of Business, University of California at Berkeley.

Jacquier, E., N. Polson, and P. Rossi, 1994, "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models," *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 371—389.

Jagannathan, R., and Z. Wang, 1996, "The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns," *Journal of Finance*, 51, 3—53.

Jain, P., 1986, "Analyses of the Distribution of Security Market Model Prediction Errors for Daily Returns Data," *Journal of Accounting Research*, 24, 76—96.

Jamshidian, F., 1989, "An Exact Bond Option Formula," *Journal of Finance*, 44, 205—209.

Jarrell, G., and A. Poulsen, 1989, "The Returns to Acquiring Firms in Tender Offers: Evidence from Three Decades," *Financial Management*, 18, 12—19.

Jarrell, G., J. Brickley, and J. Netter, 1988, "The Market for Corporate Control: The Empirical Evidence Since 1980," *Journal of Economic Perspectives*, 2, 639—658.

Jarrow, R., and A. Rudd, 1982. "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 10, 347—369.

Jegadeesh, N., 1990, "Evidence of Predictable Behavior of Security Returns," *Journal of Finance*, 45, 881—898.

——, 1991, "Seasonality in Stock Price Mean Reversion: Evidence from the U. S. and the U. K.," *Journal of Finance*, 46, 1427—1444.

Jegadeesh, N., and S. Titman, 1993, "Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency," *Journal of Finance*, 48, 65—91.

——, 1995, "Overreaction, Delayed Reaction, and Contrarian Profits," *Review of Financial Studies*, 8, 973—993.

Jensen, M., and R. Ruback, 1983, "The Market for Corporate Control: The Scientific Evidence," *Journal of Financial Economics*, 11, 5—50.

Jerison, D., I. Singer, and D. Stroock (eds.), 1996, *The* 1994, *Wiener Symposium Proceedings*, American Mathematical Society, Providence, RI.

Jobson, D., and R. Korkie, 1982, "Potential Performance and Tests of Portfolio Efficiency," *Journal of Financial Economics*, 10, 433—466.

——, 1985, "Some Tests of Linear Asset Pricing with Multivariate Normality," *Canadian Journal of Administrative Sciences*, 2, 114—138.

Johnson, H., 1983, "An Analytic Approximation of the American Put Price," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, 141—148.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Johnson, H., and D. Shanno, 1987, "Option Pricing when the Variance Is Changing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 143—151.

Jones, L., 1987, "On a Conjecture of Huber Concerning the Convergence of Projection Pursuit Regression," *Annals of Statistics*, 15(2), 880—882.

Jöreskog, K., 1967, "Some Contributions to Maximum Likelihood Factor Analysis," *Psychometrika*, 34, 183—202.

Judge, G., W. Griffiths, C. Hill, H. Lŭtkepohl, and T. Lee, 1985, *The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley and Sons, New York.

Kagel, J., and A. Roth, eds., 1995, *Handbook of Experimental Economics*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Kahneman, D., and A. Tversky, 1979, "Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk," *Econometrica*, 47, 263—291.

Kalos, M., and P. Whitlock, 1986, *Monte Carlo Methods*, *Volume I: Basics*, John Wiley and Sons, New York.

Kandel, E., and L. Marx, 1996, "NASDAQ Market Structure and Spread Patterns," unpublished working paper, Simon Graduate School of Business, University of Rochester.

Kandel, S., 1984, "The Likelihood Ratio Test of Mean-Variance Efficiency without a Riskless Asset," *Journal of Financial Economics*, 13, 575—592.

Kandel, S., R. McCulloch, and R. Stambaugh, 1995, "Bayesian Inference and Portfolio Efficiency," *Review of Financial Studies*, 8, 1—53.

Kandel, S., and R. Stambaugh, 1987, "On Correlations and Inferences about MeanVariance Efficiency," *Journal of Financial Economics*, 18, 61—90.

——, 1989, "Modelling Expected Stock Returns for Long and Short Horizons," Working Paper 42—88, Rodney L. White Center, Wharton School, University of Pennsylvania.

——, 1990, "A Mean-Variance Framework for Tests of Asset Pricing Models," *Review of Financial Studies*, 2, 125—156.

——, 1991, "Asset Returns and Intertemporal Preferences," *Journal of Monetary Economics*, 27, 39—71.

——, 1995, "Portfolio Inefficiency and the Cross-Section of Expected Returns," *Journal of Finance*, 50, 157—184.

Kane, E., 1970, "The Term Structure of Interest Rates: An Attempt to Reconcile Teaching with Practice," *Journal of Finance*, 25, May, 361—374.

——, 1983, "Nested Tests of Alternative Term Structure Theories," *Review of Economics and Statistics*, 65, 115—123.

Kane, E., and H. Unal, 1988, "Change in Assessments of Deposit Institution Riskiness," *Journal of Financial Services Research*, 1, 207—229.

Karpoff, J., 1986, "A Theory of Trading Volume," *Journal of Finance*, 41, 1069—1088.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

——, 1987, "The Relation between Price Changes and Trading Volume: A Survey," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 109—126.

Keim, D., 1989, "Trading Patterns, Bid-Ask Spreads, and Estimated Security Returns: The Case of Common Stocks at Calendar Turning Points," *Journal of Financial Economics*, 25, 75—97.

Keim, D., and A. Madhavan, 1995a, "Anatomy of the Trading Process: Empirical Evidence on the Behavior of Institutional Traders," *Journal of Financial Economics*, 37, 371—398.

——, 1995b, "Execution Costs and Investment Performance: An Empirical Analysis of Institutional Equity Trades," working paper, School of Business Administration, University of Southern California.

——, 1996, "The Upstairs Market for Large-Block Transactions: Analysis and Measurement of Price Effects," *Review of Financial Studies*, 9, 1—36.

Keim, D., and R. Stambaugh, 1986, "Predicting Returns in Stock and Bond Markets," *Journal of Financial Economics*, 17, 357—390.

Kendall, M., 1953, "The Analysis of Economic Time Series—Part Ⅰ: Prices," *Journal of the Royal Statistical Society*, 96, 11—25.

——, 1954, "Note on Bias in the Estimation of Autocorrelation," *Biometrika*, 41, 403—404.

Kennan, D., and M. O'Brien, 1993, "Competition, Collusion, and Chaos," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17, 327—353.

Kennedy, D., 1976, "The Distribution of the Maximum Brownian Excursion," *Journal of Applied Probability*, 13, 371—376.

Kim, M., C. Nelson, and R. Startz, 1988, "Mean Reversion in Stock Prices? A Reappraisal of the Empirical Evidence," Technical Report 2795, NBER, Cambridge, MA; to appear in *Review of Economic Studies*.

Kindleberger, C., 1989, *Nanias, Panics, and Crashes: A History of Financial Crises*, revised ed., Basic Books, New York.

Kleidon, A., 1986, "Variance Bounds Tests and Stock Price Valuation Models," *Journal of Political Economy*, 94, 953—1001.

Kleidon, A., and R. Willig, 1995, "Why Do Christie and Schultz Infer Collusion from Their Data?," unpublished working paper.

Kocherlakota, N., 1996, "The Equity Premium: It's Still a Puzzle," *Journal of Economic Literature*, 34, 42—71.

Korajczyk, R., and C. Viallet, 1989, "An Empirical Investigation of International Asset Pricing," *Review of Financial Studies*, 2, 553—586.

Kothari, S., J. Shanken, and R. Sloan, 1995, "Another Look at the Cross-Section of Expected Returns," *Journal of Finance*, 50, 185—224.

Kreps, D., and E. Porteus, 1978, "Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory," *Econometrica*, 46, 185—200.

Kreps, D., 1988, *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press, Boulder, CO.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Kroner, K., and V. Ng, 1993, "Modelling the Time Varying Comovement of Asset Returns," unpublished paper, University of Arizona and International Monetary Fund.

Kyle, A., 1985, "Continuous Auctions and Insider Trading," *Econometrica*, 53, 1315—1335.

Laibson, D., 1996, "Hyperbolic Discount Eunctions, Undersaving, and Savings Policy," Working Paper 5635, NBER, Cambridge, MA.

Lakonishok, J., A, shleifer, and R. Vishny, 1994, "Contrarian Investment, Extrapolation, and Risk," *Journal of Finance*, 49, 1541—1578.

Lanen, W., and R. Thompson, 1988, "Stock Price Reactions as Surrogates for the Net Cashflow Effects of Corporate Financial Decisions," *Journal of Accounting and Economics*, 10, 311—334.

Lang, S., 1973, *Calculus of Several Variables*, Addison-Wesley, Reading, MA.

Leamer, E., 1978, *Specification Searches*, John Wiley and Sons, New York.

LeBaron, B., 1996, "Technical Trading Rule Profitability and Foreign Exchange Intervention," Working Paper 5505, NBER, Cambridge, MA.

Lee, C., and M. Ready, 1991, "Inferring Trade Direction from Intraday Data," *Journal of Finance*, 46, 733—746.

Lee, S., and B. Hansen, 1994, "Asymptotic Theory for the GARCH(1,1) QuasiMaximum Likelihood Estimator," *Econometric Theory*, 10, 29—52.

Lehmann, B., 1987, "Orthogonal Frontiers and Alternative Mean Variance Efficiency Tests," *Journal of Finance*, 42, 601—619.

——, 1990, "Fads, Martingales, and Market Efficiency," *Quarterly Journal of Economics*, 105, 1—28.

——, 1991, "Earnings, Dividend Policy, and Present Value Relations: Building Blocks, of Dividend Policy Invariant Cash Flows," Working Paper 3676, NBER, Cambridge, MA.

——, "Empirical Testing of Asset Pricing Models," in P. Newman, M. Milgate, and J. Eatwell (eds.), *The New Palgrave Dictionary of Money and Finance*, Stockton Press, New York, pp. 749—759.

Lehmann, B., and D. Modest, 1988, "The Empirical Foundations of the Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Financial Economics*, 21, 213—254.

Leroy, S., 1973, "Risk Aversion and the Martingale Property of Stock Returns," *International Economic Review*, 14, 436—446.

LeRoy, S., 1989, "Efficient Capital Markets and Martingales," *Journal of Economic Literature*, 27, 1583—1621.

LeRoy, S., and R. Porter, 1981, "The Present Value Relation: Tests Based on Variance Bounds," *Econometrica*, 49, 555—577.

LeRoy, S., and D. Steigerwald, 1992, "Volatility," Working Paper 6—92, Department of Economics, University of California Santa Barbara.

Levy, H., 1985, "Upper and Lower Bounds of Put and Call Option Values: Stochastic Dominance Approach," *Journal of Finance*, 40, 1197—1218.

Lévy, P., 1924, "Théorie des Erreurs. La Loi de Gauss et Les Lois Exceptionelles," *Bull. Soc. Math.*,

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

52,49—85.

——,1925, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villers, Paris.

Li, S., 1980, "A Martingale Approach to the Study of Occurrence of Sequence Patterns in Repeated Experiments," *Annals of Probability*, 8, 1171—1176.

Lintner, J., 1965a, "Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification," *Journal of Finance*, 20, 587—615.

——,1965b, "The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics*, 47, 13—37.

Litzenberger, R., and K. Ramaswamy, 1979, "The Effect of Personal Taxes and Dividends on Capital Asset Prices: Theory and Evidence," *Journal of Financial Economics*, 7, 163—196.

Litzenberger, R., and J. Rolfo, 1984, "An International Study of Tax Effects on Government Bonds," *Journal of Finance*, 39, 1—22.

Liu, C., and J. He, 1991, "A Variance-Ratio Test of Random Walks in Foreign Exchange Rates," *Journal of Finance*, 46, 777—786.

Ljung, G., and G. Box, 1978, "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models," *Biometrika*, 66, 67—72.

Ljung, L., and T. Söderström, 1986, *Theory and Practice of Recursive Identification*, Massachusetts Institute of Technology Pess, Cambridge, MA.

Lo. A., 1986, "Statistical Tests of Contingent Claims Asset-Pricing Models: A New Methodology," *Journal of Financial Economics*, 17, 143—173.

——,1987, "Semiparametric Upper Bounds for Option Prices and Expected Payoffs," *Journal of Financial Economics*, 19, 373—388.

——,1988, "Maximum Likelihood Estimation of Generalized Itô Processes with Discretely Sampled Data," *Econometric Theory*, 4, 231—247.

——,1991, "Long Term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica*, 59, 1279—1313.

——,ed., 1995, *The Industrial Organization and Regulation of the Securities Industry* (NBER Conference Report), University of Chicago Press, Chicago, IL.

——,ed., 1996, *Market Efficiency: Stock Market Behaviour in Theory and Practice*, Edward Elgar Publishing, Ltd., London.

Lo, A., and A. C. MacKinlay, 1988, "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test," *Review of Financial Studies*, 1, 41—66.

——,1989, "The Size and Power of the Variance Ratio Test in Finite Samples: A Monte Carlo Investigation," *Journal of Econometrics*, 40, 203—238.

——,1990a, "An Econometric Analysis of Nonsynchronous-Trading," *Journal of Econometrics*, 45, 181—212.

——,1990b, "Data-Snooping Biases in Tests of Financial Asset Pricing Models," *Review of Financial Studies*, 3, 431—468.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

——,1990b,"When Are Contrarian Profits Due to Stock Market Overreaction?,"*Review of Financial Studies*, 3,175—208.

——,1996,"Maximizing Predictability in the Stock and Bond Markets,"Working Paper, LFE-1019-96, MIT Laboratory for Financial Engineering.

Lo, A. , and J. Wang, 1995, "Implementing Option Pricing Models when Asset Returns Are Predictable", *Journal of Finance*, 50,87—129.

Loewenstein, G. , and D. Prelec, 1992,"Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation,"*Quarterly Journal of Economics*,107,573—598.

Longstaff, F. , 1989,"A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*,23,195—224.

——,1992, "Multiple Equilibria and Term Structure Models,"*Journal of Financial Economics*,32,333—344.

——,1995,"Option Pricing and the Martingale Restriction,"*Review of Financial Studies*, 8, 1091—1124.

Longstaff, F. , and E. Schwartz, 1992,"Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model,"*Journal of Finance*,47,1259—1282.

Lorenz, E. , 1963, "Deterministic Aperiodic Flow,"*Journal of Atmospheric Sciences*, 20,130—141.

Lucas, R. , Jr. , 1978,"Asset Prices in an Exchange Economy,"*Econometrica*, 46, 1429—1446.

Lumsdaine, R. , 1995, "Finite-Sample Properties of the Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1)and IGARCH(1,1)Models: A Monte Carlo Investigation, "*Journal of Business and Economic Statistics*, 13,1—10.

Luttmer, E. , 1994, "Asset Pricing in Economies with Frictions, "unpublished paper, Kellogg, Graduate School of Management, Northwestern University.

Lutz, F. , 1940,"The Structure of Interest Rates,"*Quarterly Journal of Economics*,55, 36—63.

Macaulay, F. , 1938,*Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States Since* 1856, National Bureau of Economic Research, New York.

MacBeth, J. , and L. Merville, 1979, "An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model,"*Journal of Finance*, 34,1173—1186.

——,1980,"Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models,"*Journal of Finance*, 35,285—300.

Mackay, C. , 1852, *Memoirs of Extraordinary Popular Delusions and the Madness of Crowds*, 2nd ed. , Office Nat. Illustrated Library, London.

MacKinlay, A. C. , 1987, "On Multivariate Tests of the CAPM,"*Journal of Financial Economics*,18, 341—372.

——,1995,"Multifactor Models Do Not Explain Deviations from the CAPM,"*Journal of Financial Economics*,38,3—28.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

MacKinlay, A. C. , and M. Richardson, 1991, "Using Generalized Methods of Moments to Test Mean-Variance Efficiency," *Journal of Finance*, 46, 511—527.

Maddala, G. , 1983, *Limited-Dependent and Qualitative Variables in Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Madhavan, A. , and S. Smidt, 1991, "A Bayesian Model of Intraday Specialist Pricing," *Journal of Financial Economics*, 30, 99—134.

Magnus, J. , and H. Neudecker, 1988, *Matrix Differential Calculus*, John Wiley and Sons, New York.

Malatesta, P. , and R. Thompson, 1985, "Partially Anticipated Events: A Model of Stock Price Reactions with an Application to Corporate Acquisitions," *Journal of Financial Economics*, 14, 237—250.

Malkiel, B. , 1992, "Efficient Market Hypothesis," in Newman, P. , M. Milgate, and J. Eatwell (eds.), *New Palgrave Dictionary of Money and Finance*, Macmillan, London.

Mandelbrot, B. , 1963, "The Variation of Certain Speculative Prices," *Journal of Business*, 36, 394—419.

——, 1967, "The Variation of Certain Speculative Prices," *Journal of Business*, 36, 394—419.

——, 1971, "When Can Price Be Arbitraged Efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models," *Review of Economics and Statistics*, 53, 225—236.

——, 1972, "Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis," *Annals of Economic and Social Measurement*, 1, 259—290.

——, 1975, "Limit Theorems on the Self-Normalized Range for Weakly and Strongly Dependent Processes," *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.* , Gebiete 31, 271—285.

Mandelbrot, B. , and M. Taqqu, 1979, "Robust R/S Analysis of Long Run Serial Correlation," *Bulletin of the International Statistical Institute*, 48 (Book 2), 59—104.

Mandelbrot, B. , and H. Taylor, 1967, "On the Distribution of Stock Price Differences," *Operations Research*, 15, 1057—1062.

Mandelbrot, B. , and J. Van Ness, 1968, "Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications," *S. I. A. M. Review*, 10, 422—437.

Mandelbrot, B. , and J. Wallis, 1968, "Noah, Joseph and Operational Hydrology," *Water Resources Research*, 4, 909—918.

——, 1969a, "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Parts 1, 2, 3," *Water Resources Research*, 5, 228—267.

——, 1969b, "Some Long Run Properties of Geophysical Records," *Water Resources Research*, 5, 321—340.

Mankiw, N. G. , 1986, "The Equity Premium and the Concentration of Aggregate Shocks," *Journal of Financial Economics*, 17, 211—219.

Mankiw, N. G. , and J. Miron, 1986, "The Changing Behavior of the Term Structure of Interest Rates," *Quarterly Journal of Economics*, 101, 211—221.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Mankiw, N. G., and M. Shapiro, 1986, "Do We Reject Too Often? Small Sample Properties of Tests of Rational Expectations Models," *Economics Letters*, 20, 139—145.

Mankiw, N. G., and S. Zeldes, 1991, "The Consumption of Stockholders and NonStockholders," *Journal of Financial Economics*, 29, 97—112.

Mankiw, N. G., D. Romer, and M. Shapiro, 1985, "An Unbiased Reexamination of Stock Market Volatility," *Journal of Finance*, 40, 677—687.

Manne, H., 1965, "Mergers and the Market for Corporate Control," *Journal of Political Economy*, 73, 110—120.

Mark, N., 1995, "Exchange Rates and Fundamentals: Evidence on Long-Horizon Predictability," *American Economic Review*, 85, 201—218.

Markowitz, H., 1959, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, New York.

Marsh, T., and R. Merton, 1986, "Dividend Variability and Variance Bounds Tests for the Rationality of Stock Market Prices," *American Economic Review*, 76, 483—498.

Marsh, T., and E. Rosenfeld, 1986, "Non-Trading, Market Making, and Estimates of Stock Price Volatility," *Journal of Financial Economics*, 15, 359—372.

Mason, S., R. Merton, A. Perold, and P. Tufano, 1995, *Cases in Financial Engineering: Applied Studies of Financial Innovation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Mayers, D., 1972, "Nonmarketable Assets and Capital Market Equilibrium under Uncertainty," in Jensen, M. (ed.), *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger, New York, 223—248.

McCallum, B., 1994, "Monetary Policy and the Term Structure of Interest Rates," Working Paper 4938, NBER, Cambridge, MA.

McCullagh, P., 1980, "Regression Models for Ordinal Data," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B(42), 109—142.

McCulloch, J., 1971, "Measuring the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Business*, 44, 19—31.

——, 1975, "The Tax-Adjusted Yield Curve," *Journal of Finance*, 30, 811—830.

——, 1993, "A Reexamination of Traditional Hypotheses About the Term Structure: A Comment," *Journal of Finance*, 48, 779—789.

McCulloch, J., and H. Kwon, 1993, "US Term Structure Data, 1947—1991," Working Paper 93—6, Ohio State University.

McCulloch, W., and W. Pitts, 1943, "A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity," *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115—133.

McQueen, G., and V. Roley, 1993, "Stock Prices, News, and Business Conditions," *Review of Financial Studies*, 6, 683—707.

Mech, T., 1993, "Portfolio Return Autocorrelation," *Journal of Financial Economics*, 34, 307—344.

Mehra, R., and E. Prescott, 1985, "The Equity Premium: A Puzzle," *Journal of Monetary Economics*,

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

15,145—161.

Mei,J., 1993, "A Semiautoregression Approach to the Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Finance*, 48,599—620.

Melino, A., 1988, "The Term Structure of Interest Rates: Evidence and Theory," *Journal of Economic Surveys*, 2,335—366.

Melino, A., and S. Turnbull, 1990, "Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility," *Journal of Econometrics*, 45,239—265.

Merton, R., 1969, "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case," *Review of Economics and Statistics*, 51,247—257.

——, 1972, "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7,1851—1872.

——, 1973a, "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, 41, 867—887.

——, 1973b, "Rational Theory of Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4,141—183.

——, 1976a, "The Impact on Option Pricing of Specification Error in the Underlying Stock Price Distribution," *Journal of Finance*, 31,333—350.

——, 1976b, "Option Pricing when Underlying Stock Returns Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3,125—144.

——, 1980, "On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation," *Journal of Financial Economics*, 8,323—361.

——, 1981, "On Market Timing and Investment Performance, I: An Equilibrium Theory of Value for Market Forecasts," *Journal of Business*: 54,363—406.

——, 1990, *Continuous-Time Finance*, Blackwell Publishers, Cambridge, MA.

Miccheli, C., 1986, "Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally Positive Definite Functions," *Constructive Approximation*, 2,11—22.

Mikkelson, W., and M. Partch, 1986, "Valuation Effects of Security Offerings and the Issuance Process," *Journal of Financial Economics*, 15,31—60.

Mishkin, F., 1988, "The Information in the Term Structure: Some Further Results," *Journal of Applied Econometrics*, 3,307—314.

——, 1990a, "The Information in the Longer-Maturity Term Structure about Future Inflation," *Quarterly Journal of Economics*, 105,815—821.

——, 1990b, "What Does the Term Structure Tell Us about Future Inflation?," *Journal of Monetary Economics*, 25,77—95.

Mitchell, M., and J. Netter, 1994, "The Role of Financial Economics in Securities Fraud Cases: Applications at the Securities and Exchange Commission," *The Business Lawyer*, 49,545—590.

Modest, D., and M. Sundaresan, 1983, "The Relationship between Spot and Futures Prices in Stock Index Futures Markers: Some Preliminary Evidence," *Journal of Futures Markets*, 3,15—42.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Modigliani, F., and R. Sutch, 1966, "Innovations in Interest Rate Policy," *American Economic Review*, 56, 178—197.

Mood, A., 1940, "The Distribution Theory of Runs," *Annals of Mathematical Statistics*, 11, 367—392.

Moody, J., and C. Darken, 1989, "Fast Learning in Networks of Locally Tuned Processing Units," *Neural Computations*, 1, 281—294.

Morrison, D., 1990, *Multivariate Statistical Methods*, McGraw Hill, New York.

Morse, D., 1984, "An Econometric Analysis of the Choice of Daily Versus Monthly Returns in Tests of Information Content," *Journal of Accounting Research*, 22, 605—623.

Mossin, J., 1996, "Equilibrium in a Capital Asset Market," *Econometrica*, 35, 768—783.

Muirhead, R., 1983, *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley and Sons, New York.

Murphy, J., 1986, *Technical Analysis of the Futures Markets*, New York Institure of Finance, New York.

Muth, J., 1960, "Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts," *Journal of the American Statistical Association*, 55, 299—306.

Muthuswamy, J., 1988, "Asynchronous Closing Prices and Spurious Autocorrelations in Portfolio Returns," working paper, Graduate School of Business, University of Chicago.

Myers, J., and A. Bakay, 1948, "Influence of Stock Split-Ups on Market Price," *Harvard Business Review*, 251—265.

Myers, S., and N. Majluf, 1984, "Corporate Financing and Investment Decisions When Firms Have Information that Investors Do Not Have," *Journal of Financial Economics*, 13, 187—221.

Naik, V., and M. Lee, 1994, "The Yield Curve and Bond Option Prices with Discrete Shifts in Economic Regimes," unpublished paper, University of British Columbia and University of Saskatchewan.

Neftci, S., 1991, "Naive Trading Rules in Financial Markets and Wiener-Kolmogorov Prediction Theory: A Study of 'Technical Analysis'," *Journal of Business*, 64, 549—572.

Nelson, D., 1990, "Stationarity and Persistence in the CARCH(1,1) Model," *Econometric Theory*, 6, 318—334.

——, 1991, "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, 347—370.

——, 1992, "Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models I: Getting the Right Variance with the Wrong Model," *Journal of Econometrics*, 52, 61—90.

——, 1996, "Asymptotically Optimal Smoothing with ARCH Models," *Econometrica*, 64, 561—573.

Nelson, C., and M. Kim, 1993, "Predictable Stock Returns: The Role of Small Sample Bias," *Journal of Finance*, 48, 641—661.

Nelson, C., and A. Siegel, 1987, "Parsimonious Modelling of Yield Curves," *Journal of Business*.

Nelson, C., and R. Startz, 1990, "The Distribution of the Instrumental Variables Estimator and Its t-Ratio when the Instrument Is a Poor One," *Journal of Business*, 63, S125—S140.

Nelson, D., and D. Foster, 1994, "Asymptotic Filtering Theory for Univariate ARCH Models," *Econo-*

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

metrica, 62, 1—41.

Nelson, D., and K. Ramaswamy, 1990, "Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models," *Review of Financial Studies*, 3, 393—430.

New York Stock Exchange Fact Book: 1992 *Data*, 1993, New York Stock Exchange, April.

Newey, W., 1985, "Semiparametric Estimation of Limited Dependent Variable Models with Endogenous Explanatory Variables," *Annales de L'Insee*, 59/60, 219—237.

Newey, W., and K. West, 1987, "A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix," *Econometrica*, 55, 703—708.

Niederhoffer, V., 1965, "Clustering of Stock Prices," *Operations Research*, 13, 258—265.

——, 1966, "A New Look at Clustering of Stock Prices," *Journal of Business*, 39, 309—313.

Niederhoffer, V., and M. Osborne, 1966, "Market Making and Reversal on the Stock Exchange," *Journal of the American Statistical Association*, 61, 897—916.

Niyogi, P., and F. Girosi, 1996, "On the Relationship between Generalization Error, Hypothesis Complexity, and Sample Complexity for Radial Basis Functions," *Neural Computation*, 8, 819—842.

Officer, R., 1972, "The Distribution of Stock Returns," *Journal of the American Statistical Association*, 67, 807—812.

——, 1973, "The Variability of the Market Factor of the New York Stock Exchange," *Journal of Business*, 46, 434—453.

Ogaki, M., 1992, "Generalized Method of Moments: Econometric Applications," in G. Maddala, C. Rao, and H. Vinod (eds.), *Handbook of Statistics*, *Volume* 11: *Econometrics*, North-Holland, Amsterdam.

O'Hara, M., 1995, *Market Microstructure Theory*, Blackwell Publishers, Cambridge, MA.

Oldfield, G., R. Rogalski, and R. Jarrow, 1977, "An Autoregressive Jump Process for Common Stock Returns," *Journal of Financial Economics*, 6, 389—418.

Osborne, M., 1959, "Brownian Motion in the Stock Market," *Operations Research*, 7, 145—173.

——, 1962, "Periodic Structure in the Brownian Motion of Stock Prices," *Operations Research*, 10, 345—379.

Pagan, A., and G. Schwert, 1990, "Alternative Models for Conditional Stock Volatility," *Journal of Econometrics*, 45, 267—290.

Parker, D., 1985, "Learning Logic," Working Paper 47, Center for Computational Research in Economics and Management Science, Massachusetts, Institute of Technology.

Rarkinson, M., 1980, "The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return," *Journal of Business*, 53, 61—65.

Paskov, S., and J. Traub, 1995, "Faster Valuation of Financial Derivatives," *Journal of Portfolio Management*, 22, 113—120.

Pau, L., 1991, "Technical Analysis for Portfolio Trading by Syntactic Pattern Recognition," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, 715—730.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Pearson, N., and T. Sun, 1994, "Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model," *Journal of Finance*, 49, 1279—1304.

Pennacchi, G., 1991, "Identifying the Dynamics of Real Interest Rates and Inflation: Evidence Using Survey Data," *Review of Financial Studies*, 4, 53—86.

Perrakis, S., 1986, "Option Bounds in Discrete Time: Extensions and the Price of the American Put," *Journal of Business*, 59, 119—142.

Perrakis, S., and P. Ryan, 1984, "Option Pricing Bounds in Discrete Time," *Journal of Finance*, 39, 519—525.

Perron, P., 1989, "The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis," *Econometrica*, 57, 1361—1402.

——, 1991, "Test Consistency With Varying Sampling Frequency," *Econometric Theory*, 7, 341—368.

Pesaran, M., and S. Potter, 1992, "Nonlinear Dynamics and Econometrics: An Introduction," *Journal of Applied Econometrics*, 7(Supp), S1—S8.

Petersen, M., and S. Umlauf, 1990, "An Empirical Examination of the Intraday Behavior of the NYSE Specialist," working paper, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.

Phillips, S., and C. Smith, 1980. "Trading Costs for Listed Options: The Implications for Market Efficiency," *Journal of Financial Economics*, 8, 179—201.

Poggio, T., and F. Girosi, 1990, "Networks for Approximation and Learning," *Proceedings of the IEEE*, special issue: *Neural Networks I: Theory and Modeling*, 78, 1481—1497.

Poterba, J., and L. Summers, 1986, "The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations," *American Economic Review*, 76, 1142—1151.

——, 1988, "Mean Reversion in Stock Returns, : Evidence and Implications," *Journal of Financial Economics*, 22, 27—60.

Powell, M., 1987, "Radial Basis Functions for Multivariable Interpolation: A Review, "in J. Mason and M. Cox(eds.), *Algorithms for Approximation*, Clarendon Press, Oxford, UK.

Prabhala, N., 1995, "Conditional Methods in Event-Studies and An Equilibrium Justification for Using Standard Event-Study Procedures," School of Management, Yale University, New Haven, CT.

Praetz, P., 1972, "The Distribution of Share Price Changes," *Journal of Business*, 45, 49—55.

Priestley, M., 1988, *Non-Linear and Non-Stationary Time Series Analysis*, Academic Press, San Diego.

Radner, R., 1982, "Equilibrium Under Uncertainty," in K. Arrow and M. Intriligator(eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, Volume Ⅱ, North-Holland, New York, 923—1006.

Rady, S., 1994, "State Prices Implicit in Valuation Formulae for Derivative Securities: A Martingale Approach," Discussion Paper 181, LSE Financial Markets Group, London, UK.

Randles, R., and D. Wolfe, 1979, *Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics*, John Wiley and Sons, New York.

Reddington, F., 1952, "Review of the Principle of Life-Office Valuations," *Journal of the Institute of*

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Actuaries, 78, 286—340.

Reinsch, C., 1967, "Smoothing by Spline Functions," *Numer Math*, 10, 177—183.

Restoy, F., and P. Weil, 1993, "Approximate Equilibrium Asset Pricing," unpublished paper, Bank of Spain and ECARE.

Richard, S., 1978, "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, 7, 38—58.

Richardson, M., 1993, "Temporary Components of Stock Prices: A Skeptic's View," *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, 199—207.

Richardson, M., and T. Smith, 1991, "Tests of Financial Models with the Presence of Overlapping Observations," *Review of Financial Studies*, 4, 227—254.

——, 1994, "A Unified Approach to Testing for Serial Correlation in Stock Returns," *Journal of Business*, 67, 371—399.

Richardson, M., and J. Stock, 1989, "Drawing Inferences from Statistics Based on Multi-Year Asset Returns," *Journal of Financial Economics*, 25, 323—348.

Rietz, T., 1988, "The Equity Risk Premium: A Solution?," *Journal of Monetary Economics*, 21, 117—132.

Ritchken, P., 1985, "On Option Pricing Bounds," *Journal of Finance*, 40, 1219—1233.

Ritter J., 1990, "Long-Run Performance of Initial Public Offerings," *Journal of Finance*.

Robbins, H., and S. Monro, 1951a. "A Stochastic Approximation Method," *Annals of Mathematical Statistics*, 25, 737—744.

——, 1951b, "A Stochastic Approximation Model," *Annals of Mathematical Statistics*, 22, 400—407.

Roberds, W., D. Runkel, and C. Whiteman, 1996, "A Daily View of Yield Spreads and Short-Term Interest Rate Movements," *Journal of Money, Credit and Banking*, 28, 34—53.

Roberts, H., 1959, "Stock-Market 'Patterns' and Financial Analysis: Methodological Suggestions," *Journal of Finance*, 14, 1—10.

——, 1967, "Statistical versus Clinical Prediction of the Stock Market," umpublished manuscript, Center for Research in Security Prices, University of Chicago, May.

Robinson, M., 1988, "Block Trades on the Major Canadian and U. S. Stock Exchanges: A Study of Pricing Behavior and Market Efficiency," unpublished Ph. D. dissertation, School of Business Administration, University of Western Ontario, Ontario, Canada.

Robinson, P., 1979, "The Estimation of a Non-Linear Moving Average Model," *Stochastic Processes and Their Applications*, 5, 81—90.

Roll, R., 1977, "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests: Part Ⅰ," *Journal of Financial Economics*, 4, 129—176.

——, 1980, "Orthogonal Portfolios," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 1005—1023.

——, 1984, "A Simple Implicit Measure of the Effective Bid-Ask Spread in an Efficient Market," *Journal of Finance*, 39, 1127—1140.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Roll, R., and S. Ross, 1980. "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Finance*, 35, 1073—1103.

——, 1984, "A Critical Reexamination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory: A Reply", *Journal of Finance*, 39, 347—350.

——, 1994, "On the Cross-Sectional Relation between Expected Returns and Betas," *Journal of Finance*, 49, 101—122.

Romano, J., and L. Thombs, 1996, "Inference for Autocorrelations under Weak Assumptions," *Journal of the American Statistical Association*, 91, 590—600.

Rosenblatt, F., 1962, *Principles of Neurodynamics*, Spartan Books, New York.

Ross, S., 1976, "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing," *Journal of Economic Theory*, 13, 341—360.

——, 1977, "Risk, Return, and Arbitrage," in I. Friend and J. Bicksler (eds.), *Risk and Return in Finance*, I, Ballinger, Cambridge, MA.

Rubin, D., and D. Thayer, 1982, "EM Algorithms for ML Factor Analysis," *Psychometrika*, 57, 69—76.

Rubinstein, M., 1976, "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options," *Bell Journal of Economics*, 7, 407—425.

——, 1985, "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978," *Journal of Finance*, 40, 455—480.

——, 1994, "Implied Binomial Trees, " *Journal of Finance*, 49, 771—818.

Rudebusch, G., 1995, "Federal Reserve Interest Rate Targeting, Rational Expectations, and the Term Structure," *Journal of Monetary Economics*, 35, 245—274.

Rumelhart, D., G. Hinton, and R. Williams, 1986, "Learning Internal Representation by Error Propagation," in D. Rumelhart and J. McClelland (eds.), *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition*, Volume 1: *Foundations*, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, MA, chap. 8.

Ruud, P., 1983, "Sufficient Conditions for the Consistency of Maximum Likelihood Estimation Despite Misspecification of Distribution in Multinomial Discrete Choice Models," *Econometrica*, 51, 225—228.

Samuelson, P., 1965, "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly," *Industrial Management Review*, 6, 41—49.

——, 1967, "Efficient Portfolio Selection for Pareto-Lévy Investments," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2, 107—122.

——, 1969, "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming," *Review of Economics and Statistics*, 51, 239—246.

——, 1972, "Mathematics of Speculative Price," in Day, R., and S. Robinson (eds.), *Mathematical Topics in Economic Theory and Computation*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Phila-

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

delphia, PA.

——, 1973, "Proof that Properly Discounted Present Values of Assets Vibrate Randomly," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 369—374.

——, 1976, "Limited Liability, Short Selling, Bounded Utility, and Infinite-Variance Stable Distributions," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 485—503.

Schaefer, S., 1981, "Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in the Market for British Government Securities," *Economic Journal*, 91, 415—431.

——, 1982, "Tax-Induced Clientele Effects in the Market for British Government Securities," *Journal of Financial Economics*.

Scheinkman, J., and B. LeBaron, 1989, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," *Journal of Business*, 62, 311—338.

Scheinkman, J., and M. Woodford, 1994, "Self-Organized Criticality and Economic Fluctuations," *American Economic Review*, 84, 417—421.

Schipper, K., and R. Thompson, 1983, "The Impact of Merger-Related Regulations on the Shareholders of Acquiring Firms," *Journal of Accounting Research*, 21, 184—221.

——, 1985, "The Impact of Merger-Related Regulations Using Exact Test Statistics," *Journal of Accounting Research*, 23, 408—415.

Scholes, M., and J. Williams, 1977, "Estimating Betas from Nonsynchronous Data," *Journal of Financial Economics*, 5, 309—328.

Schuss, Z., 1980, *Theory and Application of Stochastic Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York.

Schwartz, E., 1977, "The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach," *Journal of Financial Economics*, 4, 79—93.

Schwert, G., 1981, "Using Financial Data to Measure the Effects of Regulation," *Journal of Law and Economics*, 24, 121—157.

——, 1989. "Why Does Stock Market Volatility Change Over Time?," *Journal of Finance*, 44, 1115—1153.

Schwert, W., 1990, "Stock Market Volatility," *Financial Analysts Journal*, May-June, 23—34.

Sclove, S., 1983a, "Time-Series Segmentation: A Model and a Method," *Information Sciences*, 29, 7—25.

——, 1983b, "On Segmentation of Time Series," in S. Karlin, T. Amemiya, and L. Goodman, eds., *Studies in Econometrics, Time Series, and Multivariate Statistics*, Academic Press, New York.

Scott, L., 1985, "The Present Value Model of Stock Prices: Regression Tests and Monte Carlo Results," *Review of Economics and Statistics*, 67, 599—607.

——, 1987, "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 419—438.

Securities and Exchange Commission, 1994, *Market 2000: An Examination of Current Equity Market*

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Developments, US Government Printing Office, Washington, DC.

Sentana, E., 1991, "Quadratic ARCH Models: A Potential Reinterpretation of ARCH Models as Second-Order Taylor Approximations," unpublished paper, London School of Economics.

Serfling, R., 1980. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons, New York.

Shanken, J., 1982, "The Arbitrage Pricing Theory: Is It Testable?," *Journal of Finance*, 37, 1129—1140.

——, 1985a, "Multi-Beta CAPM or Equilibrium APT? A Reply," *Journal of Finance*, 40, 1189—1196.

——, 1985b, "Multivariate Tests of the Zero-Beta CAPM," *Journal of Financial Economics*, 14, 327—348.

——, 1986, "Testing Portfolio Efficiency When the Zero-Beta Rate Is Unknown," *Journal of Finance*, 41, 269—276.

——, 1987a, "Multivariate Proxies and Asset Pricing Relations: Living with the Roll Critique," *Journal of Financial Economics*, 18, 91—110.

——, 1987b, "Nonsynchronous Data and the Covariance-Factor Structure of Returns," *Journal of Finance*, 42, 221—232.

——, 1987c, "A Bayesian Approach to Testing Portfolio Efficiency," *Journal of Financial Economics*, 19, 195—215.

——, 1992a, "The Current State of the Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Finance*, 47, 1569—1574.

——, 1992b, "On the Estimation of Beta-Pricing Models," *Review of Financial Studies*, 5, 1—34.

Sharpe, W., 1964, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, 19, 425—442.

——, 1970, *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, New York, NY.

Sharpe, W., G. Alexander, and J. Bailey, 1995, *Investments*, Fifth Edition, PrenticeHall, Englewood Cliffs, NJ.

Shea, G., 1984, "Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, 253—269.

——, 1985, "Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note," *Journal of Finance*, 40, 319—325.

Shefrin, H., and M., Statman, 1985, "The Disposition to Ride Winners Too Long and Sell Lowers Too Soon: Theory and Evidence," *Journal of Finance*, 41, 774—790.

Shephard, N., and S. Kim, 1994, "Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models," unpublished paper, Nuffield College, Oxford, and Princeton University.

Shiller, R., 1981, "Do Stock Prices Move Too Much to Be Justified by Subsequent Changes in Dividends?," *American Economic Review*, 71, 421—436.

——, 1984, "Stock Prices and Social Dynamics," *Brookings Papers on Economic Activity*, 2, 457—498.

——, 1989. *Market Volatility*, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, MA.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

——, 1990, "The Term Structure of Interest Rates," in B. Friedman and F. Hahn (eds.), *Handbook of Monetary Economics*, North-Holland, Amsterdam.

Shiller, R., and P. Perron, 1985, "Testing the Random Walk Hypothesis: Power Versus Frequency of Observation," *Economics Letter*, 18, 381—386.

Shiller, R., J. Campbell, and K. Schoenholtz, 1983, "Forward Rates and Future Policy: Interpreting the Term Structure of Interest Rates," *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, 173—217.

Shimko, D., 1991, "Beyond Implied Volatility: Probability Distributions and Hedge Ratios Implied by Option Prices," working paper, University of Southern California.

——, 1993, "Bounds of Probability," *RISK*, 6, 33—37.

Shorack, G., and J. Wellner, 1986, *Empirical Processes with Applications to Statistics*, John Wiley and Sons, New York.

Sias, R., and L. Starks, 1994, "Institutions, Individuals and Return Autocorrelations," Working Paper, University of Texas, Austin.

Siegel, J., 1994, *Stocks for the Long Run*, Norton, New York.

Silvey, S., 1975, *Statistical Inference*, Chapman and Hall, London.

Simkowitz, M., and W. Beedles, 1980, "Asymmetric Stable Distributed Security Returns," *Journal of the American Statistical Association*, 75, 306—312.

Sims, C. 1974, "Output and Labor Input in Manufacturing," *Brookings Papers on Economic Activity*, 3, 695—728.

——, 1977, "Exogeneity and Causal Ordering in Macroeconomic Models," in *New Methods in Business Cycle Research: Proceedings from a Conference*, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Singleton, K., 1990, "Specification and Estimation of Intertemporal Asset Pricing Models," in B. Friedman and F. Hahn (eds.), *Handbook of Monetary Economics*, North-Holland, Amsterdam.

Smith, A., 1968, *The Money Game*, Random House, New York.

Smith, C., 1976, "Option Pricing: A Review," *Journal of Financial Economics*, 3, 3—51.

Stambaugh, R., 1982, "On the Exclusion of Assets from Tests of the Two Rarameter Model," *Journal of Financial Economics*, 10, 235—268.

——, 1986, "Bias in Regressions with Lagged Stochastic Regressors," CRSP Working Paper 156, University of Chicago.

——, 1988, "The Information in Forward Rates: Implications for Models of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 21, 41—70.

Startz, R., 1989, "The Stochastic Behavior of Durable and Non-Durable Consumption," *Review of Economics and Statistics*, 71, 356—363.

Stein, E., and J. Stein, 1991, "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach," *Review of Financial Studies*, 4, 727—753.

Stoker, T., 1986, "Consistent Estimation of Scaled Coefficients," *Econometrica*, 54, 1461—1481.

——, 1991, "Equivalence of Direct, Indirect and Slope Estimators of Average Derivatives," in W. Barnett,

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

J. Powell, and G. Tauchen (eds.), *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

——, 1992, *Lectures on Semiparametric Econometrics*, CORE Lecture Series, CORE Foundation, Louvain-la-Neuve, Belgium.

Stoll, H., 1978, "The Supply of Dealer Services in Securities Markets," *Journal of Finance*, 33, 1133—1151.

——, 1985, *The Stock Exchange Specialist System: An Economic Analysis*, Salomon Brothers Center, New York University, New York.

——, 1989, "Inferring the Components of the Bid-Ask Spread: Theory and Empirical Tests", *Journal of Finance*, 44, 115—134.

Stoll, H., and R. Whaley, 1990, "Stock Market Structure and Volatility," *Review of Financial Studies*, 3, 37—71.

Strang, G., 1976, *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, New York.

Stuart, A., and K. Ord, 1987, *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, Vols. Ⅰ—Ⅲ, Oxford University Press, New York.

Stutzer, M., 1995, "A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation," working paper, Carlson School of Management, University of Minnesota.

Subba Rao, T., and M. Gabr, 1984, *An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models*, Springer-Verlag, Berlin.

Suits, D., A. Mason, and L. Chan, 1978, "Spline Functions Fitted by Standard Regression Methods," *Review of Economics and Statistics*, 60, 132—139.

Summers, L., 1986, "Does the Stock Market Rationally Reflect Fundamental Values?," *Journal of Finance*, 41, 591—600.

Sun, T., 1992, "Real and Nominal Interest Rates: A Discrete-Time Model and Its Continuous-Time Limit," *Review of Financial Studies*, 5, 581—611.

Sundaresan, S., 1989, "Intertemporally Dependent Preferences and the Volatility of Consumption and Wealth," *Review of Financial Studies*, 2, 73—88.

——, 1996, *Fixed-Income Securities*, forthcoming.

Svensson, L., 1994, "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992—1994," Working Paper 4871, NBER, Cambridge, MA.

Taylor, S., 1986, *Modelling Financial Time Series*, John Wiley and Sons, London.

Taylor, M., and H. Allen, 1992, "The Use of Technical Analysis in the Foreign Exchange Market," *Journal of International Money and Finance*, 11, 304—314.

Teräsvirta, T., D. Tjøstheim, and C. Granger, 1994, "Aspects of Modelling Nonlinear Time Series," in R. Engle and D. McFadden (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. Ⅳ, Elsevier, Amsterdam.

Thisted, R., 1991, "Assessing the Effect of Allergy Medications: Models for Paired Comparisons on Ordered Categories," *Statistics of Medicine*, forthcoming.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Thompson, J., and H. Stewart, 1986, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley and Sons, New York.

Tinic, S., 1972, "The Economics of Liquidity Services," *Quarterly Journal of Economics* 86, 79—93.

Tirole, J., 1982, "On the Possibility of Speculation under Rational Expectations," *Econometrica*, 50, 1163—1181.

——, 1985, "Asset Bubbles and Overlapping Generations," *Econometrica*, 53, 1499—1527.

Tong, H., 1983, *Threshold Models in Nonlinear Time Series Analysis*, Springer-Verlag, New York.

——, 1990, *Non-linear Time Series: A Dynamic System Approach*, Oxford University Press, Oxford.

Treynor, J., and R. Ferguson, 1985, "In Defense of Technical Analysis," *Journal of Finance*, 40, 757—773.

Trzcinka, C., 1986, "On the Number of Factors in the Arbitrage Pricing Model," *Journal of Finance*, 41, 347—368.

Tsay, R., 1986, "Nonlinearity Tests for Time Series," *Biometrika*, 73, 461—466.

Tucker, A., 1992, "A Reexamination of Finite-and Infinite-Variance Distributions as Models of Daily Stock Returns," *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 73—81.

Turnbull, S., and F. Milne, 1991, "A Simple Approach to Interest-Rate Option Pricing," *Review of Financial Studies*, 4, 87—120.

Tversky, A., and D. Kahneman, 1992, "Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty," *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297—323.

Vapnik, V., 1982, *Estimation of Dependences Based on Empirical Data*, Springer-Verlag, Berlin.

Vasicek, O., 1977, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, 177—188.

Vasicek, O., and H. Fong, 1982, "Term Structure Modelling Using Exponential Splines," *Journal of Finance*, 37, 339—341.

Vayanos, D., 1995, "Transaction Costs and Asset Prices: A Dynamic Equilibrium Model," unpublished paper, Stanford University.

Volterra, V., 1959, *Theory of Functionals and of Integro-Differential Equations*, Dover, New York.

Wahba, G., 1990, *Spline Models for Observational Data*, Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 59, SIAM Press, Philadelphia.

Wallis, W., and H. Roberts, 1956, *Statistics: A New Approach*, Free Press, New York.

Wang, J., 1993, "A Model of Intertemporal Asset Prices Under Asymmetric Information," *Review of Economic Studies*, 60, 249—282.

——, 1994, "A Model of Competitive Stock Trading Volume," *Journal of Political Economy*, 102, 127—168.

Weil, P., 1989, "The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle," *Journal of Monetary Economics*, 24, 401—421.

West, K., 1988a, "Bubbles, Fads, and Stock Price Volatility Tests: A Partial Evaluation," *Journal of*

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Finance, 43, 639—656.

——, 1988b, "Dividend Innovations and Stock Price Volatility," *Econometrica*, 56, 37—61.

Wheatley, S., 1988, "Some Tests of the Consumption-Based Asset Pricing Model," *Journal of Monetary Economics*, 22, 193—218.

White, H., 1980, "A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity," *Econometrica*, 48, 817—838.

——, 1982, "Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models," *Econometrica*, 50, 1—25.

——, 1984, *Asymptotic Theory for Econometricians*, Academic Press, Orlando, FL.

——, 1992, *Artificial Neural Networks: Approximation and Learning Theory*, Blackwell Publishers, Cambridge, MA.

White, H., and I. Domowitz, 1984, "Nonlinear Regression with Dependent Observations," *Econometrica*, 52, 143—162.

Widrow, B., and S. Stearns, 1985, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Wiener, N., 1923, "Differential-Space," *Journal of Mathematics and Physics*, 2, 131—174.

Wiggins, J., 1987, "Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates," *Journal of Financial Economics*, 19, 351—372.

Wilcox, D., 1992, "The Construction of U. S. Consumption Data: Some Facts and Their Implications for Empirical Work," *American Economic Review*, 82, 922—941.

Wood, R., T. McInish, and K. Ord, 1985, "An Investigation of Transactions Data for NYSE Stocks," *Journal of Finance*, 40, 723—738.

Working, H., 1960, "Note on the Correlation of First Differences of Averages in a Random Chain," *Econometrica*, 28, 916—918.

Yaari, M., 1987, "The Dual Theory of Choice Under Risk," *Econometrica*, 55, 95—115.

Zarowin, P., 1989, "Short-Run Overreaction: Size and Seasonality Effect," *Journal of Portfolio Management*, 15, 26—29.

Zehna, P., 1996, "Invariance of Maximum Likelihood Estimation," *Annals of Mathematical Statistics*, 37, 744—744.

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

人名对照表

Ait-Sahalia	艾特萨哈里尔
Abel	艾贝尔
Acharya	爱查亚
Adams	亚当斯
Admati	亚德麦提
Affleck-Graves	艾弗勒克—格雷夫斯
Ainslie	艾因斯列
Aitchison	爱特希森
Aiyagari	艾亚格雷
Aldous	阿尔德斯
Alexander，G.	亚历山大·G.
Alexander，S.	亚历山大·S.
Allen	爱伦
Amihud	埃米赫德
Amin	埃米因
Ammer	安默
Andersen	安徒生
Anderson	安德森
Andrews	安德鲁森
Arnold	安诺德
Arrow	安诺尔
Aschauer	艾斯查尔
Ashford	阿什弗德
Asquith	艾斯奎司
Atchison	阿特希森
Bachelier	巴彻利尔
Backus	巴克斯
Bagehot	巴吉霍特
Bailey	贝利
Bakay	拜克伊
Baker	拜克
Balduzzi	鲍尔杜齐
Ball，C.	鲍尔·C.
Ball，R.	鲍尔·R.
Banz	班齐
Barberis	巴伯里斯
Barclay	巴克雷
Barr	巴尔
Barron，A.	巴伦·A.
Barron，R.	巴伦·R.
Barsky	巴斯克伊
Barton	巴顿
Basu	巴苏
Beckers	贝克斯
Beedles	毕都斯
Benartzi	比纳特齐
Bernard	伯纳德
Bernstein	伯恩斯坦
Bertola	伯特勒
Bertsimas	伯特西玛斯
Bick	比克
Bierwag	比尔威格
Billingsley	比苓斯利
Black	布莱克
Blanchard	布兰恩查德
Blattberg	布莱特伯格
Bliss	布里斯
Blume，L.	布鲁姆·L.
Blume，M.	布鲁姆·M.
Boehmer	波赫默
Bboldrin	鲍德瑞
Bollerslve	鲍勒斯利夫
Bononmo	鲍诺莫

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Boudoukh	布道柯赫	Cone	科恩
Box	鲍克斯	Connor	科诺
Brainard	布赖纳德	Constantinides	康斯坦丁尼德斯
Braum	布劳恩	Cooper	库珀
Breeden	布里登	Cootner	库特呐
Breen	布里恩	Copeland	科珀兰德
Brennan	布里恩南	Corrado	科雷德
Brenner	布伦纳	Cowles	科尔斯
Brickley	布里克利	Cox, D.	考克斯 · D.
Brieman	布雷曼	Cox, J.	考克斯 · J.
Brock	布拉克	Crack	柯雷克
Brodsky	布洛德斯齐	Craig	柯雷戈
Bronfman	布隆夫曼	Curcio	柯西奥
Broomhead	布鲁姆海德	Culter	
Brown, D.	布朗 · D.		
Brown, P.	布朗 · P.	Dahm	达赫姆
Brown, R.	布朗 · R.	Dann	丹恩
Brown, S.	布朗 · S.	Darken	达肯
Burnside	班赛德	David	戴维
Butler	巴特勒	Davis, D.	戴维斯 · D.
		Davis, M.	戴维斯 · M.
Campbell, C.	坎贝尔 · C.	Day	德伊
Campbell, J.	坎贝尔 · J.	Deaton	迪顿
Carleton	卡里顿	DeBondt	迪波恩德
Carlstein	卡尔斯坦	Debreu	德布卢
Cecchetti	塞克海提	Dechert	德谢特
Chamberlain	查伯雷恩	De Long	德朗
Chan, K.	查恩 · K.	DeLong	迪朗
Chan, L.	查恩 · L.	Demsetz	德莫塞茨
Chen, N.	希恩 · N.	Dent	丹特
Christie, A.	克里斯蒂 · A.	Derman	德曼
Christie, W.	克里斯蒂 · W.	Dhrymes	德赫里麦斯
Chung, C.	强恩 · C.	Diaconis	戴尔科尼斯
Chung, K.	强恩 · K.	Diamond	戴尔蒙德
Cochrane	柯克雷恩	Diba	迪巴
Cohen	科汗	Dickey	迪克
Collins	科林斯	Dimson	迪默森

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Ding 迪恩
Dolley 多利
Domowitz 多莫维茨
Donaldson 多纳德森
Duffie 达菲
Dufour 达弗
Dunn 达恩
Dupire 杜派厄
Durlauf 杜劳夫
Dybvig 戴伯维格

Easley 埃斯利
Eckbo, B. 埃克鲍 · B.
Eckbo, E. 埃克鲍 · E.
Edwards 埃德华兹
Eichenbaum 艾谢恩鲍姆
Eikeboom 艾克汉姆
Einstein 爱因斯坦
Engle 恩格尔
Epstein 埃普斯坦
Estrella 埃什特拉
Eytan 埃坦

Fabozzi 法鲍兹
Fama 法马
Fang 方恩
Faust 浮士德
Feller 费勒
Ferguson 费格森
Fielitz 斐森
Fischel 费利兹
Fisher 费雪尔
Fishman 费雪曼
Flavin 弗莱文
Foerster 弗厄斯蒂
Fong 佛恩
Foresi 佛里西
Foster 佛斯特
Frankel 弗兰克尔
Frees 弗里斯
French 弗兰切
Friedman 弗里德曼
Friend 弗兰德
Froot 弗鲁特
Fuller 弗勒
Furbush 弗巴西

Gabr 加布拉
Galai 加莱
Gallant, A. 加兰特
Galli 加利
Garber 加伯
Garcia 加西亚
Garman 加曼
Gatto 加托
George 乔治
Gertler 杰特勒
Gibbons 吉邦斯
Gilles 吉利斯
Giovannini 吉尔凡尼尼
Girosi 吉罗西
Gleick 格雷克
Glosten 格劳斯顿
Godek 戈德克
Geotzmann 戈兹曼
Goldberger 哥德伯格
Goldman 戈登伯格
Goldstein 戈德斯坦
Gonedes 戈内德斯
Gonzalez-Rivera 戈恩扎莱兹—雷弗拉
Goodhart 戈德哈特
Gordon 戈登
Gottlieb 戈特利亚伯
Graham 格拉汉

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Grandmont	戈兰德蒙特
Granger	格兰杰
Granito	格拉尼托
Grassberger	戈拉斯伯格
Gray	戈雷
Gregory	格雷戈里
Grinblatt	戈里恩布莱特
Grossman, H.	格罗斯曼．H.
Grossman, S.	格罗斯曼．S.
Gultekin, B.	伽尔特肯．B.
Gultekin, M.	伽尔特肯．M.
Gultekin, N.	伽尔特肯．N.
Gurland	戈兰德
Hagerman	海格曼
Hakansson	哈干森
Hald	哈尔德
Hall, S.	哈尔· S.
Hall, R.	哈尔· R.
Hamilton	汉密尔顿
Hammersley	汉默斯里
Hampel	汉姆贝尔
Handscomb	汉德斯康姆
Hansen, B.	汉森· B.
Hansen, L.	汉森· L.
Härdle	哈德尔
Hardouvelis	哈道维利斯
Harjes	哈杰斯
Harpaz	哈帕兹
Harris, J.	哈里斯· J.
Harris, L.	哈里斯· L.
Harrison	哈里森
Harvey, A.	哈维· A.
Harvey, C.	哈维· C.
Hasbrouck	哈斯布罗克
Hausman	豪斯曼
Hawawini	哈瓦维尼
He, H.	荷· H.
Heath	希瑟
Heaton	希顿
Hedge	海杰
Hentschel	汉茨切尔
Hertz	赫兹
Heston	海斯顿
Hicks	希克斯
Ho	霍
Hodrick	霍德里克
Hoel	霍尔
Hofmann	霍夫曼
Hogarth	霍盖斯
Holden	霍尔登
Holt	霍尔特
Hornik	霍尼克
Hosking	霍斯金
Hsieh	海塞
Hsu	赫苏
Huang, C.	华恩· C.
Huang, R.	华恩· R.
Huberman	赫伯曼
Hull	赫尔
Hurst	赫斯特
Hutchinson	哈切恩森
Ingersoll	因格索尔
Irish	艾里西
Itô	伊藤
Jackwerth	杰克韦斯
Jacquier	杰奎尔
Jagannathan	雅格纳詹
Jain	杰恩
James	詹姆斯
Jamshidian	詹姆西迪恩
Jarrell	杰雷尔

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Jarrow	杰罗
Jegadeesh	杰盖迪希
Jennings	杰宁斯
Jensen	杰森
Jerison	杰里森
Jobson	乔伯森
Johnson	约翰森
Jones，H.	乔恩斯 · H.
Joyeux	乔尤克斯
Kagel	凯吉尔
Kahneman	凯尼曼
Kalay	凯雷
Kalos	凯勒斯
Kamstra	凯姆斯特
Kan	凯恩
Kandel，E.	坎德尔 · E.
Kandel，S.	坎德尔 · S.
Kane	坎恩
Kani	凯尼
Karasinski	凯洛辛斯基
Karolyi	凯洛利
Kaufman	考夫曼
Kaul	考尔
Keim	坎姆
Kendall	肯达尔
Kennan	肯那
Kim，M.	基姆 · M.
Kim，S.	基姆 · S.
Kindleberger	金德尔伯格
Klass	克拉斯
Kleidon	克雷顿
Knuth	克纳斯
Kocherlakota	科切莱克特
Kogan	科根
Kohlase	科勒恩
Koo	库
Korajczyk	科雷杰齐克
Korkie	科基
Kothari	科萨雷
Kreps	克雷普斯
Krogh	科罗格
Kroner	克洛纳
Kyle	科沃恩
Laibson	雷伯森
Lakonishok	拉科尼斯霍克
Lam	莱姆
Lanen	莱恁
Lang	莱恩
Leamer	利默
LeBaron	莱伯罗恩
Ledoit	莱道伊特
Lee，C.	李 · C
Lee，M.	李 · M.
Lee，S.	李 · S.
Lee，T.	李 · T.
Lehimann	莱赫曼
Leland	利兰德
LeRoy	利罗伊
Leroy	里络伊
Levy	莱维
Lilien	利莲恩
Lintner	林特纳
Litzenberger	利曾伯格
Ljung，G.	卢恩 · G.
Lo	罗
Loewenstein	路文斯坦
Longstaff	伦斯达夫
Lorenz	勒伦佐
Lowe	罗威
Lucas，D.	卢卡斯 · D.
Lucas，R.	卢卡斯 · R.
Lumsdaine	卢姆斯丹尼

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Luttmer	拉默特
Lutz	拉兹
Macaulay	麦考雷
MacBeth	麦克贝恩
Mackay	麦基
MacKinlay, A. C.	麦金雷· A. C.
MacKinlay, C.	麦金雷· C.
Maddala	麦达拉
Mashavan	麦德哈瓦
Magee	麦哲
Magnus	麦哲呐斯
Maier	梅伊尔
Majluf	麦杰拉夫
Maksimovic	麦克西莫维柯
Malatesta	麦勒泰斯特
Malgarange	麦尔格伦哲
Malkiel	麦尔基尔
Mandelbrot	曼德尔布罗特
Mankiw, L.	曼昆· L.
Mankiw, N. G.	曼昆· N. G.
Manne	曼
Mark	马克
Markowitz	马柯维茨
Marsh	马歇
Marx	马克斯
Mason, A.	梅森· A.
Mason, S.	梅森· S.
Mauldon	马尔顿
Mayers	梅耶斯
McCallum	麦考伦
McCullagh	麦卡拉夫
McCulloch, J.	麦卡拉西· J.
McCulloch, R.	麦卡拉西· R.
McCulloch, W.	麦卡拉西· W.
McDonald	麦唐纳德
McQueen	麦昆
Mech	麦切
Mehra	麦布雷
Mei	梅
Melino	梅利诺
Mendelson	蒙德尔森
Merton	默顿
Merville	默维尔
Miccheli	米切利
Mikkelson	米凯尔森
Milgrom	米尔格罗姆
Miller, H.	米勒· H.
Miller, M.	米勒· M.
Milne	米伦
Miron	米洛恩
Mishkin	米什金
Mitchell	米切尔
Modest	默德斯特
Modigliani	莫蒂格利尼
Monahan	默纳汉
Monro	门罗
Mood	穆德
Moody	穆迪
Morganstern	默更斯特恩
Morrison	莫雷森
Morse	莫斯
Morton	莫顿
Mossin	莫辛
Muirhead	缪俄希德
Mullers	默勒
Mullins	穆林斯
Musumeci	穆休麦西
Muth	缪斯
Myers, J.	梅尔斯· J.
Myers, S.	梅尔斯· S.
Naik	内克
Neftci	纳夫特西

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Nelson, C.	纳尔逊·C.
Nelson, D.	纳尔逊·D.
Nelson, W.	纳尔逊·W.
Netter	纳特
Neudecker	纽德克
Newey	纽维
Ng	纳格
Niederhoffer	尼德霍斐
Nimalendran	尼麦棱德瑞
Norman	诺曼
O'Brien	奥本雷恩
O'Hara	奥哈拉
Obstfeld	奥布斯特费尔德
Officer	奥斐瑟
Ogaki	奥加基
Ord	奥德
Osborne	奥斯鲍恩
Pagan	帕根
Palmer	帕尔默
Papell	帕佩尔
Parkinson	帕金森
Partch	帕切
Paskov	帕斯克夫
Patashnik	帕塔希尼克
Pau	庖
Pearson	佩尔森
Pennacchi	佩内切
Perold	培罗德
Perron	珀伦
Pesaran	彼萨伦
Pfleiderer	珀夫雷德若
Phillips, P.	菲利浦斯·P.
Phillips, S.	菲利浦斯·S.
Pierce	彼尔斯
Pitts	彼特斯
Platen	普拉顿
Poggio	波吉尔
Polson	波尔松
Port	波特
Porter	波忒
Porteus	波特里斯
Poterba	波特巴
Potter	波特尔
Poulsen	普尔森
Powell	波维尔
Prabhala	普雷波哈拉
Prelec	普雷利斯
Prescott	普雷斯科特
Priestley	普里斯特利
Procaccia	普罗卡西亚
Radner	拉德呐
Rady	拉迪
Ramaswamy	拉马斯沃米
Ready	雷迪
Reddington	雷丁顿
Reder	雷德
Reinsch	雷恩斯切
Richard	理查德
Richardson	理查德森
Rietz	里兹
Ritter	里特
Robbins	罗宾斯
Roberds	罗伯兹
Roberts	罗伯茨
Robinson, P.	罗宾森
Rogalski	罗盖尔斯基
Roley	罗利
Rolfo	罗尔弗
Roll	罗尔
Roma	罗马
Romano	罗马诺

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Romer	罗默
Rosenfeld	罗森斐尔德
Ross, D.	罗斯 · D.
Ross, S.	罗斯 · S.
Rossi	罗西
Roth	罗思
Rothschild	罗思柴尔德
Roy	罗伊
Rozell	罗泽尔
Ruback	鲁拜克
Rubin	鲁宾
Rubinstein	鲁宾斯坦
Rudebusch	鲁德布希
Ruiz	鲁伊斯
Runkle	朗克尔
Rund	鲁德
Salandro	萨兰德罗
Samuelson	萨缪尔森
Sanders	桑德
Sayers	赛耶斯
Schaefer	谢弗
Scheinkman	沙因克曼
Schipper	希珀
Schoenholtz	舍恩豪尔茨
Scholes	斯科尔斯
Schultz	舒尔茨
Schuss	舒斯
Schwartz	施瓦茨 · E.
Schwartz, R.	施瓦茨 · R.
Schweizer	施韦策
Schwert, G.	施沃特
Sclove	斯科劳夫
Scott	斯科特
* SEC	
Sentana	森塔那
Shanken	尚肯
Shanno	香农
Shapiro, J.	夏皮罗 · J.
Shapiro, M.	夏皮罗 · M.
Sharpe	夏普
Shastri	沙斯特
Shea	谢伊
Shephard.	谢波德
Shiller	希勒
Shimko	希姆科
Shleifer	施雷弗
Sias	赛厄斯
Siegel, A.	西格尔 · A.
Siegel, J.	西格尔 · J.
Siegmund	西格基德
Silvey	西尔雅
Simkowitz	西姆科维茨
Simonds	西芒兹
Sims	西姆斯
Singer	辛格
Singleton	辛格尔顿
Skelton	斯凯尔顿
Sloan	斯隆
Smidt	斯米德特
Smith, A.	史密斯 · A.
Smith, C.	史密斯 · C.
Smith, J.	史密斯 · J.
Smith, T.	史密斯 · T.
Sofianos	索菲亚诺斯
Sosin	索辛
Stambaugh	斯坦博
Starks	斯塔克斯
Startz	斯格茨
Steigerwald	斯泰格尔沃尔德
Stewart	斯图瓦特
Stiglitz	斯蒂格利茨
Stinchcombe	斯廷齐库姆
Stock	斯托克

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Stoker	斯托克尔
Stoll	斯托尔
Stone	斯通
Strang	斯特朗
Stroock	斯特鲁克
Stuart	斯图尔特
Stuetzle	斯蒂茨尔
Subba Rao	萨巴拉奥
Suits	休茨
Summers	萨默斯
Sun	桑
Sundaresan, M.	森德里桑· M.
Sundaresan, S.	森德里桑· S.
Sunier	森尼尔
Sutch	萨奇
Svensson	斯文森
Taqqu	塔奎
Taylor, H.	泰勒· H.
Taylor, M.	泰勒· M.
Taylor, S.	泰勒· S.
Terasvirta	特拉斯维塔
Thaler	塞勒
Thayer	塞耶
Thisted	西斯德
Thombs	托姆斯
Thompson, J.	汤普森· J.
Thompson, R.	汤普森· R.
Tinic	蒂尼克
Tirole	蒂洛尔
Titman	蒂特曼
Tjostheim	特乔斯蒂姆
Toevs	托弗斯
Tong	腾
Torous	托劳斯
Toy	托伊
Traub	特劳布
Treynor	特雷诺
Tsay	特赛伊
Tschoegl	楚杰尔
Tucker	塔克
Tufano	塔法诺
Turnbull	特恩布尔
Tversky	特弗斯基
Unal	尤纳尔
van Deventer	范德文特
Vasicek	瓦西塞克
Vayanos	瓦亚诺斯
Vishny	维舍尼
Volterra	沃尔特拉
Wahba	瓦巴
Waldmann	沃尔德曼
Wallis, J.	沃利斯· J.
Wang, J.	万· J.
Wang, Y.	万· Y.
Warner	沃纳
Wasley	瓦斯利
Watson	沃特森
Weil, P.	韦尔· P.
Weil, R.	韦尔· R.
Weinstein	温斯坦
West	韦斯特
Whaley	惠利
Wheatley	惠特利
Whitcomb	惠特库姆
White, A.	怀特· A.
White, H.	怀特· H.
Whitelaw	惠特劳
Whiteman	惠特曼
Whitlock	惠特劳克
Wichern	威切恩

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Wiener	威纳
Wiggins	威金
Wilcox	威尔考克斯
Williams, J.	威廉斯 · J.
Williams, R.	威廉斯 · R.
Willig	威利格
Woodford	伍德福特
Wooldridge	伍尔德里奇
Working	沃金
Yaari	雅里
Zeckhauser	泽克豪泽
Zehna	泽纳
Zeldes	泽尔德斯
Zhou, G.	周 · G.
Zhou, Z.	周 · Z.
Zin	津

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

术语对照表

absolute value GARCH model	绝对值 GARCH 模型
activation function	激活函数
affine-yield models of the term structure	期限结构收益亲合(关联)模型
aggregate consumption	总消费
Consumption Capital Asset Pricing Model	消费资本资产定价模型
American option	美式期权
Amplitude-dependent exponential autoregression (EXPAR) models	幅相关指数型自回归(EXPAR)模型
Antipersistence	反持久
Antithetic variates method	对偶变数法
Arbitrage opportunities	套利机会
State price vector	状态价格向量
Bond excess returns	债券超额收益
Merton's approach to option pricing	Merton 期权定价方法
arbitrage portfolios	套利组合
arbitrage Pricing Theory (APT). See also capital Asset Pricing Model multifactor models	套利定价理论。又见资本资产定价模型多因子模型
exact factor pricing	精确要素定价
Factor risk exposure	要素风险暴露
pervasive factors	普遍要素
riskfree return	无风险收益
well-diversified marked market portfolio	有效多样化市场组合
ARCH models. See also GARCH models	ARCH 模型。又见 GARCH 模型
option pricing	期权定价
arithmetic Brownian motion. See also Brownian motion	算术布朗运动。又见布朗运动
Arrow-Bebreu securities	Arrow-Bebreu 证券
artificial neural network. See also learning network	人工神经网络
asian options	亚式期权
ask price	卖方出价
asymptotic distribution	渐近分布

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

GMM estimator	GMM 估计量(广义矩估计量)
IV estimator	IV 估计量(工具变量估计量)
ML estimator	ML 估计量(最大似然估计量)
asymptotic order	渐近阶
asymptotically efficient estimator	渐近有效估计量
autocorrelation coefficients	自相关系数
autocorrelation matrices. See also cross-autocorrelation	自相关矩阵。又见交叉自相关
autocovariance coefficients	自协方差系数
autocovariance matrices	自协方差矩阵
Autoregressive Conditionally Heteroskdastic models. See also GARCH models	自回归条件异方差模型。又见 GARCH 模型
average derivative estimators	平均导数估计量
average rate options	平均汇率期权
backpropagation	逆向扩散
bandwidth	带宽(窗宽)
optimal bandwidth selection	最佳带宽选择(最佳窗宽选择)
barrier models	栅栏模型
barrier options	障碍期权
bayesian inference	贝叶斯推断
BDS test	BDS 检验
BEKK model	BEKK 模型
benchmark portfolio	基准组合
Berkeley Options Database	Berkeley 期权数据库
Bernoulli distribution	贝努里分布
beta	贝塔系数
bias	偏倚
finite-sample bias in long-horizon regressions	长时界回归中的有限样本偏倚
bid price	买方出价
bid-ask bounce	出价—要价波动
bid-ask spread	买卖差价
adverse-selection cost component	不利选择成本构成
estimating the effective bid-ask spread	实际买卖差价估计
inventory cost component	存货成本构成
order-processing cost component	指令处理成本构成
bilinear model	双线性模型

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

binary threshold model	二门限模型
binominal tree for short-term interest rate	短期利率的二项式树
birth and death options	生死期权
Black-Scholes and Merton option pricing mode.	Black-Scholes 与 Merton 期权定价模型。
See also option pricing models Estimator for α	又见期权定价模型 α 的估计
adjusting the Black-Scholes formula for predictability	可推断性调整 Black-Scholes 公式
assumptions	假定
Black-scholes formula	Black-Scholes 公式
CAPM	CAPM
deterministic volatility	确定性波动
estimator for σ^2	σ^2 的估计
stochastic volatility	随机波动
implied volatility	隐含波动
option sensitivities	期权灵敏度
borrowing constraints	借款限制
Box-Cox transformation	Box-Cox 变换
Box-Pierce Q-statstic	Box-Pierce Q 统计（鲍克思-皮尔思 Q 统计）
Brock-Dchert-Scheinkman test	Brock-Dchert-Scheinkman 检验
Brownian motion	布朗运动
arithmetic	算术
estimator for α	α 的估计
estimator for σ^2	σ^2 估计
geomtric	几何
properties	性质
bubbles	高风险投资
bullish vertical spread	看涨垂直价差买卖
Butterfly Effect	蝴蝶效应
call option	看涨期权
callable bond	可提前兑付债券
Capital Asset Pricing Model(CAPM). See also Arbitrage Pricing Theory Intertemporal Capital Asset Pricing Mode	资本资产定价模型。又见套利定价理论
data-snooping biase	数据挖掘偏差
mean-variance efficient-set mathmatics	均方差有效集数学
multifactor models	多因子模型

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

sample selection biases	样本选择偏差
anomalies	近点角
applications	应用
Black version	Black 模式
cross-sectional regression tests . See also errors-in-variables	截面回归检验。又见变量误差
heteroskdasticity	异方差
intertemporal equilibrium models	各期均衡模型
January effect	一月效应
non-normality	非正态性
nonsynchronous trading	非同步交易异步交易
option pricing	期权定价
power of tests	检验的功效
price-earning-ratio effect	市盈率效应
Sharpe-Lintner version	Sharpe-Lintner 模式
size effect	规模效应
size of tests	检验容量
temporal dependence	同期相关性
unobservability of the market portfolio	市场组合的不可观测性
CAPM. See Capital Asset Pricing Model	CAPM。见资本资产定价模型，
catching up with the Joneses. See also habit formation models	习惯形成模型
Cauchy distribution	柯西分布
CCAPM. See Consumption Capital Asset Pricing Model	CCAPM。见消费资本资产定价模型
ceiling function	上取函数
chaos theory . See also determinstic nonlinear dynamical systems	混沌理论。又见确定性非线性动态系统
clientel effect	客户群效应
closeness indicator	接近度指标
Cobb-Douglas utility	科布—道格拉斯效用
coefficient functions	系数函数
cointegration	协整
the term structure of interest rates	利率期限结构
complete asset markets	完全资产市场
compound options	复合式期权
conditional volatility models. See ARCH models,	条件波动模型。见 ARCH 模型，GARCH 模型

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

GARCH models	
connection strength	连结承受力
consistence and uniformly asymptotically normal(CUAN) estimotors	一致相合渐近正态(CUAN)估计量
constant-correlation model	常相关模型
constant-expected-return hypothesis	固定预期收益假设
and vector autoregressive methods	向量自回归法
and volatility tests	波动性检验
Consumption Capital Asset Pricing Model (CCAPM)	消费资本资产定价模型(CCAPM)
aggregate consumption	总消费，
Epstein-Zin-Weil recusive utility model	Epstein-Zin-Weil 递归效用模型。
See also Epstein-Zin-Weil mode	又见 Epstein-Zin-Weil 模型
instrumental variables(IV) regression	工具变量 (IV) 回归
investor heterogeneity	投资者异质性
power utility. See also lognormal asset pricing models	见对数正态资产定价模型
substituting consumption out of the model	脱离模型的替代消费
consumption growth	消费增长
consumption of stockholders and nonstockholders	股东与非股东消费
continuous-record asymptotics	连续纪录渐近线
contrarian investment strategies	反向投资策略
control variate method	控制变量方法
convecxity	凸度
correlation coefficient	相关系数
correlation dimension	相关维数
correlation integral	相关积分
cost of capital estimation	资本估计成本
coupon bonds	附息票债券
convecxity	凸度
coupon rate	票面利率/息票利率
duration	久期
effctive duration	有效久期
forward rates	远期汇率
immunization	免疫
loglinear model	对数线性模型
Macaulay's duration	Macaulay 久期

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

modified duration	修正久期
price	行情价格
yield to maturity	到期收益率
covatiance stationarity	协方差平稳
Cowles-Jones ratio. See also Random Walk model	Cowles-Jones 比率。又见随机游动模型
Cox-Ross option pricing technique. See also risk-neutraloption-pricng method	Cox-Ross 期权定价技术。又见风险中性期权定价法
cross-autocorrelation See also autocorrelation matrices	叉自相关。又见自相关矩阵
cross-sectional models	截面模型
cross-sectional restrictions on the term structure	对期限结构的截面限制
cross-validation	交叉稽核
crude Monte Carlo	概约蒙特卡罗
curse of dimensionality	维度扩展的弊端
data-snooping	数据挖掘
default risk	违约风险
degrees of freedom	自由度
Delta of an option	Delta 期权套期保值
delta method	Delta 方法
delta-hedging	Delta 套期保值
derivative securities. See also fixed-income derivative securities	衍生证券。又见固定收入衍生证券
option pricing	期权定价
forward contract	远期合约
futures contract	期货合约
deterministic nonlinear dynamical systems	确定性非线性动态系统
logistic map	logistic 映射
sensitivity to initial conditions	初始条件灵敏度
tent map	帐篷图
testing. See testing for deterministic nonlinear dynamical processes	检验。见确定性非线性动态过程检验
difference-stationary procss. See also unit root process	差分平稳过程。又见单位根过程
diffusion function	扩散函数
discount bonds	折扣债券
estimating the zero-coupon term structure	零息期限结构估计
forward rate	远期汇率
holding-period return	财产持有期收益

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

immunization	免疫
term structure of interest rates	利率期限结构
yield curve	收益率曲线
yield spread	收益差价
yield to maturity	到期收益
discount function. See spline estimation	折扣函数。见样条估计
discounted value	贴现值
of future dividends	未来股利贴现值
of the stock price	股票价格贴现值
discrete-time models	离散时间模型
of option pricing	期权定价的离散时间模型
of stochastic volatility	随机波动率的离散时间模型
discretization	离散化
distribution. See asymptotic distribution returns	分布。见渐近分布收益
dividend-price ratio	股利—价格比率
dividend-ratio model	股利比模型
dividends	股利
drift	漂移
dual-currency options	两值货币期权
dual-equity options	两值股票期权
durable goods	耐用品
duration. See also coupon bonds	久期。又见附息票债券
duration of nontrading	非交易久期
dynamic hedging strategy	动态对冲策略
dynamic trading strategy	动态交易策略
Dynkin operator	Dynkin 算子
effective duration. See also coupon bonds	实际久期。又见附息票债券
effctive spread	实际差价
efficiency. See asymptotic efficiency	效率。见渐近效率
Efficient Markets Hypothesis(EMH)	有效市场假设(EMH)
Semistrong-Form Efficiency	半强式有效
Strong-Form Efficiency	强式有效
Weak-Form Efficiency	弱式有效
EGARCH model	EGARCH 模型
EH. See expectations hypothesis elasticity	EH。见期望假设弹性
elasticity of intertemporal substitution	跨期替代弹性

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

hyperbolic discounting	双曲贴现
separating risk aversion from intertemporal substitution	从跨期替代中分离风险规避
the riskless interest rate	无风险利率
embedding dimension	嵌入维数
EMH. See Efficient Markets Hypothesis	EMH。见有效市场假设
Epstein-Zin-Weil recursive utility model	Epstein-Zin-Weil 递归效用模型
consumption-wealth ratio	消费—财富比率
cross-sectional asset pricing formula	截面资产定价公式
equity premium puzzle	权益溢酬难题
factor asset pricing model	因子资产定价模型
substituting consumption out of the model	模型外替代消费
equity premium puzzle	权益溢酬难题
catching up with the Joneses model	Joneses 模型
Hansen-Jagannathan volatility bound	Hansen-Jagannathan 波动边界
lognormal asset pricing model with power utility	具幂效用的对数正态资产定价模型
equity repurchases	股权回购
equivalent martingale measure	等价鞅测度
errors-in-variables	变量误差
Euler equation. See also stochastic discount factor	Euler 方程式。又见随机贴现因子
Gobb-Douglas utility model	科布—道格拉斯效用模型
ratio models of habit formation	习惯形成比率模型
European option	欧式期权
event-study analysis. See also nonparametric tests	事件研究分析法。又见非参数检验
abnormal return	非正常收益
Arbitrage Pricing Theory	套利定价理论
Capital Asset Pricing Model	资本资产定价模型
clustering	聚类群聚
constant-mean-return model	常平均收益模型
cross-sectional models	截面模型
cumulative abnormal return	累积非正常收益
earnings-announcement example	盈利公告举例
estimation window	估计窗
event window	事件窗
event-date uncertainty	事件日期不确定性
factor model	因子模型
generalized method of moments	广义矩量法

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

inference with changing variances	变量变换推理
law and economics	法与经济学
legal liability	法律责任
market model	市场模型
market-adjusted-return model	市场调整收益模型
nonsynchronous trading	非同步交易
normal return	正常收益
post-event window	后事件窗
sampling interval	样本区间
skewness of returns	收益不对称
standardized cumulative abnormal return	标准累积非正常收益
test power	检验功效
exact factor pricing	精确因子定价
interpreting deviations	偏离性的解释
mean-variance efficient set mathematics	均方差有效集数学
nonrisk-based alternatives	基于非风险的备择假设
optimal orthogonal portfolio	最优正交投资组合
risk-based alternatives	基于风险的备择假设
Sharpe ratio	Sharpe 比率
tangency portfolio	切点投资组合
excess kurtosis. See also kurtosis returns	超量峰度。又见峰度收益
excess returns	超额收益
exercise price	履约价格
exotic securities	外国证券
expansion of the states	扩展状态
EXPAR models	EXPAR 模型
expectations hypothesis (EH). See also pure expectations hypothesis	期望假设。又见纯期望假设
term structure of interest rates	利率期限结构
empirical evidence	经验证据
log expectations hypothesis	对数期望假设
preferred habitats	偏好习惯
yield spreads	收益率差价
expected discounted value. See discounted value	预期贴现。见贴现值
exponential GARCH model	指数 GARCH 模型
exponential spline	指数样条

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

face value	面值
factor analysis	因子分析
factor model. See also multifactor models	因子模型。又见多因子模型
fair game. See martingale	公平博弈。见鞅
fat tail. See also kurtosis	肥尾。又见峰度
finite-dimensional distributions(FDDs)	有限维分布(FDDs)
Fisher information matrix. See information matrix	Fisher 信息矩阵。见信息矩阵
fixed-income derivative securities	固定收益衍生证券
Black-Scholes formula	Black-Scholes 公式
Heath-Jarrow-Morton model	Heath-Jarrow-Morton 模型
Ho-Lee model	Ho-Lee 模型
homoskedastic single-factor model	同方差性单因子模型
option pricing	期权定价
term structure of implied volatility	隐含波动率期限结构
fixed-income secutities	固定收益证券
floor function	下取函数
Fokker-Planck equation	Fokker-Planck 方程式
foreign currency	外汇
forward equation	远期方程
forward rate. See also term structure of interest rates	远期汇率。又见利率期限结构
coupon-bearing term structure	息票承兑期限结构
forward-rate curve	远期汇率曲线
log forward-rate	对数远期汇率
pure expectations hypothesis	纯期望假设
yield to maturity	到期收益率
forward trading	远期交易
fractionally differenced time series	分部差分时间序列
fractionally integrated time series. See fractionally differenced time series	分部积分时间序列。见分部差分时间序列
fundamental asset	基础资产
fundamental value	基础价值
GARCH models	GARCH 模型
absolute value GARCH model	绝对值 GARCH 模型
additional explanatory variables	附加外生变量
BEKK model	BEKK 模型

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

conditional market model	条件市场模型
conditional nonnormality	条件非正态性
constant-correlation model	常数相关性模型
estimation	估计
excess kurtosis in standardized residuals	标准残差的超量峰度
GARCH (1,1) model	GARCH(1,1)模型
GARCH-M model	GARCH-M 模型
IGARCH model	IGARCH 模型
interest rate volatility	利率波动
multivariate	多变量、多元
persistence	持久
QGARCH model	QGARCH 模型
single-factor GARCH (1,1) model	单因子 GARCH(1,1)模型
stationary distribution	平稳分布
US stock returns	美国证券收益
VECH model	VECH 模型
GARCH-in-mean model	GARCH 均值模型
GARCH-M model	GARCH-M 模型
Gaussian kernel	高斯核
Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedastic models. See also GARCH models	广义自回归条件异方差性模型。又见 GARCH 模型
Generalized Error Distribution	广义误差分布
generalized inverse of a matrix	广义逆矩阵
Generalized Method of Moments(GMM)	广义矩方法
asymptotic distribution	渐近分布
Newey-West estimator	Newey-West 估计
stochastic differential equation	随机微分方程
weighting matrix	加权矩阵
geometric Brownian motion. See also Brownian motion	几何布朗运动。又见布朗运动
risk-neutralized process	风险中性过程
GMM. See Generalized Method of Moments	GMM。见广义矩方法
Goldman-Sosin-Gatto option price formula	Goldman-Sosin-Gatto 期权定价公式
Gordon growth model	Gordon 增长模型
dynamic Gordon growth model	动态 Gordon 增长模型
government spending in the utility function	效用函数中的政府开支
Granger-causality	Granger 因果律
Greeks	希腊

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

habit formation	习惯形成
Abel model	Abel 模型
Campbell-Cochrane model	Campbell-Cochrane 模型
Constantinides model	Constantinides 模型
external-habit models	外部习惯模型
internal-habit models	内部习惯模型
difference models	差分模型
ratio models	比率模型
Hamilton-Markovswitching model	汉密尔顿—马尔科夫转换模型
Hansen's test of overidentifying restrictions	Hansen 过渡识别限制检验
Hansen-Jagannathan volatility bound. See also stochastic discount factor	Hansen-Jagannathan 波动边界 。又见随机贴现因子
benchmark portfolio	基本投资组合
equity Premium Puzzle	权益溢酬难题
geometric interpretation	几何解释
lognormal asset pricing model with power utility	具幂效用的对数正态资产定价模型
market frictions	市场冲突
maximum correlation portfolio	极大相关投资组合
mean-variance efficiency	均方差效率
nonnegativity constraint	非负约束
Heath-Jarrow-Morton model. See also pricing fixed-income derivative securities	Heath-Jarrow-Morton 模型。又见定价固定收益衍生证券
Heaviside activation function	Heaviside 激活函数
hedge portfolios	套期保值投资组合
hedge ratio. See also delta-hedging	套期比。又见 delta 套期
heterogeneous investors	异质投资者
heteroskedasticity and autocorrelation-consistent standard errors	异方差与自相关相容的标准误差
heteroskedasticity-consistent estimators	异方差调和估计量
hidden layer	隐蔽层
hiden units	隐蔽单元
historical volatility	历史波动
Ho-Lee model. See also pricing fixed-income derivative securities	Ho-Lee 模型。又见价格固定收益衍生证券
holding-period return	持有期收益
homoskedastic single-factor term-structure model	同方差性单因子期限结构模型
Hotelling T^2 statistic	Hotelling T^2 统计量

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Hsieh test of nonlinearity	非线性的 Hsieh 检验
Hull and White stochastic volatility model	Hull-White 随机波动模型
Hurst-Mandelbrot rescaled range statistic. See rescaled range statistic	Hurst-Mandelbrot 标度重定极差统计量。见标度重定极差统计量
hyperbasis functions	超基函数
hyperbolic discounting	双曲贴现
idiosyncratic risk	特质风险
IGARCH model	IGARCH 模型
IID. See independent and identical distribution	IID。见独立同分布
immunization	免疫
implied volatility	隐含波动
importance sampling	重要性抽样
income effect . See also substitution	收入效应。又见替代效应
income risk	收入风险
incomplete markets	不完全市场
independent and identical distribution(IID)	独立同分布(IID)
indexed bond	指数债券
indirect slope estimator	间接斜率估计
infinitesimal generator	无穷小算子
information matrix	信息矩阵
information matrix equality	信息矩阵等式
input layer	输入层
instrumental variables(IV) regression	工具变量回归
instruments	工具
integrated GARCH model	积分 GARCH 模型
interest rate. See coupon bonds, discount bonds forward rate	利率。见附息票债券、折扣债券远期汇率
interest-rate forecasts short-term	利率预测短期利率
interest rate term structure of interest rates	利率期限结构
yield spread	到期收益率
riskless interest rate	无风险利率
interest-rate forecasts	利率预测
internal rate of return	内部收益率
interpolation problems	插值问题
Intertemporal Capital Asset Pricing Model(ICAPM). See also Capital Asset Pricing Model	跨期资本资产定价模型。又见资本资产定价模型多因子模型

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

multifactor models	
intertemporal substitution effect. See also elasticity of intertemporal substitution	跨期替代效应。又见跨期替代弹性
investor heterogeneity	投资者异质性
irregularly sampled data	不规则抽样数据
ISE estimator	ISE 估计
isoelastic preferences. See power utility	等弹性偏好。见幂效用
Ito process. See also Brownian motion	伊藤过程。又见布朗运动
stochastic differential equation	随机微分方程
Ito's Lemma	伊藤引理
IV regression. See instrumental variables regression	IV 回归。见工具变量回归
January effect	一月效应
Joeseph Effect	Joeseph 效应
kernel regression	核回归
average derivative estimators	平均导数估计量
convergence property	收敛性质
curse of dimensionality	维度扩展的弊端
optimal bandwidth selection	最优带宽选择
universal approximation property	通用近似性质
weight function	权函数
Kronecker product	Kronecker 积
kurtosis. See also returns	峰度。见收益
labor income	劳务收入
Lagrangian function	拉格朗日函数
latent-variable models	隐藏变量模型
Law of Interated Expectation	迭代期望律
lead-lag relations. See cross-autocorrelaton	领先—滞后关系。见叉自相关
learning networks	学习网络
Black-Scholes formula	Black-Scholes 公式
limitations	限制
multilayer perceptions	多层次视感控器
projection pursuit regression	投影寻踪回归、投影追踪回归
radial basis functions	基本径向函数
legal liability	法律责任
leisure in the utility function	效用函数中的额外变量

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

leverage hypothesis	杠杆假设
likelihood function . See also maximum likelihood estimation	似然函数。又见极大似然估计
likelihood ratio test	似然比检验
liquidity effects	流动性效应
local averaging	局部平均数
local volatitity	局部波动
log dividend-price ratio	对数股利—价格比率
log forward rate. See also forward rate	对数远期汇率。又见远期汇率
log holding-period rerturn	对数持有期收益
log pure expectation hypothesis	对数纯期望假设
log yield . See also yield to maturity	对数收益率。又见到期收益率
log-likelihood function. See also maximum likelihood estimation	对数似然函数。又见极大似然估计
logistic function	logistic 函数
logistic map	logistic 映射
loglinear approximation	对数线性逼近
accuracy	精度
coupon bonds	附息票债券
intertemporal budget constraint	跨期预算约束
lognormal distribution	对数正态分布
lognormal model of asset pricing	资产定价对数正态模型
Cobb-Douglas utility	科布—道格拉斯效用
Epstein-Zin-Weil recursive utility	Epstein-Zin-Weil 递归效用
external-habit model	外部习惯模型
power utility	幂效用
long-horizon regressions	长期水平回归
R^2 statistics	R^2 统计量
orthogonality tests	正交性检验
variance ratio	方差比
bias	偏倚
dividend-price ratio	股利—价格比率
dynamic asset-allocation models	动态资产配置模型
finite-sample inference	有限样本推断
investment strategies	投资策略
long-horizon returns. See also variance ratio	长期(水平)收益。又见方差比
long-range dependence	长期相关性

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Longstaff-Schwartz model	Longstaff-Schwartz 模型
lookback options	回望期权
loss aversion	损失厌恶性
Macaulay's duration	Macaulay 久期
market efficiency. See also Efficient Markets Hypothesis	市场效率。又见有效市场假设
market frictions	市场冲突
aggregate consumption data	总消费数据
Hansen-Jagannathan bounds	Hansen-Jagannathan 边界
market microstructure. See also barrier models bid-ask spread	市场微观结构。又见障碍模型买卖差价
bid-ask bounce nonsynchronous	非同步交易
trading price discretencess	价格离散
rounding models	舍入模型
market model	市场模型
conditional	条件
market portfolio	市场组合
Markov chain	马尔可夫链
Markov process	马尔可夫过程
Markov-switching models	马尔可夫转移模型
martingale	鞅
martingale convergence theorem	鞅收敛理论
martingale pricing technique	鞅定价技术
maturity	到期协议期满日
maximum correlation portfolio. See also Hansen-Jagannathan volatility bound	极大相关投资组合。又见 Hansen-Jagannathan 波动边界
maximum likelihood	极大似然
maximum likelihood estimation	极大似然估计
asymptotic distribution	渐近分布
continuous-record asymptotics	连续纪录渐近
factor analysis	因子分析
GARCH models	GARCH 模型
information matrix	信息矩阵
information-matrix equality	信息矩阵等式
irregularly sampled data	不规则抽样数据
option price	期权价格

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

quasi-maximum likelihood estimation	准极大似然估计
stochastic differential equation	随机微分方程
White specification test	模型定式的 White 检验
mean reversion	均值回复
mean-variance efficient-set mathematics	均方差有效集数学
global minimum-variance portfolio	总体极小方差投资组合
Hansen-Jagannathan volatility bound	Hansen-Jagannathan 波动边界
minimum-variance frontier	极小方差边界
Sharpe ratio	Sharpe 比率
tangency portfolio	切点投资组合
zero-beta potfolio	零贝塔投资组合
m-histories	m 过程图
mixed distributions	混合分布
ML estimation. See maximum likelihood estimation	ML 估计。见极大似然估计
MLP. See multilayer perception	MLP。见多层次视感控器
modified duration. See also duration	修正久期。见久期
moment conditions	矩条件
Monte Carlo simulaton methods	蒙特卡罗模拟
antithetic variates method	对偶变数方法
comparisions with closed-form solutions	与解析解的比较
computational cost	计算成本
control variate method	控制变数方法
crude Monte Carlo	概约蒙特卡罗
discretization	离散化
efficiency	有效性
importance sampling	重要性抽样
limitations	限制
number-theoretic method	数论方法
path-dependent option pricing	路径依赖期权定价
stratified sampling	分层抽样
variance-reduction techniques	方差缩减技术
mortgage-backed securities	背书抵押证券
multifactor models. See also Arbitrage Pricing Theory	多因子模型。又见套利理论
exact factor pricing	精确因子定价
Intertemporal Capital Asset Pricing Mode	跨期资本资产定价模型
selection of factors	因子选择

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Black version of the CAPM	CAPM 的 Black 模式
cross-sectional regression approach	截面回归方法
empirical studies	经验研究
Epstein-Zin-Weil recursive utility model	Epstein-Zin-Weil 递归效用模型
estimation of expected returns	期望收益估计
estimation of risk premia	风险溢酬估计
factor portfolios spanning the mean-variance frontier	生成均方差边界的因子组合
Generalized Method of Moments	广义矩法
Hotelling T statistic	Hotelling T 统计量
macroeconomic variables as factors	宏观经济变量因子
portfolios as factors	因子组合
term-structure models	期限结构模型
multilayer perception (MLP)	多层次视感控器
multiplicative linear congruential generators (MLCG)	乘法线性同余发生器 (MLCG)
multipoint moment conditions	多点矩条件
multiquadrics	多重二次型
multivariate GARCH models	多元 GARCH 模型
multivariate stochastic-volatility models	多元随机波动模型
Nadarary-Watson kernel estimator	Nadarary-Watson 核估计
network topology	网络拓扑
networks. See also learning networks	网络。又见学习网络
Newey-West estimator	Newey-West 估计
news impact curve	新闻冲击曲线
n-histories	n 维项的函数关系
no-arbitrage condition	无套利定价原理
noise traders	噪声投资者
nominal bonds	面值债券
nominal stochastic discount factor. See also stochastic discount factor	名义随机贴现因子。又见随机贴现因子
nonlinear ARMA models	非线性 ARMA 模型
nonlinear autoregression models	非线性自回归模型
nonlinear dynamical systems. See also deterministic nonlinear dynamical systems	非线性动态系统。又见确定性非线性动态系统
nonlinear-in-mean time-series models	均值非线性时间序列模型

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

nonlinear-in-variance time-series models	方差非线性时间序列模型
nonlinear least squares estimation	非线性最小二乘估计
nonlinear moving-average models	非线性移动平均模型
nonlinear time-series analysis	非线性时序分析
nonlinearity testing. See testing for nonlinear structure	非线性检验见非线性结构检验
nonparametric estimation	非参数估计
universal approximation property	一般渐近属性
nonparametric option pricing methods	非参数期权定价方法
nonperiodic cycles	非周期循环
nonseparablity in utility	效用的不可分割性
nonsynchronous trading	非同步交易异步交易
empirical findings	经验发现
nontrading process	非交易过程
nontrading. See nonsynchronous trading	非交易。见非同步交易
normal distribution	正态分布
number-theoretic method	数论方法
offer. See ask price	出价。见卖方出价
optimal orthogonal portfolio. See also exact factor pricing	最优正交投资组合。又见精确因子定价
option pricing	期权定价
adjusting the Black-Scholes formula for predictability	Black-Scholes 公式的可预测性调整
Black-Scholes and Merton option pricing model	Black-Scholes 与 Merton 期权定价模型
Black-Scholes formula	Black-Scholes 公式
discrete-time models	离散时间模型
estimator for σ^2	σ^2 的估计
incomplete markets	不完全市场
martingale approach	鞅近似
maximum likelihood estimation	极大似然估计
nonparametric methods	非参数方法
path-dependent options	路径依赖期权
risk-neutral pricing methods	风险中性定价方法
state-price densities	牌价密度
option sensitivities	期权灵敏度
ordered probit model	有序 probit 模型

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

maximum likelihood estimation	极大似然估计
Ornstein-Uhlenbeck process	Ornstein-Uhlenbeck 过程
orthgonality condition	正交性条件
orthgonality tests	正交性检验
O-U process. See Ornstein-Uhlenbeck process	O-U 过程。见 Ornstein-Uhlenbeck 过程
output layer	输出层
overfitting	过度拟合
par	平价
parallel processing	并行处理
parametric option-pricing model	参数期权定价模型
path-dependent derivatives	路径依赖衍生证券
path-dependent options	路径依赖期权
PEH. See pure expectations hypothesis	PEH。见纯期望假设
perfect-foresight stock price	完全预见股票价格
observability in finite samples	有限样本的可观测性
perfectly hedged portfolio. See also delta-hedging strategy	完全套利投资组合。又见 delta 套期保值策略
performance evaluation	业绩评价
permanent shock. See also unit root process	永久性冲击。又见单位根过程
persistence in expected stock returns	预期股票收益的持续性
persistence in volatility	波动持续性
peso problem	比索问题
piecewise-linear models	分段线性模型
polynominal models	多元正态模型
portfolio performance evaluation	投资组合业绩评价
power utility	幂效用
PPR. See projection pursuit regression	PPR。见投影寻踪回归
precautionary savings	预防性储蓄
predictability of stock returns	股票收益的可预报性
Black-Scholes formula	Black-Scholes 公式
Campbell-Cochrane model	Campbell-Cochrane 模型
dividend-price ratio	股利价格比率
rational bubbles	理性泡沫
time-varying risk-aversion	时变风险规避
preferred habitals	偏好习惯
price	价格

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

clusting	聚类
discovery	发现
discreteness	离散
ex-dividend	除息
impact	影响冲击
ticks	(报价)标记、单位
price of risk	价格风险
price-earning-ratio effect	市盈率效应
pricing kernel	定价核
principal components	首要成分
principle of invariance	不变性原则
projection pursuit regression	投影寻踪回归
prospect theory	远景理论
psychological models of preferences	偏好心理模型
pure expectations hypothesis(PEH) See also expectations hypothesis	纯期望假设(PEH)。又见期望假设
term structure ofinterest rates	利率期限结构
alternatives	备选假设
implications	暗示
log pure expectations hypothesis	对数纯期望假设
preferred habitals	偏好习惯
put option	看跌期权
QGARCH model	QGARCH 模型
Q-statistic	Q 统计量
quadratic form	二次型
quadratic GARCH model	二次 GARCH 模型
quasi-maximum likelihood estimation	准极大似然估计
R^2 statistic	R^2 统计量
radial basis functions(RBFs)	基本径向函数
rainbow options	虹式期权
random number generators	随机数发生器
random walk. See also long-horizon returns	随机游动。又见长期(水平)收益
long-range dependence	长期相关性
Random Walk 1 mode	随机游动模型 1
Random walk 2 mode	随机游动模型 2

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Random walk 3 mode	随机游动模型 3
technical analysis	技术分析
unit root processes	单位根过程
variance difference	方差差分
variance ratio	方差比
continuous-time limit	连续时间限制
discrete-time random walk	离散时间随机游动
empirical evidence	经验证据
Random Walk 1 model	随机游动模型 1
R^2 statistics	R^2 统计量
canonical correlation	典型相关
Cowles-Jones ratio	Cowles-Jones 比率
eigenvalues of covariance matrices	协方差矩阵特征值
Kendall correlation test Kendall	相关检验
likelihood ratio statistic	似然比统计量
nonparametric tests	非参数检验
runs test	游程检验
semiparametric tests	半参数检验
sequences and reversals	顺序与反序
Spearman rank correlation test Spearman	秩相关检验
Spearman's footrule test	Spearman 步律检验
Random Walk 2 model	随机游动模型 2
filter rules	滤波器法则
technical analysis	技术分析
Random Walk 3 model. See also Box-Pierce Q-statistic	随机游动模型 3。又见 Box-Pierce Q 统计量
variance difference	方差差分
variance ratio	方差比
portmanteau statistics	多用途统计量
rank test	秩检验
rational bubbles RBFs. See radial basis functions	理性泡沫。见基本径向函数
regularization	正规化，秩序化
replicating portfolio	复制组合
replication in Monte Carlo simulation	蒙特卡洛模拟复制
representative agent models	代理人模型
rescaled range statistic	标度重定极差统计量
returns	收益

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

annualized	按年度的
Bernoulli distribution	贝努利分布
Cauchy distribution	柯西分布
compound	复合
conditional distribution	条件分布
continuously compounded	连续复合的
discount bond	折扣债券
discreteness	离散
discreteness bias	离散偏差
excess	超量
excess kurtosis	超量峰度
forecasting returns	预测收益
gross	总的
holding-period return	持有期收益
independently and identically distributed(IID)	独立同分布(IID)
joint distribution	联合分布
kurtosis	峰度
log	对数
lognormal distribution	对数正态分布
net	网络
normal distribution	正态分布
sample	样本
skewness	偏度
stable distribution	平稳分布
unconditional distribution	无条件分布
unexpected stock returns	未预期股票收益
virtual. See also nonsynchronous trading	实际的。又见非同步交易
riding the yield curve	控制收益率曲线
risk aversion	风险规避
difference habit-formation models	习惯定式差分模型
Equity Premium Puzzle	权益溢酬难题
first-order	一阶
loss aversion	损失规避
separating risk aversion from intertemporal substitution	从跨期替代中分离风险规避
time-varing	时变
risk prices	风险价格

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

risk-neutral option pricing method	风险中性期权定价方法
risk-neutral pricing density	风险中性定价密度
risk-neutrality	风险中性
risk-neutralized process	风险中性过程
risk-return tradeoff	风险一收益权衡
risk-sharing	风险共担
riskfree interest rate. See riskless interest rate	无风险利率。见无风险利率
riskfree rate puzzle	无风险率困惑
riskless interest rate	无风险利率
rolling standard deviation	滚动标准离差
rotational indeterminacy	旋转不确定性
rounding models	取整模型
R/S statistic. See rescaled range statistic	R/S统计量。见标度重定极差统计量
RW model. See Random Walk 1 Mode	RW 模型。见随机游动模型 1
RW model. See Random Walk 2 Mode	RW 模型。见随机游动模型 2
RW model. See Random Walk 3 Mode	RW 模型。见随机游动模型 3
sample paths	样本路径
sample selection biases	样本选择偏差
sampling interval	样本区间
scale-invariance	规模不变性
score vector	刻度向量
SDM. See state-dependent models	SDM 状态依赖模型
security market line	证券市场线
selection of factors	因子选择
cross-selection generalized least squares (GLS)	截面广义最小二乘 (GLS)
data-snooping	数据挖掘
factor analysis	因子分析
principal components	主成分
rotational indeterminacy	旋转不确定性
strict factor structure	严格因素结构
self-exciting threshold autoregression (SETAR) models	自激活门限自回归(SETAR)模型
self-financing portfolio	自融资投资组合
sequences and reversals	序列与反序
serial correlation	序列相关

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

SETAR models. See self-exciting threshold autoregression (SETAR) models	SETAR 模型。见自激活门限自回归 (SETAR)模型
Sharpe ratio	Sharpe 比率
short-term interest rate. See also discount bonds riskless interest rate	短期利率。又见折扣债券无风险利率
GARCH effects on volatility	波动率的 GARCH 效应
regime-switching	时段、状态转换
shortsales constraint	短期出售
sign test	符号检验
size effect	规模效应
size-sorted portfolio	规模排序组合
skewness. See also returns	偏度。见斜率估计
slope estimators	
small stocks	小盘股
smoothing. See also kernel regression	平滑、修匀又见核回归
solvency constraint	偿付能力限制
spanning	生成
SPD. See state-price density	SPD。见牌价密度
specification tests	(模型)定式检验
Hansen's test	Hansen 检验
White test	White 检验
spline estimation	样条估计
exponential spline model	指数样条模型
tax-adjusted spline model	税收调整样条模型
spot rate	即期利率
spread. See bid-ask spread yield spread	价差，见买卖差价收益率差价
spread-lock interest rate swaps	价差锁定型利率互换
square-root single-factor term-structure model	平方根单因子期限结构模型
stable distribution	平稳分布
standard Brownian motion. See also Brownian motion	标准布朗运动。又见布朗运动
state prices	状态价格
state-dependent models(SDM)	状态依赖模型(SDM)
state-price-density(SPD)	状态价格密度(SPD)
stationary time-series process. See also unit root process	平稳时间序列过程。又见单位根过程

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

stochastic approximation	随机逼近
stochastic differential equation	随机微分方程
GMM estimation	GMM 估计
Ito's Lemma	伊藤引理
maximum likelihood estimation	极大似然估计
multiplication rules	乘法规则
stochastic discount factor. See also Euler equation	随机贴现因子。又见 Euler 方程
equity premium puzzle	权益溢酬难题
habit-formation difference models	习惯形成差分模型
Hansen-Jagannathan volatility bound	Hansen-Jagannathan 波动边界
nominal	面值、票面的
nonnegativity	非负性
power utility	幂效用
state-price density	状态价格密度
uniqueness	惟一(性)
stochastic trend. See also unit root process	随机趋势。又见单位根过程
stochastic-volatility models	随机波动模型
multivariate	多变量多元
stratified sampling	分层抽样
strict factor structure	严格因素结构
strike price	履约价格协议价格
stroboscopic map	频闪观测图
structural breaks	结构中断
Student-t distribution	学生氏 t 分布
substitution effect. See also elasticity of intertemporal substitution	替代效应。又见跨期替代弹性
supershares	超股份
support and resistance levels	支撑及阻力水平
surplus consumption ratio	剩余消费率
survivorship bias. See also sample selection biases	残存偏差。又见样本选择偏差
synthetic convertible bonds	综合可转换债券
tail thickness	(分布的)肥尾性
tax clientele	税收委托人
tax-adjusted spline model of the term structure	税收调整期限结构样条模型
technical analysis. See also Random Walk mode	技术分析。又见随机游动模型

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

temporary shock. See also unit root process	瞬时振荡。又见单位根过程
tent map	帐篷图
term premia	期限溢酬
term structure of implied volatility	隐含波动期限结构
term structure of interest rates. See also yield curve term-structure models	利率期限结构。又见收益曲线期限结构模型
expectations hypothesis	期望假设
cointegration	协整
forecasting interest rates	利率预测
spline estimation	样条估计
tax effects	税收效应
vector autoregressive (VAR) methods	向量自回归（VAR）法
term-structure models . See also fixed-income derivative securities	期限结构模型。又见固定收入衍生证券
affine-yield models	收益亲合(关联)模型
Cox Ingersoll and Ross model	Cox Ingersoll-Ross 模型
cross-sectional restrictions	截面限制
fixed-income derivative securities	固定收入衍生证券
Ho-Lee model. See also pricing fixed-income derivative securities	Ho-Lee 模型。又见固定收入衍生证券定价
homoskedastic single-factormodel	同方差性单因子模型
latent-variable models	隐藏变量模型
Longstaff-Schwartz model	Longstaff-Schwartz 模型
square-root single-factor	平方根单因子模型
two-factor model	双因子模型
Vasicek model	Vasicek 模型
testing for nonlinear structure	非线性结构检验
Brock-Dechert-Scheinkman test	Brock-Dechert-Scheinkman 检验
Hsieh test	Hsieh 检验
Tsay test	Tsay 检验
threshold	门限
threshold autoregression(TAR)	门限自回归（TAR）
time aggregation	时间累积(效应)
time inconsistency	时间不一致性
time-nonseparability in the utility function. See also habit formation models	效用函数的时间不可分割性。又见习惯形成模型
trace operator	迹算子

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

Trades and Quotes(TAQ)database	交易报价(TAQ)数据库
training a learning network	培植一个学习网络
training path	培植路径
transactions costs	交易成本
transactions data	交易数据
transition density function	转移密度函数
Treasury securities	国债
Treasury bills	国库券
Treasury notes and bonds	中长期国债
when-issued market	发行市场
zero-coupon yield curve	零息收益率曲线
trend-stationary process. See also unit root process	趋势平稳过程。又见单位根过程
trending Ornstein-Uhlenbeck process	趋势 Ornstein-Uhlenbeck 过程
Tsay test of nonlinearity	非线性 Tsay 检验
two-factor term-structure model	两因子期限结构模型
two-stage least squares (SLS) estimation	二阶段最小二乘估计(SLS)
variance-covariance matrix	方差—协方差矩阵
lognormal asset pricing model with power utility	具幂效用的对数正态资产定价模型
unit root process	单位根过程
term structure of interest rates	利率期限结构
volatility process	波动过程
volatility tests	波动性检验
universal approximation property	一般渐近属性
VAR methods. See vector autoregressive methods	VAR 方法 见向量自回归法
variance	方差
variance-bounds test	方差界限检验
variance difference. See varince ratio	方差差分。见方差比
variance inequality	方差不等式
variance ratio	方差比
long-horizon regressions	长期水平回归
Random Walk 1 model	随机游动模型 1
Random Walk 3 model	随机游动模型 3
variance-reduction techniques	方差缩减技术
Vasicek modelVasicek	模型

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

VECH model	VECH 模型
vech operator	向量化操作(算子)
vector autoregressive(VAR)methods	向量自回归法（VAR)
multiperiod forecasts	多期预测
present-value relations	现值关系
price volatility	价格波动
return volatility	收益波动
Volatility	波动波动率
deterministic	确定性的
historical	历史
implied	隐含
stochastic	随机
volatility estimation. See ARCH models, GARCH models	波动率估计。见 ARCH 模型,GARCH 模型
stochastic-volatility models	随机波动模型
volatility feedback	波动反馈
volatility tests	波动检验
finite-sample considerations	有限样本因素
Marsh and Metron model	Marsh- Metron 模型
orthogonality tests	正交性检验
unit roots	单位根
variance-bounds tests	方差边界检验
Volterra seriesVolterra	序列
Wald test	Wald 检验
weight function	权函数
weighting matrix	加权矩阵
GMM estimation	GMM 估计
IV estimation	IV 估计
white noise	白噪声
White specification test	White 定式检验
Wiener process. See also arithmetic Brownian motion	维纳过程。又见算术布朗运动
wild card option	百搭期权
Wishart distribution	Wishart 分布
Wold Representation Theorem	Wold 表达式理论
yield curve. See also term structure	收益率曲线。又见利率期限结构

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

of interest rates	
yield spread	收益差价
yield to maturity	到期收益
zero-beta asset	零贝塔系数资产
zero-coupon bonds	零息债券

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服微信/QQ：958218088 期货开户和书籍下载请进:http://www.7help.net

策　　划＝黄　磊
责任编辑＝谷　雨
封面设计＝周卫民

在过去的二十多年里，金融市场中使用数量方法出现了意想不到的增长。现在的金融专业人士在组合管理、资产交易、风险管理、财务咨询和证券管理中，运用成熟的统计技术已经成为惯用的手段。

这本经典性著作适用于从事金融计量经济学建模的博士研究生、高级工商管理硕士研究生和金融行业的专业人士。本书包含了实证金融的全部范围，包括资产收益的预测、随机游动的假设、证券市场的微观结构、事件分析、资本资产定价模型和套利定价理论、利率的期限结构、经济均衡的动态模型以及诸如ARCH、神经网络、统计和混沌理论等非线性金融模型。

《金融市场计量经济学》将成熟的经济理论、大量纷繁的数据分析和引人入胜的实证结果进行了最有效的结合。本书自出版以来，受到经济学界、金融学界的广泛好评。

罗伯特·J. 希勒（Robert J. Shiller ）认为："这是一本具有里程碑意义的作品，为今天的计量经济学奉献了精炼的、易理解和涉及广泛领域的专题方法。"

伯恩斯坦（Bernstein）则认为："《金融市场计量经济学》不仅使我们在理解资本市场的基本概念上有了大踏步的迈进，还提供给我们检验这些想法有效性的方法，并将其应用到日常的资产管理中。"

彼得·汉森（Peter Hansen）的评价是："作为资产定价领域的领头人，作者在书中以流畅的语言描述、编排了各种有趣的结果，综合了有关研究工具和研究结论的讨论。我们极力推荐此书给致力于证券市场数据分析的大学生和研究学者。"

本书的每个章节中特定的金融应用性内容都会促进统计技术的发展，由此产生了一个个易于理解的理论与实践相结合的新内容，进而把这一已经掌握的统计技术推向金融应用的前沿。每个章节还包括最近的实证结果，如拒绝随机游动的假设，还设计了有助于读者应用所要涉及的问题。



ISBN 7-81049-797-9/F · 682
定价：69.00 元